

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 014

Titolo nota

03/11/2010

Combinatoria Fattoriale di $n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Significato combinatorio: anagrammi di una parola di n lettere diverse,

Esempio 1 COMPUTER 8 lettere tutte diverse. Quanti sono gli anagrammi

La prima lettera la posso scegliere in	8 modi
" 2 ^a " " " "	7 modi
" 3 ^a " " " "	6 modi
⋮	
" 7 ^a " " "	2 modi
La 8 ^a lettera è obbligata	1 modo

$8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 8!$

Esempio 2 ESEMPIO 7 lettere, di cui una ripetuta
ESEMPIO gli anagrammi di questa sono 7!
ESEMPIO nel 7! i 2 anagrammi precedenti sono distinti

Ogni possibile anagramma compare 2 volte nella lista dei 7!,
quindi devo dividere per 2 $\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$

Esempio 3 TUTTO Una lettera si ripete 3 volte
TUTTO Ogni anagramma compare nella lista dei 5! tante volte quante sono le permutazioni dei 3 colori, cioè 3! volte.

Quindi sono $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$

Esempio 4 BIOMEDICA 9 lettere, 2 I

Anagrammi: $\frac{9!}{2!}$

BINOMIALI

Problema combinatorio: 20 studenti, ne voglio scegliere 4 da premiare. In quanti modi li posso scegliere?

Il 1° lo scelgo in	20 modi
2°	19 modi
3°	18 modi
4°	17 modi

In questo modo ho contato + volte lo stesso gruppo di 4.

Lo stesso gruppo di 4 persone lo posso aver scelto in $4!$ modi (ciascuno può essere stato il 1°, il 2°, ...). Devo dividere per $4!$

I modi sono
$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!}$$

Più in generale, se voglio scegliere k persone su n , i modi di farlo sono

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{"n su k"}}$$

Altro modo di scrivere la stessa cosa:

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} \frac{16!}{16!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!}$$

In generale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Definizione di binomiale
 $0 \leq k \leq n$

Esempio Quante partite ci sono in un campionato a 20 squadre? Limitandosi al girone di andata, devo scegliere in tutti i modi possibili 2 squadre su 20, quindi

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$$

Proprietà dei binomiali

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dim. algebrica $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Dim. combinatoria : $\binom{n}{k}$ = modi di scegliere k da premiare su n
 $\binom{n}{n-k}$ = " " " " $n-k$ da non premiare

I due modi di procedere sono equivalenti

$$\textcircled{2} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

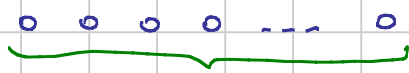
Dim. algebrica : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k+1} + n - \cancel{k}}{(n-k)(k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dim. combinatoria Devo scegliere $(k+1)$ -persone in un gruppo di $n+1$. Isolo l' $(n+1)$ -esimo


 n persone $(n+1)$ -esimo.

Come posso scegliere $(k+1)$?

- posso sceglierli tutti tra i primi n : $\binom{n}{k+1}$ possibilità
- posso prendere l'ultimo e aggiungere k tra i primi n : $\binom{n}{k}$

$$\textcircled{3} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Dim. algebrica : $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$

Dim. combinatoria : modi di scegliere n persone da premiare tra n (1 solo modo)

BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Triangolo di Tartaglia (Pascal)

Ogni elemento è la somma dei due elementi che stanno sopra.

Quando sviluppo $(x+y)^n$, i coeff. sono gli elementi della riga n

		1	1							riga 1
		1	2	1						" 2
		1	3	3	1					" 3
		1	4	6	4	1				" 4
		1	5	10	10	5	1			" 5

Esempio $(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 x^3 y + 6 x^2 y^2 + 4 x y^3 + 1 \cdot y^4$

Fatto: i coefficienti che compaiono nella riga n sono i binomiali $\binom{n}{k}$ per $k = 0, 1, \dots, n$

Interpretazione combinatoria del binomio di Newton

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$$

Sviluppando tutto, quanti termini saranno del tipo $y^i x^{n-i}$?

Devo scegliere y in i parentesi su n , e lo posso fare in $\binom{n}{i}$ modi. Quindi il coeff. è $\binom{n}{i}$

④ Mettendo $x=y=1$ ottengo che la somma dei binomiali

della riga n -esima è 2^n

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$