

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 018

Titolo nota

06/11/2010

Limiti di funzioni $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

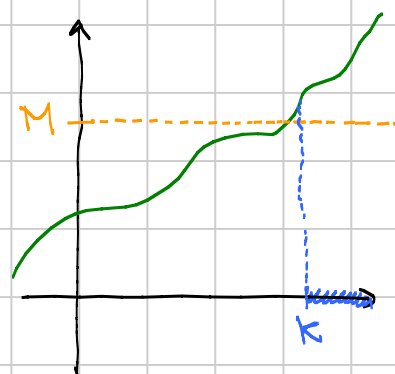
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
 $\begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ \rightarrow +\infty & \textcircled{2} \\ \searrow -\infty & \textcircled{3} \\ \searrow \text{non esiste} & \textcircled{4} \end{cases} \rightarrow \text{Nessuno dei precedenti}$

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$

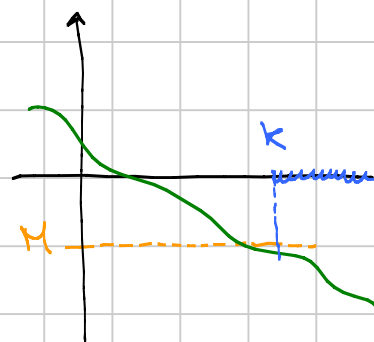
(Più M è grande, più servirà prendere K grande)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$



Def. di ④ Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$



Più precisamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}$ t.c.

$l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}$ t.c.

$l - \varepsilon \leq f(x) < l \quad \forall x \geq K.$

— o — o —

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

- ①
- ②
- ③
- ④

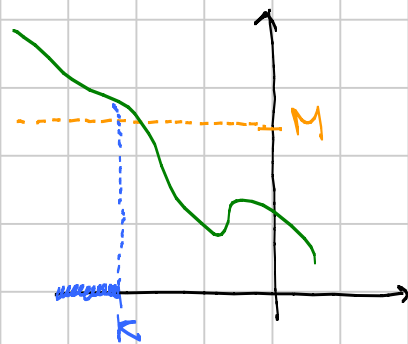
Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \leq K$

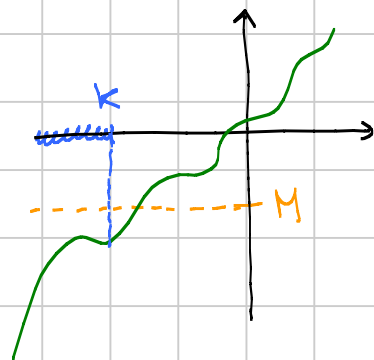
(Più M è grande, più K sarà molto negativo)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \leq K$



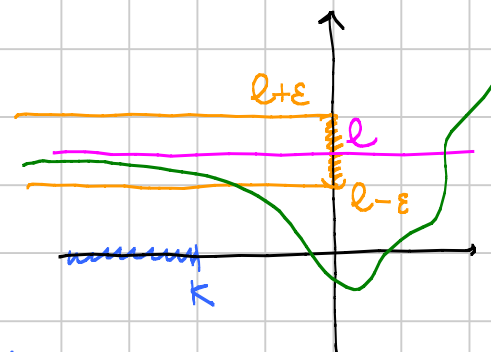
Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq K$

(Più ε è vicino a zero, più saranno K enormi negativi)

— 0 — 0 —



Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

- ①
- ②
- ③
- ④

NDP

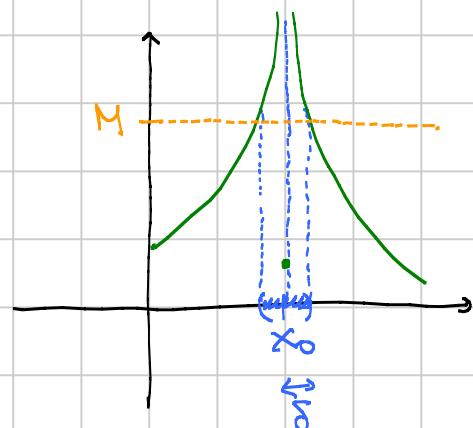
Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$

