

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 027

Titolo nota

11/11/2010

Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

1° modo di vederlo $f(x) = o(x^2)$ vuol dire

$$f(x) = x^2 \cdot w(x) = x \cdot \underbrace{(xw(x))}_{w_1(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0} \quad \text{quindi } f(x) = o(x)$$

2° modo di vederlo Dividendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x)}{x^2}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow 0} = 0$

3° modo di vederlo $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$
 $x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Per transitività $f(x) = o(x)$.
 $\quad \quad \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad}$

Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora cosa possiamo dire di $f(7x)$?

$f(x) = o(x)$ vuol dire $f(x) = x \cdot w(x)$, quindi

$$\begin{aligned} f(7x) &= 7x \cdot w(7x) \\ &= x \cdot \underbrace{7w(7x)}_{w_1(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w_1(x) = 7 \cdot 0 = 0, \quad \text{quindi } f(7x) = o(x)$$

In generale: se $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$, allora

$$\underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad} \quad f(ax) = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Supponiamo $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$. Allora $\exists f(x) = o(x)$

$$f(x) = x \cdot w(x), \quad \text{quindi } \exists f(x) = x \cdot \underbrace{7w(x)}_{w_1(x)} = x \cdot \underbrace{w_1(x)}_{\downarrow 0}.$$

Esempio 1 $3 \sin(4x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

1° modo: $3 \sin(4x^2) = \frac{3 \sin(4x^2)}{x} \cdot x$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x)$ $w(x)$ $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(4x^2)}{4x^2} \cdot 4x = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 3 0

2° modo: dividendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(4x^2)}{x} = 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3 \arctan x}{e^x - 1}$

Modo tradizionale: divido sopra e sotto per x

$$\frac{\frac{\sin x}{x} + 3 \frac{\arctan x}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}} \rightarrow \frac{1+3}{1} = 4$$

Modo o piccolo: sostituisco gli sviluppi

$$\frac{\sin x + 3 \arctan x}{e^x - 1} = \frac{\overbrace{x+o(x)}^{\sin x} + \overbrace{3x+o(x)}^{3 \arctan x}}{\underbrace{(1+x+o(x))}_{e^x} - 1} =$$

$$= \frac{4x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow 4$$

$\downarrow$
 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + x + o(x) - (\cancel{1} + o(x))}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1,$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 - \arctan^2 x}{\arcsin(4x)} = \frac{3}{4}$

Sviluppo tutto per bene (usando gli sviluppi dove serve)

$$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$\arcsin(4x) = 4x + o(4x) = 4x + o(x)$$

$$x^2 = o(x) \quad [x^2 = x \cdot x]$$

$$\arctan^2 x = o(x) \quad \text{lo vediamo in 2 modi}$$

1° modo : dividendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\boxed{\arctan^2 x}}{\boxed{x^2}} \cdot \boxed{x}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 0$

2° modo : parto dallo sviluppo $\arctan x = x + o(x)$. Elevo al

quadrato $\arctan^2 x = [x + o(x)]^2$
 $= x^2 + 2x o(x) + [o(x)]^2$
 $= x^2 + o(x) + o(x)$
 $= x^2 + o(x)$

$$2x o(x) = 2x \cdot x \cdot \omega(x) = x \{ \underbrace{2x \omega(x)}_{\omega_1(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0} \}$$

$$[o(x)]^2 = [x \cdot \omega(x)]^2 = x \cdot \underbrace{x \omega^2(x)}_{\omega_2(x) \rightarrow 0 \cdot 0^2 = 0}$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x + \sin^3(2x)}{\log(1+2x^2)} = \frac{3}{4}$

Sviluppo tutto pensando ad $o(x^2)$

$$\log(1+2x^2) = 2x^2 + o(2x^2)$$

$$= 2x^2 + o(x^2)$$

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\sin^3(2x) = o(x^2) \quad \text{volendo si verifica dividendo o elevando al cubo lo sviluppo di sin.}$$

$$\frac{e^{x^2} - \cos x + \sin^3(2x)}{\log(1+2x^2)} = \frac{\cancel{1} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{1}{2} x^2 - o(x^2) + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{3}{2} x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \sin(\tan x) - \cos(7x)}{\arctan(\log(1+3x))} = \frac{2}{3}$

$$\cos(7x) = 1 + o(7x) = 1 + o(x)$$

$$\log(1+3x) = 3x + o(x)$$

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\sin(\tan x) = \tan x + o(\tan x)$$

$$\sin y = y + o(y)$$

$$= x + o(x) + o(x + o(x))$$

$$= x + o(x) + o(x) + o(o(x)) = x + o(x)$$

Oppure all'antica: dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1$$

$$e^{\arctan x} = 1 + \arctan x + \underbrace{o(\arctan x)}$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$= 1 + x + o(x) + o(x)$$

$$= 1 + x + o(x)$$

Conclusione

$$\frac{\text{Num}}{\text{Den}} = \frac{\cancel{1}x + x - \cancel{1} + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{2x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x}\right)}$$