

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 019

Titolo nota

06/11/2010

Limiti di funzioni: strumenti

- Teoremi di confronto: confronto a 2 e a 3 come con le success.
- Teoremi algebrici: esattamente come le successioni
- Continuità
- Cambio di variabili
- Limiti notevoli

Continuità Una funzione $f(x)$ si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quali sono le funzioni continue?

Meta-teorema Qualunque cosa ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove definita, cioè dove non presenta problemi BUCROCRATICI (tipo denomi = 0, radici di roba < 0, logaritmi di roba ≤ 0 , ...)

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(7^x + \log_5(\cos x^3)) = \frac{\pi}{4}$

BASTA SOSTITUIRE $x = 0$: DIVENTA $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(3^x + 2)}{x^2 + 3} = 0$

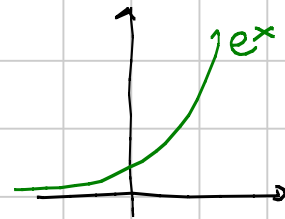
Rigorosamente: $-1 \leq \cos(3^x + 2) \leq 1$

Divido per $x^2 + 3$ che è positivo (almeno per x grandi)

$$\boxed{-\frac{1}{x^2+3}} \leq \boxed{\frac{\cos(\quad)}{x^2+3}} \leq \boxed{\frac{1}{x^2+3}}$$

↓ ↓ ↓
0 0 0

Potenzi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71, \dots$ e^x



L'inversa di e^x è il logaritmo naturale di x
 In x oppure $\log x$

se non è indicata una base, si intende base e
 — 0 — 0 —

Limiti notevoli

PADRI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

FIGLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

NIPOTI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Sono tutti esempi di forme indeeterminate del tipo $\frac{0}{0}$.

Esempio

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

limite notevole
 PADRE + teorema
 algebrico

$$1^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}$$

banale sostituzione
 di $x \rightarrow 0$
 autorizzata dal
 metateorema

Altro esempio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1. \end{aligned}$$

Cambio di variabili

Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Pongo $y = x^2$ (cambio di variabili)
Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$. Assomiglia a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
1 1

Perché $\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$ tende a 1? Faccio il cambio di variabili
 $y = \sin x$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x}$

Metodo sbagliato: pongo $y = \cos x$. Viene $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 1$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{e^1 - 1}{1} = e - 1$$

Allo stesso risultato si arrivava sostituendo $x=0$ nel limite iniziale.

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(5x)}{5x}} \cdot 5 = 5$

$\downarrow$
1

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\tan x}} = \frac{1}{2}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ 1 1

Criterio FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ $[+\infty \cdot \sin 0 = +\infty \cdot 0]$

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \log 7} - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log 7} - 1}{x \log 7} \cdot \log 7 = \log 7$$

$\downarrow$
1

PASSAGGIO E-ALLA $A^B = e^{\log(A^B)} = e^{B \log A}$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt[n]{5} - 1)$ $[+\infty (1-1) = +\infty \cdot 0]$

$$n (\sqrt[n]{5} - 1) = n (5^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0$ e diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5^y - 1}{y} = \log 5$$

— 0 — 0 —

Forme indeterminate ed E-ALLA

$$A^B = e^{B \cdot \log A}$$

$$+\infty^0$$

$$0^0$$

$$1^\infty$$

$$e^{0 \cdot \log \infty}$$

$$e^{0 \cdot \log 0} = e^{0(-\infty)}$$

$$e^{\infty \cdot \log 1} = e^{\infty \cdot 0}$$