Tutto l'intervallo escluso x_0



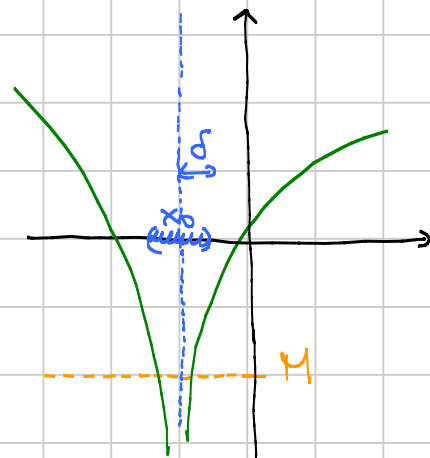
Achtung! La definizione di limite tiene conto di cosa succede "vicino" a x_0 . Quello che succede in x_0 non è rilevante. Anzi: la funzione potrebbe non essere nemmeno definita per $x = x_0$.

Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ b.c. } f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

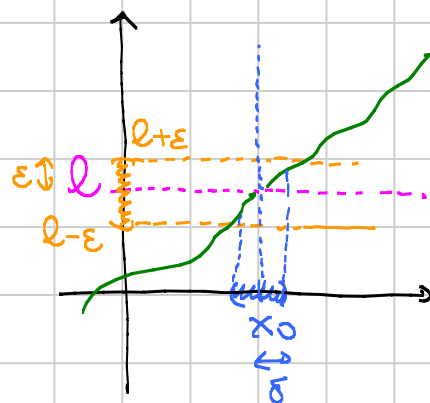


Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ b.c.}$$

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



(Più ε è vicino a zero, più è probabile che δ debba essere vicino a zero).

— o — o —

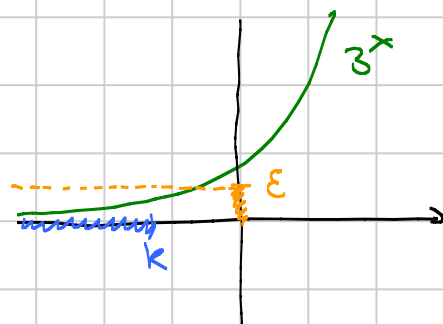
Quando si fanno limiti per $x \rightarrow x_0^+$ vuol dire che la disuguaglianza opportuna deve valere non $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, ma solo $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$.

Quando $x \rightarrow x_0^-$ si intende ... $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$.

— o — o —

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$ (conetta)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0^+$ (conetta)



Cosa vuol dire?

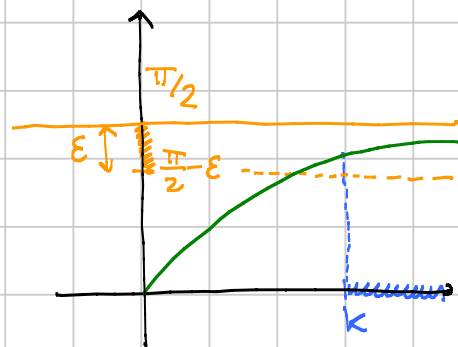
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } 0 < 3^x \leq \varepsilon \quad \forall x \leq K$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, o meglio $\frac{\pi}{2}^-$

Cosa vuol dire?

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ b.c.

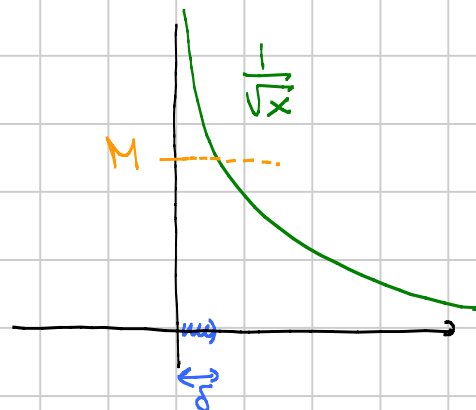
$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \geq k$$



Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ b.c.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq M \quad \forall x \in (0, \delta]$$



Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ Non esiste!!!!

Meglio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



In generale:

se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$

e $l_1 \neq l_2$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.