

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 028

Titolo nota

13/11/2010

DERIVATE Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

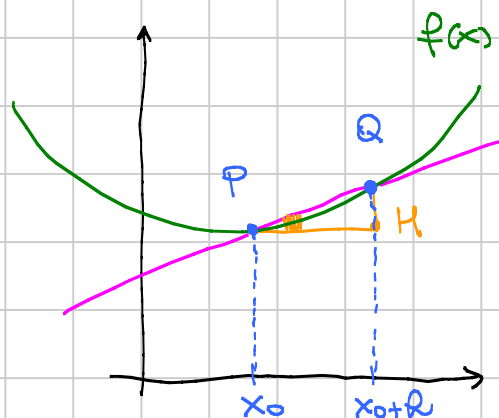
Rapporto incrementale Si definisce come

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{dove } h \neq 0$$

$f(x_0+h) - f(x_0)$ è l'incremento della variabile y = QH
 $(x_0+h) - x_0$ " " " " x = PH

Significato geometrico

Rapp. increm. = $\frac{QH}{PH} = \tan \hat{QPH}$
= coeff. angolare retta PQ



Definizione di derivata.

Si dice che $f(x)$ è derivabile in $x = x_0$ se esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si dice derivata di f nel punto x_0 e si indica in uno dei seguenti modi:

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \dot{f}(x_0) \quad f^{(1)}(x_0)$$

Significato geometrico.

Rapp. increm. = coeff. angolare retta PQ

$\downarrow$
 $f'(x_0)$

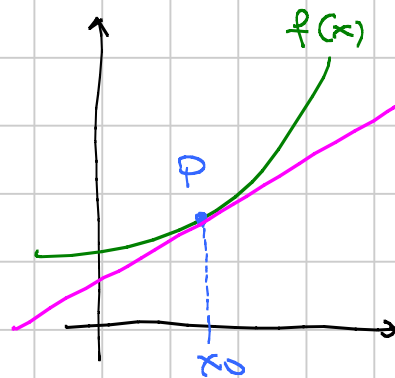
$\downarrow$
coeff. angolare retta tangente al grafico in P

Eq. retta tangente ad un grafico.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

valore
per $x = x_0$

coeff. angolare



Derivata e o piccolo

Una funzione è derivabile in un punto x_0 con derivata $f'(x_0)$ se e solo se

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Dim. Supponiamo che esista la derivata come limite del rapp. incr. e verifichiamo la formula con o piccolo, cioè

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)$$

Uso def. quasi equivalente, cioè divido per h e faccio il lim:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)}_{\downarrow f'(x_0)=0} \right]$$

Viceversa, supponiamo che valga la formula con o piccolo e dimostriamo che il limite del rapp. incr. esiste e vale proprio $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + f'(x_0)h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f'(x_0) + \frac{o(h)}{h} \right] = f'(x_0) \end{aligned}$$

— o — o —

Conseguenza: ci sono due modi per calcolare una derivata

① Fare il limite del rapporto incrementale

② Ottenere uno sviluppo tipo $f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\text{derivata}} + o(h)$

— o — o —

Interpretazione geometrica formula con o piccolo

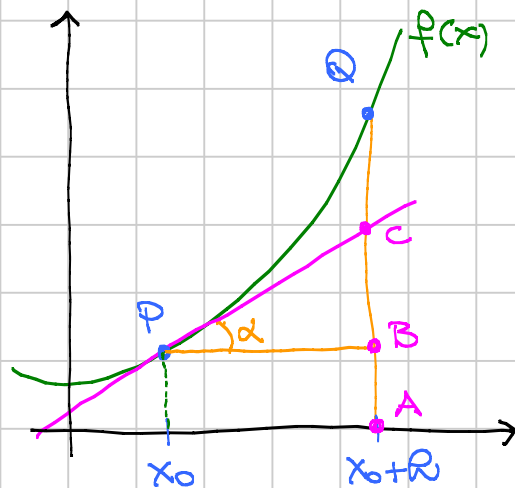
$$AQ = f(x_0 + R)$$

$$AB = f(x_0)$$

Voglio calcolare BC. Per farlo studio il triangolo rettangolo PCB.

$$\frac{CB}{PB} = \tan \alpha = f'(x_0)$$

$$CB = PB \cdot f'(x_0) = R f'(x_0)$$



$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot R + o(R) \\ \text{AQ} &= \text{AB} + \text{BC} + \text{CQ} \end{aligned}$$

Quando $R \rightarrow 0$, cosa succede ai 3 segmenti a destra?

- AB resta sempre lo stesso
- BC si riduce proporzionalmente (linearmente) ad R (se R si divide per 10, anche BC si divide per 10).
- CQ si riduce in maniera più forte rispetto ad R, cioè $o(R)$.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo: $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(x_0 + R)^2 - x_0^2}{R}$

$$= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0R + R^2 - \cancel{x_0^2}}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} (2x_0 + R) = 2x_0 = f'(x_0)$$

2° modo: $f(x_0 + R) = (x_0 + R)^2 = \boxed{x_0^2} + \boxed{2x_0R} + \boxed{R^2}$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $f(x_0) + f'(x_0)R + o(R)$

— o — o —

Esempio 2 $f(x) = e^x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} = e^{x_0}$$

$\downarrow$
1

2° modo

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = \text{(uso sviluppi)} \\ = e^{x_0} (1+h+o(h)) \\ = \underline{e^{x_0}} + \underline{e^{x_0} \cdot h} + o(h) \\ f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \boxed{\frac{\cos h - 1}{h \cdot h}} \boxed{h} + \cos x_0 \boxed{\frac{\sin h}{h}} \right) = \cos x_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $-\frac{1}{2}$ 0 1

2° modo

$$f(x_0+h) = \sin(x_0+h) \\ = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \quad \text{(uso sviluppi)} \\ = \sin x_0 (1+o(h)) + \cos x_0 (h+o(h)) \\ = \sin x_0 + o(h) + \cos x_0 \cdot h + o(h) \\ = \underline{\sin x_0} + \underline{\cos x_0 \cdot h} + \underline{o(h)} \\ f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \\ \text{---} \text{---} \text{---}$$