

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 030

Titolo nota

13/11/2010

Derivata della funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione e sia $g(x)$ la sua inversa. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

Allora
$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}$$

Ragionamento che la rende plausibile. Se g è l'inversa di f , allora

$$f(g(x)) = x$$

(definizione di inversa)

Derivo a destra e sinistra

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \text{da cui} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Nota bene: ho calcolato la derivata della composizione facendo finta che g sia derivabile, cosa che avrebbe dimostrato.

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$ $f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$

Deriv.
quoziente

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

questa si può scrivere come

$$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[\tan x]' = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Esempio 3 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$

$$[\arctan x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2 g(x)}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ho usato che $\tan(\arctan x) = x$, la quale è vera $\forall x \in \mathbb{R}$
 (Osservazione: $\arctan(\tan x) = x$ è vera $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Esempio 4 $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ $g(x) = \arcsin x$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Due passaggi "loschi":

- ① $\sin(\arcsin x) = x$ vale per $x \in [-1, 1]$, ma è proprio lì che voglio calcolare la derivata.
- ② $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ vale solo quando $\cos \alpha > 0$, cioè quando $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Io l'ho applicata con $\alpha = \arcsin x$, che fortunatamente sta in quell'intervallo.
- ③ Il denominatore $\sqrt{1 - x^2}$ si annulla per $x = \pm 1$. In quei punti $\arcsin x$ non è derivabile. Quindi

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1)$$

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,
 commentando per bene
 i passaggi "loschi".

— 0 — 0 —

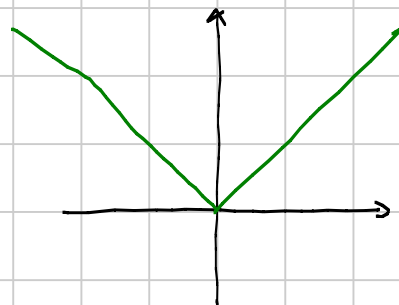
Achtung! Abbiamo visto f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
NON VALE il viceversa, cioè
 f può essere continua ma non derivabile in x_0 !!!!

Esempio 1 $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$ È chiaramente continua.
Provo a calcolare la derivata per $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{questo limite non esiste perché}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Graficamente: in 0 c'è un "angolo"
con tangente $y = x$ a 0^+
e $y = -x$ a 0^- .



Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 0$ Provo a calcolare
 $f'(x_0)$. Devo fare

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Nota bene: $\sqrt{x}$ è continua in $x=0$.

Nell'origine la retta tangente al grafico è verticale.

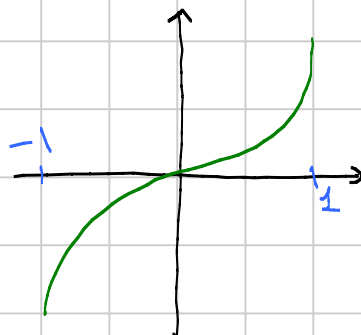


Esempio 3 $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin x$ è continua in $[-1, 1]$

$\arcsin x$ è derivabile in $(-1, 1)$.

In $x = \pm 1$ la retta tangente al grafico è verticale



Esempio 4 $f(x) = x |\sin x|$ È derivabile in $x_0 = 0$?

Faccio il rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h |\sin h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |\sin h| = 0 \Rightarrow f(x) \text{ è derivabile in } x=0$$

Proviamo in $x_0 = \pi$. Calcolo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi+h) \overbrace{|\sin(\pi+h)|}^{-\sin h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\pi+h) \frac{|\sin h|}{h} \text{ e questo non esiste, perché per } h \rightarrow 0^+ \text{ tende a } \pi, \text{ per } h \rightarrow 0^- \text{ tende a } -\pi$$

$$[\sin x]' = \cos \quad [\cos x]' = -\sin x \quad [\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$[e^x] = e^x \quad [\log x] = \frac{1}{x} \quad [\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[x^n]' = n x^{n-1} \quad (\text{visto per } n=2, \text{ in generale si dimostra per induzione usando regola del prodotto } x^{n+1} = x \cdot x^n)$$

$$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ per } \alpha \text{ reale qualunque (anche negativo)}$$

$$[x^\alpha]' = [e^{\alpha \log x}]' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Esercizio $f(x) = [\cos x]^{\sin x}$

$$f'(x) = [e^{\sin x \cdot \log(\cos x)}]' = e^{\sin x \cdot \log(\cos x)} \cdot [\sin x \cdot \log(\cos x)]' =$$

$$= [\cos x]^{\sin x} [(\sin x)' \cdot \log(\cos x) + \sin x \cdot (\log(\cos x))'] =$$

$$= [\cos x]^{\sin x} [\cos x \cdot \log(\cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x)] =$$