

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 025

Titolo nota

10/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$ La successione 1^n è $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Cosa vuol dire che 1^∞ è una forma indeterminata? Vuol dire che se $a_n \rightarrow 1$ e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n^{b_n}$ DIPENDE, cioè bisogna vedere come sono fatte a_n e b_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = e, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = [1^\infty] = 1$$

Esercizio 2 Per ogni parametro $a \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right)$

Infatti lo scrivo come e e considero l'esponente:

$$n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \cdot a \rightarrow a$$

↓ Faccio il cambio $x = \frac{a}{n}$ e
1 ho il limite notevole per $x \rightarrow 0$

Esercizio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + (-1)^{n!-n})^n = +\infty$

$$3 + (-1)^{n!-n} \geq 2, \text{ quindi } (3 + (-1)^{n!-n})^n \geq 2^n$$

per confronto a 2. ↓ $+\infty$

Esercizio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + (-1)^{n!-n})^n$ Non esiste

Guardo l'esponente: $n!-n$ è pari se n è pari e
dispari se n è dispari e > 1 .

Quindi $a_{2n} = (2+1)^{2n} = 3^{2n} \rightarrow +\infty$
 $a_{2n+1} = (2-1)^{2n+1} = 1^{2n+1} \rightarrow 1$

Avevamo 2 sottosucc. con comportamenti diversi, il limite iniziale non esiste.

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^3)}{\arctan x^3 \cdot \arcsin^3(2x)} = \frac{1}{8}$

$$\frac{\sin^2(x^3)}{\arctan(x^3) \cdot \arcsin^3(2x)} = \frac{\sin^2(x^3)}{(x^3)^2} \cdot \frac{x^3}{\arctan(x^3)} \cdot \frac{x^3}{\arcsin^3(2x)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)^2}_1 \cdot \underbrace{\frac{x^3}{\arctan(x^3)}}_1 \cdot \underbrace{\left[\frac{2x}{\arcsin(2x)}\right]^3}_1 \cdot \frac{1}{8}$$

Esercizio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 6n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 7}$

Cosa NON FARE $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = A - B$ NO!!!!!!

$$(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}) = A - B$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Razionalizzo

$$(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 7}) \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)(n^3 + 7)} + \sqrt[3]{(n^3 + 7)^2}}{\sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)(n^3 + 7)} + \sqrt[3]{(n^3 + 7)^2}} =$$

$$\frac{n^3 + 6n^2 - 1 - n^3 - 7}{\sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 6n^2 - 1)(n^3 + 7)} + \sqrt[3]{(n^3 + 7)^2}}$$

Brutalmente: Numeratore $\sim 6n^2$

Denominatore $\sim \sqrt[3]{n^6} + \sqrt[3]{n^6} + \sqrt[3]{n^6} = 3n^2$

$$\frac{6n^2}{3n^2} = 2$$

Per renderlo rigoroso, basta raccogliere la potenza giusta. — o — o —

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} = \frac{2}{5}$

BRUTALE: $\frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} \sim \frac{\log x^2}{\log x^5} = \frac{2 \log x}{5 \log x} \rightarrow \frac{2}{5}$

Rigoroso: raccordo x^2 dentro i logaritmi

$$\frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} = \frac{\log[x^2(1+\frac{3}{x^2})]}{\log[x^5(1+\frac{7}{x^5})]} = \frac{2 \log x + \log(1+\frac{3}{x^2})}{5 \log x + \log(1+\frac{7}{x^5})}$$

$$= \frac{\cancel{\log x} \left[2 + \frac{\log(1+\frac{3}{x^2})}{\log x} \right]}{\cancel{\log x} \left[5 + \frac{\log(\quad)}{\log x} \right]} \rightarrow \frac{2}{5}$$

$\left[\frac{0}{\infty} \right] = 0$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \{ \log(x^2+x+1) - \log(x^2+7) \}$

Proprietà dei logaritmi: $x \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+7}\right) =$

$$x \log\left(1 + \frac{x^2+x+1}{x^2+7} - 1\right) = x \log\left(1 + \frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}-7}{x^2+7}\right)$$

$$= x \log\left(1 + \frac{x-6}{x^2+7}\right) =$$

$$= \boxed{x} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{x-6}{x^2+7}\right)}{\frac{x-6}{x^2+7}} \cdot \boxed{\frac{x-6}{x^2+7}} \rightarrow 1.$$

↓ Motivo: $y = \frac{x-6}{x^2+7} \rightarrow 0$
 1 quindi è il solito limite notevole

Esercizio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(3x)) + \arctan^3(x^4) \cdot e^{\sin x} + \arcsin(\tan(2x))}{\sqrt{1+x} - \cos x} = 10$$

Raccolgo x sopra e sotto

$$\frac{\log(1 + \sin(3x))}{x} = \frac{\log(1 + \sin(3x))}{\sin(3x)} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 3

$$\frac{\arcsin(\tan(2x))}{x} = \frac{\arcsin(\tan(2x))}{\tan(2x)} \cdot \frac{\tan(2x)}{2x} \cdot 2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 2

$$\frac{\arctan^3(x^4) \cdot e^{\sin x}}{x} \rightarrow 0 \quad (\text{Moltiplicare e dividere per } x^{12})$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1 + 1 - \cos x}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x + \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} =$$

$$= \boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \boxed{x} + \boxed{\frac{\cancel{1} + \cancel{x} - 1}{\cancel{x} (\sqrt{1+x} + 1)}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

Quindi: $\frac{\text{Num}}{x} \rightarrow 3 + 0 + 2 = 5$ $\frac{\text{Den}}{x} \rightarrow \frac{1}{2}$

Quindi $\frac{\text{Num}}{\text{Den}} \rightarrow 10$