

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 013

Titolo nota

02/11/2010

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

Si potrebbe fare con la definizione, ma viene semplice con il confronto a due. Infatti

confronto $2^n \geq n$ (dim. per induzione a suo tempo)
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$ (sarebbe n^2 : fatto lezione prec.)

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ per ogni $a > 1$ $\rightarrow$ TABELLINA

Infatti $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + (a-1)n$
 $(1+x)^n \geq 1 + nx$ Vera per $x \geq -1$
Disuguaglianza di Bernoulli

Quindi

$a^n \geq 1 + (a-1)n$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$ se $a > 1$
per confronto

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ per ogni $a \in [0, 1)$ $\rightarrow$ Tabellina

Infatti posso scrivere $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ (infatti $b = \frac{1}{a}$)

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^n} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$

Basta osservare che

$n! \geq n$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{7} = 1$ $[\sqrt[n]{7} = 7^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7^0 = 1]$

Provo a dimostrarlo con Bernoulli

$(1+x)^n \geq 1+nx$ Elevo alla $\frac{1}{n}$: $(1+x) \geq \sqrt[n]{1+nx}$

Volei che fosse $1+nx = 7$, quindi scelgo $x = \frac{6}{n}$. Ho quindi

segue da $\sqrt[n]{7} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

segue da Bernoulli con $x = \frac{6}{n}$

$$\boxed{1} \leq \sqrt[n]{7} \leq \boxed{1 + \frac{6}{n}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$, quindi $\frac{6}{n} \rightarrow 6 \cdot 0 = 0$, quindi $1 + \frac{6}{n} \rightarrow 1 + 0 = 1$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$ $\rightarrow$ Tabellina

Stessa dim. di sopra: provare a rifare.

Achtung! In tutte queste formule con il parametro a , si intende che a è un NUMERO (cioè non dipende da n).

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 10n) = +\infty$

$\underbrace{n^3}_{+\infty} + \underbrace{10n}_{10 \cdot (+\infty)} \rightarrow [+\infty + \infty] = +\infty$ (applicazione di vari teoremi algebrici)

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 10n) = +\infty$

$n^3 - 10n \rightarrow [+\infty - \infty]$ Formula indeterminata
Chi vince?

$n^3 - 10n = \underbrace{n}_{+\infty} \cdot \underbrace{(n^2 - 10)}_{+\infty} = +\infty$

Achtung!!!! Forma indeterminata non vuol dire che il limite non esiste (tipo $\frac{0}{0}$). Vuol dire che i vari termini coinvolti "se la giocano" e bisogna trovare un procedimento per stabilire chi vince.

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 7n + 5}{n^2 + 3} \quad \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty + 3} \right]$

Raccolgo n^2 sopra e sotto. Diventa:

$$\frac{\cancel{n^2} \left(2 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{2 - \boxed{\frac{7}{n}} + \boxed{\frac{5}{n^2}}}{1 + \boxed{\frac{3}{n^2}}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 7 \sin n) = +\infty$

Confronto a 2: $\boxed{n - 7 \sin n} \geq \boxed{n - 43}$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \quad +\infty$

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Come si dimostra? $-1 \leq \sin n \leq 1$

Divido per n impunemente essendo $n > 0$ definitivamente

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \boxed{\frac{\sin n}{n}} \leq \boxed{\frac{1}{n}} \quad \text{condizioni}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

Esempio 12 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n! - n^2 + 7^n)}{\sqrt{n} - 5} = 0$

Stesso motivo di prima: $-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1$, quindi (perché?)

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{n} - 5}} \leq \boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{\sqrt{n} - 5}} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n} - 5}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

Esempio 13 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3n} - \sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{20n}} = \left[\frac{+\infty - \infty}{+\infty + \infty} \right] = \sqrt{3}$

Analisi brutale

$$\sim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{3}$$

Rigoroso: raccolgo $\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{3n} - \sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{20n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{n}} \right)}{\cancel{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[6]{n}} \right)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{6}}$$

PRECORSO!!

Esempio 14 $\sqrt{n} - \cos(n^2) \cdot \sqrt[4]{n}$

Raccolgo $\sqrt{n}$: $\sqrt{n} \left(1 - \cos(n^2) \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \right) =$

$$= \boxed{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\cos(n^2)}{\sqrt[4]{n}} \right) \rightarrow +\infty$$

$-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1$ divido per $\sqrt[4]{n} \dots$

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \leq \frac{\cos(\text{Mostro})}{\sqrt[4]{n}} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}$$