

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 021

Titolo nota

09/11/2010

Dimostrazione limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Infatti $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi il limite a 0^- coincide con quello a 0^+ .

Supponiamo ora di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Divido per $\sin x$ (per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ posso farlo impunemente perché $\sin x > 0$). Ottengo

$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

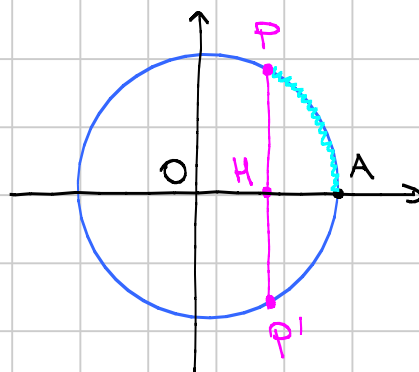
Visto che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Resta solo da dimostrare la disuguaglianza $\sin x \leq x \leq \tan x$

Dimostrazione che $\sin x \leq x$

Sia P il p.to corrispondente all'arco $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sia P' il simmetrico risp. asse x . Allora

- $PP' = 2PH = 2\sin x$
- $\text{arco } \widehat{PP'} = 2\text{arco } \widehat{AP} = 2x$



Poiché $\text{arco } \widehat{PP'} \geq \text{segmento } PP'$ abbiamo che

$$2x \geq 2\sin x, \quad \text{cioè} \quad x \geq \sin x$$

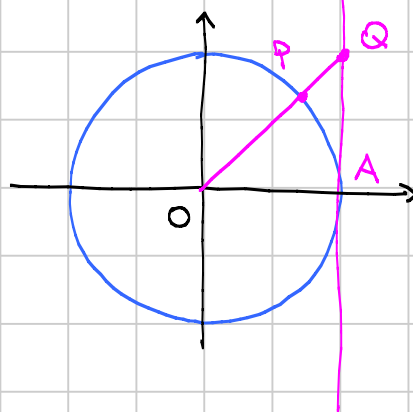
Dimostrazione di $x \leq \tan x$

Nella figura

$x = \text{lungh. arco AP}$

$\tan x = QA$

Non è evidente (ancora) la disuguaglianza.



$$\text{Area (OQA)} = \frac{1}{2} OA \cdot QA = \frac{1}{2} \tan x$$

Calcolo l'area del settore OPA. Uso la proporzione

Area Settore : Area cerchio = arco AP : lungh. circ.

$$\text{Area Settore} : \pi = x : 2\pi$$

Quindi $\text{Area settore} = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2} x$

Poiché $\text{Area Settore} \leq \text{Area (OQA)}$, abbiamo $\frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$, da cui $x \leq \tan x$.

— o — o —

Limiti notevoli con esponenziali e logaritmi.

Partiamo dal limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Calcolo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ [$1^{-\infty}$]

Riparto il limite a $+\infty$ ponendo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e$$

(Ho fatto il cambio $z = y-1$)

Ora prendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e faccio il log ad x es x .

Otengo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \log e = 1$

cioè $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

Ora pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0^+$, quindi

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y)$$

e questo dimostra il limite notevole con il logaritmo.

Partendo da $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e procedendo come prima, trovo

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+y)}{y} = 1, \text{ il che completa il discorso}$$

Partendo da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, Pongo $y = \log(1+x)$

Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \log 1 = 0$. Inoltre $e^y = 1+x$, $x = e^y - 1$
Per cui

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1}, \text{ e questo dimostra il limite notevole con l'esponenziale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$$

$\downarrow y = x \log a$
 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$, quindi $x = \tan y$
Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1.$$

Analogamente si dimostra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$
 $y = \arcsin x$

— 0 — 0 —

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x}{x}$ Non esiste. Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x}{x} = +\infty$ $\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right]$

e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arccos x}{x} = -\infty$ $\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{0^-} \right]$

— 0 — 0 —

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} \left[\frac{\sin \pi}{\pi^2 - \pi^2} = \frac{0}{0} \right]$. Per portarlo a 0 pongo $y = x - \pi$. Quando $x \rightarrow \pi$ ho che $y \rightarrow 0$. Ricavo $x = y + \pi$

Allora $\frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \frac{\sin x}{(x + \pi)(x - \pi)} = \frac{\sin(y + \pi)}{(y + 2\pi)y} = \left[\frac{0}{0}, \text{ancora} \right]$

$= - \frac{\sin y}{(y + 2\pi)y} = - \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{y + 2\pi} \rightarrow - \frac{1}{2\pi}$
 $\uparrow$ percorso

— 0 — 0 —

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2^x - 2} \left[\frac{0}{0} \right]$ Pongo $y = x - 1$. Quando $x \rightarrow 1$, ho che $y \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2^x - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{2^{y+1} - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{2 \cdot 2^y - 2} =$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \cdot \frac{y}{2(2^y - 1)} = \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{\log 4}$