

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 024

Titolo nota

10/11/2010

Teorema delle successioni monotone

Sia a_n una successione debolmente crescente (se lo è strettamente, allora ancora meglio). Allora ci sono solo 2 possibilità:

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

(non sono possibili $a_n \rightarrow -\infty$ e a_n non ha limite)

In entrambi i casi $l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

In particolare, se la successione è limitata superiormente, allora resta solo la possibilità ①.

— o — o —

In versione decrescente: una successione a_n debolmente decrescente ha solo 2 possibilità:

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow -\infty$

In ogni caso $l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Se a_n è anche limitata inferiormente, allora resta solo la ①.

— o — o —

Domanda: se a_n è limitata (sia super., sia infer.), ma non sappiamo nulla sulla monotonia, quali possibilità ci sono? Due:

① $a_n \rightarrow l$

② a_n non ha limite.

— o — o — o —

Dim. teo. succ. monotone crescenti

Caso $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Ipotesi: $\sup = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$, esiste un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$.

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$ deve succedere che $a_n \geq M$ definitivamente.

Essendo la successione debol. crescente, appena supera M non torna più indietro.

Più formalmente:

- fisso $M \in \mathbb{R}$ a piacere
- per ipotesi $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{m_0} \geq M$
- per monotonia sarà $\underline{a_n \geq a_{m_0} \geq M} \quad \forall n \geq m_0$, cioè definitivamente.

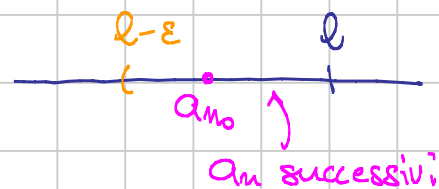
Caso $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l \in \mathbb{R}$

Voglio dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha
 $l - \varepsilon \leq a_n \leq l$ definitivamente.

Analogamente a prima:

- fisso $\varepsilon > 0$ a piacere
- per ipotesi ($\sup = l$) esiste un elemento della successione in $[l - \varepsilon, l]$, cioè $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $l - \varepsilon \leq a_{m_0} \leq l$.
- per ogni $n \geq m_0$ dovrà essere $a_n \geq a_{m_0} \geq l - \varepsilon$ per monotonia e $a_n \leq l$ perché l è il sup.

Quindi $\underline{l - \varepsilon \leq a_n \leq l} \quad \forall n \geq m_0$.



NUMERO e Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Perché il limite di questa esiste ed è un numero reale?

Basta dimostrare 2 cose:

- ① è limitata superiormente
- ② è debolmente crescente (anzi pure strettamente)

[Banalità: una successione debolmente crescente è PER FORZA limitata inferiormente: infatti $a_n \geq a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$]

Dimostriamo che a_n (quella di sopra) è limitata inferiormente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoulli}) \quad \text{che uso con } x = \frac{1}{n}$$

Dimostrazione di ②

Devo dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
cioè che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Per fare questo basta che

dimostri che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

Facciamo il conto: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; $a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}_{(1+x)^n \text{ con } x = -\frac{1}{n^2} \geq -1} \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\geq \underset{\uparrow}{\left(1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)} \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

Bernoulli

Confrontando il 1° e l'ultimo ho dimostrato che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, che è quello che volevo.

In realtà ho dimostrato anche la disuguaglianza stretta non appena $n > 1$.

— o — o —

Dim. di ① Dimostro che $a_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo (tra l'altro) dice che il limite è compreso tra 2 e 3.

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Applico il binomio di Newton

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n$$

con $x=1$ e $y = \frac{1}{n}$. Ottengo

$$\begin{aligned}a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \binom{n}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots \\ &= \underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n}}_1 + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2}}_{\leq \frac{1}{2!}} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3}}_{\leq \frac{1}{3!}} + \dots\end{aligned}$$

In ogni frazione il numeratore è + piccolo della potenza di n al denominatore, quindi

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \boxed{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

[Ho usato che $n! \geq 2^{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, disuguaglianza che si dimostra agevolmente per induzione].

Ora abbiamo una somma del tipo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Per induzione abbiamo dimostrato che

$$a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

quindi la somma fa $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

In conclusione $a_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + 2 = 3.$

— 0 — 0 — 0 —