

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 023

Titolo nota

09/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+3n+5} - \sqrt{n^2+1}$ [$+\infty - \infty$]

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{A} - \sqrt{B} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad : \text{"Rationalizzazione"}$$

Nel caso specifico

$$\sqrt{n^2+3n+5} - \sqrt{n^2+1} \cdot \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{n^2}+3n+5 - \cancel{n^2}-1}{\sqrt{n^2+3n+5} + \sqrt{n^2+1}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Finale rigoroso: raccolgo n sopra e sotto

$$\frac{\cancel{n} \left(3 + \frac{4}{n} \right)}{\cancel{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)} \quad \text{ed il resto è banale.}$$

Esercizio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+2}}$ [$+\infty - \infty$]
[$+\infty - \infty$]

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}} =$$

$$= \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}-2}{\cancel{3n}+1 - \cancel{3n}-2} \cdot \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \rightarrow \sqrt{3}$$

↑
raccolgo n dentro le radici

Achtung! $[\sqrt{A}]^2 = A$ per ogni $A \geq 0$ Per $A < 0$ non ha senso la radice

$$\sqrt{A^2} = |A| \quad \text{per ogni } A \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$ [$+\infty - \infty$]

Pongo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - 3y + 2} - y = \lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y^2 - 3y + 2} - y) \frac{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y}{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 3y + 2 - y^2}{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y(-3 + \frac{2}{y})}{y(\sqrt{1 - \frac{3}{y} + \frac{2}{y^2}} + 1)} = -\frac{3}{2}$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n!}}$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{(2n)!}{n! n!}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)! (n+1)!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4$$

quindi il limite originario è 4.

Esempio 5 "Trucco del valore assoluto"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\arctan x} \cdot \cos(\text{Mostro}) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ inquietante limitato} \right]$$

In un angolo esaminiamo la prima parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}} \cdot \boxed{\frac{x}{\arctan x}} \cdot \boxed{x} = 0$$

$y = x^2 \rightarrow \downarrow 1$ $\downarrow 1$ $\downarrow 0$

Se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \cos(\text{Mostro}) = 0$

Perché? Solito! $-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1$

Se sapessi il segno di $f(x)$ basterebbe moltiplicare. Però in ogni caso

$$\boxed{-|f(x)|} \leq \boxed{f(x) \cdot \cos(\text{Mostro})} \leq \boxed{|f(x)|}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Altro modo di vedere la stessa cosa:

$$f(x) \cdot \cos(\text{Mostro}) \leq |f(x) \cdot \cos(\text{Mostro})| = |f(x)| \cdot \underbrace{|\cos(\text{Mostro})|}_{\leq 1} \leq |f(x)|$$

$$f(x) \cdot \cos(\text{Mostro}) \geq -|f(x) \cdot \cos(\text{Mostro})| = -|f(x)| \cdot |\cos(\dots)| \geq -|f(x)|$$

Osservazione generale $-|A| \leq A \leq |A|$ per ogni $A \in \mathbb{R}$.

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n - 3^n - n^3} = 9$

$$\sqrt[n]{9^n \left(1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n^3}{9^n}\right)} = 9 \left(1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n^3}{9^n}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 9$$

$\downarrow$
 1^0

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{\log^4 x}$ $[1^\infty]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log^4 x \cdot \log(1 + \arctan x)}$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log^4 x \cdot \log(1 + \arctan x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log(1 + \arctan x)}{\arctan x}}_{\substack{\downarrow y = \arctan x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x \log^4 x}_{\substack{\downarrow \text{(Tabellina)} \\ 0}} = 0$$

Quindi il limite originario è $e^0 = 1$.

Esercizio 8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right)}_{a_n}$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} ; a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} ; a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

Non posso dire che il limite è 0 perché tutti gli addendi tendono a zero.

Posso dire che

termine + grande della somma

numero dei termini

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$$

Diagram illustrating the inequality $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$. The term a_n is circled in blue. The right-hand side is boxed in blue. Arrows point from the text boxes to the corresponding parts of the inequality.

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = +\infty$

Diagram illustrating the limit expression. The terms $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, and $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ are shown with arrows pointing down to 0 .

D'altra parte

addendo + piccolo

Numero degli addendi

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)$$

Diagram illustrating the inequality $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)$. The term a_n is circled in blue. The right-hand side is boxed in blue. Arrows point from the text boxes to the corresponding parts of the inequality.

Achtung! Il teorema algebrico della somma vale per la somma di 2 addendi, o per la somma di 2010 addendi, ma comunque per un numero FINITO e FISSO di addendi.

Negli esempi i singoli addendi tendono a 0, ma il loro numero tende a $+\infty$, quindi è su fondo qualcosa del tipo $0 \cdot (+\infty)$