

o piccolo Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni. Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (punto in cui fare un limite). Si dice che $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w(x)$ tale che

(i) $f(x) = g(x) \cdot w(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$

Brutalmente: $f(x)$ è uguale a $g(x)$ per qualcosa che tende a zero

Modo quasi equivalente di dire la stessa cosa. Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè che $g(x)$ sia $\neq 0$ vicino al punto x_0 , tranne al più in x_0 stesso. Allora

(i) diventa $w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e (ii) diventa $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Brutalmente: suppone che $f(x)$ e $g(x)$ tendano a 0 per $x \rightarrow x_0$, dire che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che " $f(x)$ batte $g(x)$ " o che " $f(x)$ tende a 0 più velocemente di $g(x)$ ".

Esempio 1 $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$. Quindi $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = x$
Devo scrivere $f(x) = g(x) \cdot w(x)$

$$\sin x^2 = x \cdot \frac{\sin x^2}{x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$

Devo verificare la (ii), cioè $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \boxed{x} = 0$

In questo caso posso usare anche la definizione quasi equivalente (cioè dividendo per x che è $\neq 0$ in un intorno di 0 , escluso il p.to stesso). La verifica diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \text{limite di prima} = 0.$$

Esempio 2 $\arctan x = o(\sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$

Faccio la verifica con la definizione quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow 0} = 0$$

Esempio 3 $\frac{1}{x^3} = o\left(\frac{1}{x^5}\right)$ per $x \rightarrow 0^+$

Faccio la verifica con il 1° metodo:

$$\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{x^5}}_{g(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{w(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Posso fare la stessa verifica anche dividendo
— 0 — 0 — 0 —

Proprietà di o piccolo Siano $f_1(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$
 $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Questo vuol dire che:

$$f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$$

$$f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = 0$$

$$" \quad " \quad w_2(x) = 0$$

Somma $f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) + w_2(x)\}}_{w_3(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \{w_1(x) + w_2(x)\} = 0 + 0 = 0$$

Quindi $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

$$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

Differenza $f_1(x) - f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) - w_2(x)\}}_{w_4(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_4(x) = 0$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

Prodotto $f_1(x) \cdot f_2(x) = [g(x)]^2 \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_5(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_5(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) \cdot w_2(x) = 0 \cdot 0 = 0 \quad o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

Quoziente Supponiamo di poter dividere per $f_2(x)$. Allora

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot w_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}$$

Questa è una forma indeeterminata $\frac{0}{0}$, quindi non posso dire nulla

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{Nulla di furbo}$$

Brutalmente: $f_1(x)$ batte $g(x)$, $f_2(x)$ batte $g(x)$, e questo non mi dice chi vince tra $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Transitività Supponiamo $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$
 $g(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Allora $f(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Infatti

$$f(x) = g(x) \cdot w_1(x)$$

$$g(x) = R(x) \cdot w_2(x)$$

Ma allora

$$f(x) = g(x) \cdot w_1(x) = R(x) \cdot \underbrace{w_2(x) \cdot w_1(x)}_{w_3(x)}$$

e $\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = 0 \cdot 0 = 0$, quindi $f(x) = o(R(x))$

$$o(o(g)) = o(g)$$

SVILUPPINI

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

Sono la traduzione in termini di o piccolo dei limiti notevoli.

$$\boxed{\sin x = x + o(x)} \text{ cioè } \sin x - x = o(x), \text{ Verifico dividendo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

La verifica è analoga per $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$.

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x)} \text{ cioè } e^x - 1 - x = o(x), \text{ cioè dividendo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \text{ cioè } \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2), \text{ cioè divid.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)} \text{ cioè } \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = o(x), \text{ cioè dividendo}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos x = 1 + o(x)} \text{ cioè } \cos x - 1 = o(x), \text{ perché } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot x} = 0$$

Altro modo di vederlo

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x).$$