

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 022

.....
Titolo nota

09/11/2010

Sottosuccessioni e limiti che non esistono

Sia a_n una successione. Una sottosuccessione vuol dire considerare solo alcuni termini, presi in ordine crescente di indice.

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

Esempi classici:

a_{2n}	=	sottosucc. dei fermioni di indice pari
a_{2m+1}	=	dispari
a_{4n}	=	" indice multiplo di 4
a_{n^2}	=	" indice quadrato perfetto

($a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$)

a_{m+4} = peso fuori i termini da a_4 in poi:
 $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots$

In un certo senso è una s.succ. FINITA, che salta solo un numero finito di termini, ottenuta mediante SHIFT degli indici.

Teorema Se $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le sue sottosuccessioni tendono allo stesso l .

Achtung! Se a_n non ha limite (di tipo ④) non è assolutamente detto che una s.succ. non abbia limite.

Azi Sia a_n una successione. Supponiamo che esistano 2 sottosuccessioni che hanno 2 limiti $l_1 \neq l_2$ (entrambi $\in \mathbb{R}$). Allora a_n non ha limite, cioè è di tipo ④.

Dim. Se am tendesse ad un certo $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora TUTTE le sottosucc. dovrebbero tendere ad l .

Utilizzo operativo Per dimostrare che una successione non ha limite, basta trovare 2 sottosucc. con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$ non ha limite. Infatti
 $a_{2n} = 1 \rightarrow 1$ e $a_{2n+1} \rightarrow -1$.

Esempio 2 $a_n = n^2 + (-3)^n$. Considero due sottosuccessioni

$$a_{2n} = 4n^2 + (-3)^{2n} = 4n^2 + 9^n \rightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)^2 + (-3)^{2n+1} = (2n+1)^2 - 3 \cdot 9^n \rightarrow -\infty \text{ perché l'esponenziale batte la potenza.}$$

Quindi $a_{2n} \rightarrow +\infty$, $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$, per cui a_n non ha limite

Esempio 3 $a_n = \sqrt{n} + (-1)^n n$

$$a_{2n} = \sqrt{2n} + 2n \rightarrow +\infty ; a_{2n+1} = \sqrt{2n+1} - (2n+1) = \sqrt{2n+1} (1 - \sqrt{2n+1}) \rightarrow -\infty$$

Ho che $a_{2n} \rightarrow +\infty$, $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$, quindi a_n non ha limite.

Esempio 4 $a_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$

Ora oscilla il termine che non comanda.

$$a_n \geq n - \sqrt{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Esempio 5 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

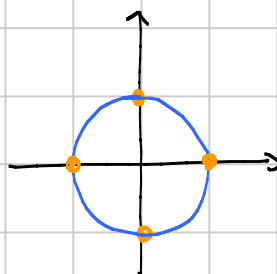
$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$$

$$a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 0, a_7 = -1$$

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

— 0 — 0 —



Stesso discorso per le funzioni

Criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

Sia $f(x)$ una funzione, e sia a_n una successione.

Supponiamo che $a_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Pongo $x = a_n$.
Quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow x_0$

Achtung! Questo funziona se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste.

Non funziona se è di tipo ④

Operativamente: se voglio dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste,

basta trovare 2 successioni $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ abbiano 2 comportamenti diversi.

[se il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora dovrebbe essere $f(a_n) \rightarrow l$ e $f(b_n) \rightarrow l$]

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ L'idea è che il limite non esiste.

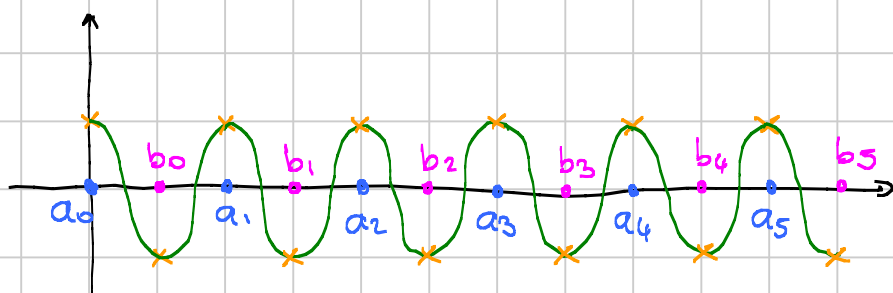
Per dimostrarlo devo trovare 2 successioni $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c. $\cos(a_n)$ e $\cos(b_n)$ abbiano comportamento diverso.

Prendo

$a_n = 2\pi n$. Allora $a_n \rightarrow +\infty$ e $\cos(a_n) = 1 \rightarrow 1$

$b_n = \pi + 2\pi n$. Allora $b_n \rightarrow +\infty$ e $\cos(b_n) = -1 \rightarrow -1$

Quindi $\cos(a_n)$ e $\cos(b_n)$ hanno limiti diversi, quindi il limite iniziale non esiste.



Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$

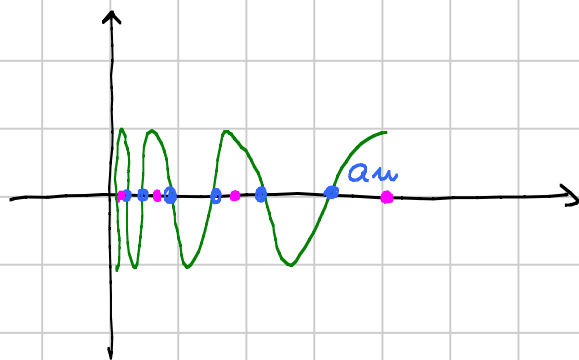
Idea: il limite non esiste.

Come dimostrarlo?

Devo trovare 2 successioni

$a_n \rightarrow 0^+$ $b_n \rightarrow 0^+$ tali che

$\sin \frac{1}{a_n}$ e $\sin \frac{1}{b_n}$ abbiano comportamenti diversi.



Scego gli a_n in modo che $\sin \frac{1}{a_n} = 0$, cioè $\frac{1}{a_n} = n\pi$, cioè

$a_n = \frac{1}{n\pi}$. È chiaro che $a_n \rightarrow 0^+$ e $\sin \frac{1}{a_n} = 0 \rightarrow 0$

Scego i b_n in modo che $\sin \frac{1}{b_n} = 1$, cioè $\frac{1}{b_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. È chiaro che $b_n \rightarrow 0^+$ e $\sin \frac{1}{b_n} = 1 \rightarrow 1$

Quindi il limite originario non esiste.

Domande da test Se $a_n \rightarrow 7$, allora $a_{2n} \rightarrow 14$

(FALSA: $a_{2n} \rightarrow 7$ perché è sottosuccessione)

Se $a_{2n} \rightarrow 7$, allora $a_n \rightarrow 7$ (FALSA: potrebbe non avere limite, ad esempio $a_n = 7 \cdot (-1)^n$)

Se $a_n \rightarrow 25$, allora $a_{n+3} \rightarrow 25$ (VERA: sottosucc. !!!)

Se $a_{n+3} \rightarrow 22$, allora $a_n \rightarrow 22$ (VERA: sottosucc. piena !!!)

Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $\cos a_n$ non ha limite (FALSA !!!)

Potrebbe ad esempio essere $a_n = 2\pi n$: in tal caso $\cos(a_n) \rightarrow 1$].