

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 011

Titolo nota

02/11/2010

SUCCESSIONI

Una successione di numeri reali è una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. In genere si indica a_n invece di $a(n)$.

In maniera più elastica si definisce successione una qualunque a_n che sia definita almeno da un certo valore di n in poi.

Esempi $a_n = n^2 - 3n$ (ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa un elem. di $\mathbb{R}$)

$$b_n = \frac{1}{n-5}$$

Non è vero che associa un reale ad ogni $n \in \mathbb{N}$ (perché $n=5$ non va bene). Quindi va bene almeno $\forall n \geq 6$, quindi è succ. nel senso della def. elastica.

$$c_n = \sqrt{n-2010}$$

Va bene $\forall n \geq 2010 \Rightarrow$ OK nel senso elastico

$$d_n = \sqrt{100^{100} - n}$$

Non è una successione, perché non è definita per ∞ valori di n

Terminologia Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$.

- Si dice che P_n vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo valore di n in poi, cioè se $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ b.c. P_n è vera $\forall n \geq m_0$
- Si dice che P_n vale FREQUENTEMENTE se vale per infiniti valori $n \in \mathbb{N}$, cioè (equivalentemente) se $\forall M \in \mathbb{R} \exists n \geq M$ b.c. P_n è vera.

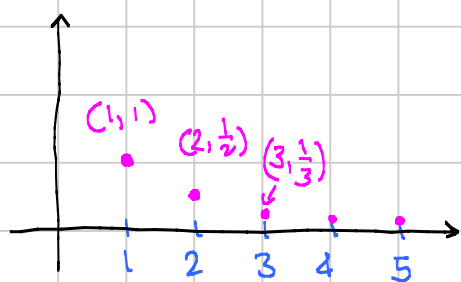
Esempi ① L'espressione $\log_7(3n-7000)$ rappresenta un numero reale definitivamente (appena $n > \frac{7000}{3}$)

② $70 + (-3)^n > 0$ sempre: NO definitivamente: NO
frequentemente: SI (sicur. per n pari)

Rappresentazioni di una successione

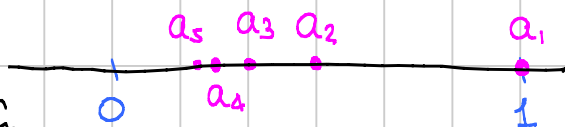
1° modo: nel piano cartesiano. Fare il "grafico", cioè disegnare i p.ti di coordinate (n, a_n)

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$



2° modo: sulla retta.

Disegnare punti corrispondenti ai valori della successione



3° modo: lampadine. Pensiamo alla retta, e al tempo $t = n$ si accende una lampadina nel punto a_n , e questa resta accesa per 1 secondo.

LIMITI DI SUCCESSIONI Una successione ha 4 possibili comportamenti

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$a_n \rightarrow +\infty$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

$a_n \rightarrow -\infty$

④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ Non esiste

a_n è INDETERMINATA

Volendo ① ammettere 2 sottocasi

①⁺ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$ ($a_n \rightarrow l^+$)

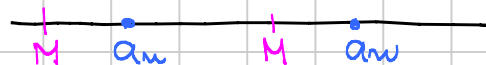
①⁻ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^-$ ($a_n \rightarrow l^-$)

Achtung! I limiti di successione si fanno SOLO per $n \rightarrow +\infty$.

Definizioni di limite

Def. di 4: Nessuno dei precedenti, cioè una successione è indeterminata se non tende ad un numero reale, non tende a $+\infty$ e non tende a $-\infty$.

Def. di 2 Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ (oppure con l'altra notazione) se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
 $a_n \geq M$ definitivamente



(Moralmente: più scelgo M grande, più la successione ci metterà tempo a superarlo, ma definitivamente lo farà)

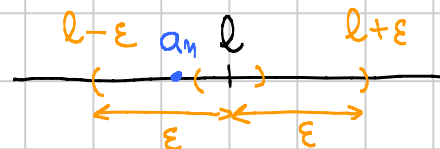
Achtung! Una successione può tendere a $+\infty$ senza essere definitivamente monotona. Esempio:
 $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, \dots$

Def. di 3 Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)
 $a_n \leq M$ definitivamente

Def. di 1 Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se
(intuitivamente: per tempi grandi le lampadine si accendono molto vicino al valore l)

$\forall \varepsilon > 0$ (anche vicino a 0)

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente



Varianti di 1. Si dice che

• $a_n \rightarrow l^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ si ha $l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente

• $a_n \rightarrow l^-$ se $\forall \varepsilon > 0$ " " $l - \varepsilon \leq a_n < l$ " "

Esempi (a livello intuitivo)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ anzi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\downarrow} = \text{non esiste}$$

Successione $+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$

Achtung ① Se $a_n \rightarrow l$, si ha per forza $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$?
NO!

Esempio: $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Questa tende a 0, ma né a 0^+ , né a 0^- .

② Se $a_n \rightarrow 0^+$, è vero che a_n è definitivamente decrescente? NO!

