

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 029

Titolo nota

13/11/2010

Regole algebriche per il calcolo di derivate

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad (\lambda \text{ numero})$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della somma $f(x)$ e $g(x)$ date, $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2° modo So per ipotesi che f e g sono derivabili, dunque

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)h + o(h) \end{aligned}$$

Sommo e ottengo

$$\begin{aligned} \underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{\varphi(x_0+h)} &= \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]h}_{\varphi'(x_0) \cdot h} + o(h) \\ \varphi(x_0+h) &= \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

La differenza è uguale alla somma...

Derivata del prodotto $P(x) = f(x) \cdot g(x)$

1° modo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0+h) - P(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\downarrow f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{\downarrow g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} \right]$$
$$= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

Parenfesi Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 , cioè
 $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Dim. $f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\downarrow 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow f(x_0)}$

Quindi $f(x_0+h) \rightarrow f(x_0)$ quando $h \rightarrow 0$.

2° modo di fare il prodotto

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Moltiplico:

$$\underbrace{f(x_0+h)g(x_0+h)}_{\downarrow P(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0)g(x_0)}_{\downarrow P(x_0)} + \underbrace{[f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]}_{\downarrow P'(x_0)}h + \underbrace{o(h)}_{\downarrow o(h)}$$

Commento sui termini restanti: $h \cdot o(h) = h \cdot \underbrace{h \omega(h)}_{\omega_1(h) \rightarrow 0} = o(h)$

$$o(h) \cdot o(h) = h \cdot \underbrace{\omega_1(h) \cdot h \omega_2(h)}_{\omega_3(h) \rightarrow 0 \cdot 0 \cdot 0} = o(h)$$

Derivata di $\frac{1}{f}$ Chiamo $Q(x) = \frac{1}{f(x)}$

Con il rapporto incrementale $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x_0+h) - Q(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h f(x_0+h) f(x_0)} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \right) \left(\underbrace{\frac{-1}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}_{-\frac{1}{[f(x_0)]^2}} \right)$$

— o — o —

Derivata di $\frac{f}{g}$ Basta scrivere

$$\left[\frac{f}{g} \right]' = \left[f \cdot \frac{1}{g} \right]' = \text{(applico regola prodotto)}$$
$$= f' \cdot \left[\frac{1}{g} \right] + f \cdot \left[\frac{1}{g} \right]' = \text{(applico regola deriv. quoziente)}$$
$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

— o — o —

Commento su derivata composizione: $C(x) = f(g(x))$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x_0+h) - C(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right]$$

$\downarrow f'(g(x_0))$ $\downarrow g'(x_0)$

Per calcolare il 1° limite posso $k = g(x_0+h) - g(x_0)$
Quando $h \rightarrow 0$ ho che $k \rightarrow 0$. Il limite diventa

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} = f'(g(x_0))$$

La dimostrazione non è rigorosa perché quando abbiamo moltiplicato e diviso per $g(x_0+h) - g(x_0)$ non c'era ragione perché fosse $\neq 0$.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = \cos x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

2° modo $f(x_0+h) = \cos(x_0+h)$
 $= \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h$ (sviluppiami)
 $= \cos x_0 (1+o(h)) - \sin x_0 (h+o(h))$
 $= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} - \underbrace{\sin x_0 \cdot h}_{f'(x_0) \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$

Esempio 2 $f(x) = \log x$ $x_0 > 0$

2° modo $f(x_0+h) = \log(x_0+h)$
 $= \log \left[x_0 \left(1 + \frac{h}{x_0} \right) \right]$
 $= \log x_0 + \log \left(1 + \frac{h}{x_0} \right)$ (sviluppiamo $\log(1+y) = y + o(y)$)
 $= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{x_0} \cdot h}_{f'(x_0) \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$

Esercizio: fare 2 esempi stile "2° modo".