

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 020

Titolo nota

06/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$

Pongo $y = \log x$, quindi $x = e^y$
Quando $x \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \text{ perch\'e potenza contro espon.}$$

Più in generale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = 0 \text{ per ogni } a > 0 \text{ per ogni } b > 0$$

i logaritmi perdono dalle potenze

Esercizio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{n^{20}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{n} \log 3}}{e^{20 \log n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{n} \log 3 - 20 \log n}$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\sqrt{n} \log 3 - 20 \log n = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} \left\{ \log 3 - 20 \underbrace{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{fatto prima}}} \right\} = +\infty$$

Quindi il limite originario fa $+\infty$

Esercizio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt{n^2 + 3}}$

Brutale: Numeratore $\sim \log 3^n = n \log 3$
Denominatore $\sim \sqrt{n^2} = n$
Quindi $\lim = \log 3$

Rigorosamente: raccolgo chi comanda

$$\frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt{n^2 + 3}} = \frac{\log \left[3^n \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) \right]}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \frac{n \log 3 + \log \left(1 + \frac{1}{3^n} \right)}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \frac{n \log 3 + \underbrace{\frac{\log \dots}{n}}_{\substack{\uparrow \frac{\log 1}{\infty} = 0}}}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}$$

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(3x)}{\arctan(2x)}$ $\left[\frac{1-1}{0} \right]$

$$\frac{e^x - \cos(3x)}{\arctan(2x)} = \frac{e^x - 1 + 1 - \cos(3x)}{\arctan(2x)} = \frac{e^x - 1}{\arctan(2x)} + \frac{1 - \cos(3x)}{\arctan(2x)}$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\arctan(2x)}{2x}} + \frac{\frac{1 - \cos(3x)}{9x}}{\frac{\arctan(2x)}{2x}} =$$

$$= \frac{\boxed{\frac{e^x - 1}{x}}}{2 \cdot \boxed{\frac{\arctan(2x)}{2x}}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{1 - \cos(3x)}{9x^2}} \cdot \boxed{9x}}{2 \cdot \boxed{\frac{\arctan(2x)}{2x}}} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $\left[\frac{0}{0} \right] = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

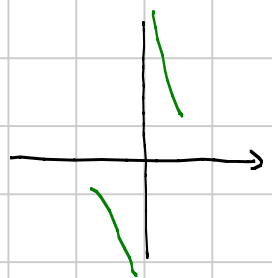
Pongo $y = \cos x - 1$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

Esercizio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ Non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$



Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ $[0 \cdot (-\infty)]$

Pongo $y = \log x$, quindi $x = e^y$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y =$$

Pongo $z = -y$. Quando $y \rightarrow -\infty$, ho che $z \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \quad (\text{esponenziale contro potenza})$$

Altro modo di fare la stessa cosa: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, quindi $x = \frac{1}{y}$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0.$$

Da ricordare $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a [\log x]^b = 0$ per ogni $a > 0$ e ogni $b > 0$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \log x} = e^0 = 1$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 \cdot \underbrace{x \log x}_0 = 0. \quad \text{Quindi limite iniziale} = 1.$$

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{n!} - (n!)^n \quad [+\infty - \infty]$

$$n^{n!} - (n!)^n = \underbrace{n^{n!}}_{+\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{(n!)^n}{n^{n!}}}_0 \right] \quad \text{Resta da considerare la frazione}$$

$$0 \leq n! \leq n^n$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

Elevo alla n -esima potenza: $0 \leq (n!)^n \leq n^{n^2}$

Divido per $n^{n!}$ e ottengo

$$0 \leq \frac{(n!)^n}{n^{n!}} \leq \frac{n^{n^2}}{n^{n!}} = n^{n^2 - n!} = e^{(n^2 - n!) \log n} = e^{-\infty} = 0$$