

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 016

Titolo nota

04/11/2010

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio rapporto $\rightarrow$ radice

LIMITE MISTERIOSO

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$e \sim 2.7182...$

Tabellina

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$.

Allora

- se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$; (incluso il caso $l = +\infty$)
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$;
- se $l = 1$, allora BOH (cioè non si può dire nulla su a_n , cioè bisogna trovare un altro metodo).

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.

Allora stesse conclusioni del criterio della radice

Utilizzo operativo dei criteri del rapporto e della radice

Situazione: devo calcolare il limite di a_n .

Invece di calcolare questo, calcolo il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Se uno di questi 2 lo so fare, e viene $l \neq 1$, allora so quanto vale il limite iniziale.

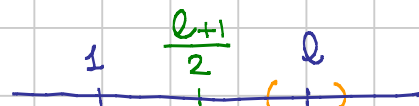
CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso l).
— o — o —

Conseguenza: se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$. Quindi se il rapporto dice BOR, anche la radice dice BOR.
— o — o —

Dim. della radice Caso $l > 1$



Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$. Elevo alla n :

(confronto a 2) $a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$
 corretto dopo video
 espones. con base > 1

Se fosse $l = +\infty$, allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq 2010$, quindi $a_n \geq 2010^n$ e si chiude come sopra.

Caso $l < 1$

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}, \text{ da cui}$$

Ipotesi
 $0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0
 (carabinieri) (espones. con base < 1)

Achtung! Supponiamo $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (o definitiv.)
 Supponiamo che $b_n \rightarrow 0$. Allora a_n può tendere a $+\infty$, tendere ad $l \geq 0$, oppure non avere limite.
 Supponiamo ora che sia $a_n > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
 Allora le conclusioni sono le stesse !!!

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Esempio

$$\boxed{\frac{1}{n}} < \boxed{\frac{700}{n}}$$

↓ ↓
○ ○

per ogni $n \geq 1$

Le disuguaglianze $<$ al limite possono diventare $\leq$.

— ○ —

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ [$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \leadsto (+\infty)^0$ forma indet.]

Applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \boxed{\frac{1}{n}} \right) = 1$$

↓
○

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (stesso limite).

— ○ — — ○ —

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ [$\sqrt[n]{n!} = (n!)^{\frac{1}{n}} \leadsto (+\infty)^0$]

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (stesso limite)

— ○ — — ○ —

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{30}}$

1° modo Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^{30}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{30}}{n^{30}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{30} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{30} = 1$$

Quindi anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{30}} = 1$.

2° modo Recorso! $\sqrt[n]{n^{30}} = \left[\sqrt[n]{n} \right]^{30} \rightarrow 1^{30} = 1$.

↑
Recorso

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 + 2n^5 - 14} = 1.$

1° modo Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^7 + 2n^5 - 14 \dots$

2° modo Chi comanda si raccoglie!

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^7 + 2n^5 - 14} &= \sqrt[n]{n^7 \left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}\right)} = \sqrt[n]{n^7} \sqrt[n]{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}} \\ &= \left[\sqrt[n]{n}\right]^7 \left[1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}\right]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $1^7 = 1$ $\downarrow$ $1^0 = 1$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n + 7 \arctan n!}$

$$\dots = \sqrt[n]{n \left(1 + 7 \frac{\arctan n!}{n}\right)} = \sqrt[n]{n} \left[1 + 7 \frac{\arctan n!}{n}\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1^0

$$0 \leq \arctan n! \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per n e ottengo

$$0 \leq \frac{\arctan n!}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

— 0 — 0 —

In tabellina

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio in } n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$