

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 012

Titolo nota

02/11/2010

Teorema di unicità del limite. Data una successione, allora è possibile uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Inoltre non è possibile che a_n verifichi la ① per 2 valori distinti di l .

Perché?



La successione dovrebbe stare contemporaneamente nei 2 intornoi per valori grandi di n , il che è impossibile.



Se tendesse contemporaneamente a l e a $+\infty$, dovrebbe stare, per valori grandi di n , sia nell' intorno di l , sia sopra M .

— o — o —

Permanenza del segno e derivati. Sono tutti gli enunciati del tipo

- se $a_n \rightarrow +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$
- " " " " $a_n \geq 2010$
- " $a_n \rightarrow -\infty$, allora definitivamente $a_n \leq -2010$
- se $a_n \rightarrow l$, allora " $a_n \leq l$



definitivamente a_n sta tra 17.5 e 18.5, quindi di sicuro ≤ 19 .

— o — o —

Esempio 1 Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Cosa devo dimostrare? Che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definitivamente. Distinguiamo 2 casi:

- se $M < 0$, allora $n^2 \geq M$ è vera sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $n^2 \geq M$ è vera $\forall n \geq \sqrt{M}$, cioè da $\sqrt{M}$ in poi, cioè definitivamente.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Cosa devo dimostrare? Che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $\sqrt{n} \geq M$ definitivamente.

Distinguo 2 casi:

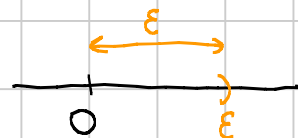
- se $M < 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora posso elevare al quadrato impunemente (sto applicando $f(x) = x^2$, che è strett. crescente per $x \geq 0$) e ottengo $n \geq M^2$, che è vera definitivamente

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$ per ogni $a > 0$ → TABELLINA

La dimostrazione è la stessa che abbiamo fatto per $a=2$ e $a=\frac{1}{2}$.
... devo risolvere $n^a \geq M$. Questa è

- sempre vera se $M < 0$
- vera per $n \geq M^{1/a}$, cioè definitivamente, se $M \geq 0$.

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, anzi 0^+ .



Cosa devo dimostrare? Che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente.
vera $\forall n \geq 1$, quindi definitivamente.

Esamino $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Questa è vera $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, cioè definitivamente

(Oss. Più salgo e piccolo, cioè vicino a 0, più $\frac{1}{\varepsilon}$ è grande, quindi più il "definitivamente" parte tardi)

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+$ per ogni $a < 0$ → TABELLINA

Come fatto nel caso $a = -1$, ci si riduce a risolvere $n^a \leq \varepsilon$ e questa è vera per ogni $n \geq \varepsilon^{\frac{1}{a}}$

(Nota bene: l'inversione dei versi è dovuta al fatto che l'esponente è negativo: vedi il caso $a = -1$).

STRUMENTI PER IL CALCOLO DEI LIMITI Permettono di calcolare i limiti senza passare attraverso la definizione (cioè $M, \varepsilon, \dots$)

- Teoremi di confronto
- Teoremi algebrici

Teorema di confronto a 2 Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora

- se $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$
- se $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$.

Achtung! Ogni altra implicazione è ABUSIVA.

Supponiamo per esempio che $b_n \rightarrow 4$. Cosa può fare a_n ?

Almeno 3 cose: 1 - $a_n \rightarrow -\infty$

2 - $a_n \rightarrow l \leq 4$

3 - a_n può essere indeterminata

Teorema di confronto a 3 (teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni. Supponiamo che

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

e supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R} \quad (\text{tipo II})$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$ (stesso l di sopra)

(Brutalmente: se i 2 laterali hanno lo stesso limite (reale), allora anche il centrale è di tipo II ed ha lo stesso limite).

— o — o —

Retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Se dico $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, in un solo simbolo riassumo i casi $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$.

Teoremi algebrici Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che $a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$, $b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Allora

$$(a_n + b_n) \rightarrow l_1 + l_2$$

$$(a_n - b_n) \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$[a_n]^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2}$$

TRANNE

- nelle 7 forme indeterminate

$$\boxed{+\infty - \infty}$$

$$\boxed{0 \cdot \pm\infty}$$

$$\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$$

$$\boxed{0^0}$$

$$\boxed{1^{\pm\infty}}$$

$$\boxed{\infty^0}$$

in cui non si può dire nulla (vedi commenti successivi)

- Quando al denominatore c'è 0 (")

Osservazione Le operazioni si estendono in modo ovvio a $\bar{\mathbb{R}}$.

$$7 + \infty = +\infty$$

$$7 - (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{12}{+\infty} = 0$$

$$12 - \infty = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{-3} = +\infty$$