

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 017

Titolo nota

04/11/2010

CONFRONTO DI ORDINI DI INFINITO

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^3} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Applico il criterio del rapporto, cioè calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 2 = l > 1 \end{aligned}$$

Poiché $l > 1$, si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

In alternativa, potrei usare il criterio della radice sempre con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$.
Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{[\sqrt[n]{n}]^3} = 2 = l > 1$$

Conclusione come prima.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+7)^{2010}}{(1.001)^n} = 0 \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Rapporto: calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+8)^{2010}}{(1.001)^{n+1}}}{\frac{(n+7)^{2010}}{(1.001)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+8)^{2010}}{(1.001)^{n+1}} \cdot \frac{(1.001)^n}{(n+7)^{2010}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1.001} \cdot \left(\frac{n+8}{n+7} \right)^{2010} = \frac{1}{1.001} = l < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

Regola generale: esponenziali battono le potenze

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \text{per ogni } a > 0, b > 1$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{200^n} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

1° modo Criterio del rapporto con $a_n = \frac{n!}{200^n}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{200^{n+1}}}{\frac{n!}{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{200^{n+1}} \cdot \frac{200^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!}}{200 \cdot \cancel{200^n}} \cdot \frac{\cancel{200^n}}{\cancel{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{200} = +\infty = l > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \text{limite originale} = +\infty$$

2° modo Criterio della radice con lo stesso a_n . Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{200} = +\infty$$

Conclusione come sopra.

— 0 — 0 —

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{per ogni } a > 1$$

Fattoriale batte esponenziale

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 + 7^n}$

Comanda 7^n , quindi si raccoglie

$$\sqrt[n]{n^7 + 7^n} = \sqrt[n]{7^n \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)} = 7 \cdot \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7$$

$1^0 = 1$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n}$

$$\sqrt[n]{5^n + 7^n} = \sqrt[n]{7^n \left(1 + \frac{5^n}{7^n} \right)} = 7 \cdot \left[1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7$$

$1^0 = 1$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Applico criterio del rapporto con $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

Il limite del rapporto è > 1 , quindi $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ La cosa sotto radice è l' a_n dell'esempio 6 (quasi)

Calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$, dove a_n è quello dell'es 6.

Applico rapporto $\rightarrow$ radice. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$

Se il rapporto tende ad e , anche la radice tende ad e . Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e, \text{ ma allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

In tabellina:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = +\infty$

Criterio della radice con $a_n = \frac{3^{n^2}}{n!}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{\sqrt[n]{n!}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3^n}{n}} \cdot \boxed{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ e
 esponenziale (tabellina)
 batte potenze

Se la radice tende a $+\infty$, il limite originale è $+\infty$

Quando si dice che fattoriale batte esponenziale, si intende l'esponenziale con esponente n , non n^2 .

Nota bene: 3^{n^2} batte tranquillamente n^n

— o — o —

Osservazione Se $a_n = (2n)!$. Quanto fa $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} = (2n+2)(2n+1)$$