

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 031

Titolo nota

16/11/2010

Derivate successive Dato $f(x)$, se questa è derivabile posso calcolarne $f'(x)$. Se questa a sua volta è derivabile posso calcolarne la sua derivata, che è detta derivata seconda di $f(x)$, e così via. La derivata k -esima si indica in uno di questi modi

$$f^{(k)}(x_0)$$

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0).$$

Teorema di De L'Hôpital Supponiamo di dover calcolare
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{con } x_0 \in \bar{\mathbb{R}})$$

Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi

- ① un po' di burocrazia,
- ② il limite proposto è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
- ③ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{tipo } \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \text{ ma NON } \boxed{4})$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (stesso l).

Utilizzo operativo

- Devo calcolare il limite di un rapporto, ma non lo so fare perchè è una forma indeterminata.
- Provo a calcolare il limite del rapporto tra le derivate
- Se questo riesce, allora il limite iniziale è lo stesso.
- Se questo non riesce perchè è ancora una forma indeterminata, allora posso REITERARE il procedimento e provare a calcolare il limite del rapporto tra le derivate seconde, e così via.

Ipotesi burocratiche: $f(x)$ e $g(x)$ devono essere definite almeno "vicino" ad x_0 , devo poter dividere per $g(x)$, devo poter calcolare $f'(x)$ e $g'(x)$, devo poter dividere per $g'(x)$.

Achtung! Non si può applicare il teo. di De L'Hôpital

① quando la forma indeterminata non è del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\infty}{\infty}$,

② quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ non esiste}$$

In questo caso non bisogna concludere che il limite iniziale non esiste, ma dipende dai casi (cioè BOM).

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$



NO! Non era una forma indeterminata, quindi non posso applicarlo.

Correttamente: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3x + 1} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}, \text{ quindi forma indet.} \right]$

(Hôp) $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos x \right)$ NON ESISTE

Posso dedurre che il limite iniziale non esiste? NO! Il teo. di De L'Hôpital non vale nei casi di non esistenza.

Correttamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{3}$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \left[\frac{0}{0} \text{ forma indeterminata} \right]$

Metodo classico: raccolgo x

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 + x^4 \right)}{\cancel{x^3}^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \rightarrow 0$$

NO!!! LIMITE METÀ PER VOLTA !!!

Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 5x^4}{3x^2} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 20x^3}{6x} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 60x^2}{6} = -\frac{1}{6}$$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ È lecito farlo con Hôpital?

NI: le ipotesi sono verificate, quindi in un certo senso SI.

Però per dimostrare che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ abbiamo già usato questo limite notevole, quindi NO.

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $[= +\infty \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Oss. Si può usare Hôpital per fare limiti di successioni?

NI: burocraticamente NO, ma posso passare alle funzioni e sperare nel criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ $[\frac{0}{0}]$ Occhio alle derivate

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} (-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{0}{0}, \text{ ma Hôpital peggiorerebbe solo le cose} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Osservazioni

- ① Hôpital è scomodo perché bisogna fare le derivate...
- ② Hôpital può essere usato su un "pezzo del limite", ad esempio su uno dei fattori di un prodotto euvone.