

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE

Titolo nota

30/10/2010

Funzioni trigonometriche e loro inverse

$\sin x$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- DISPARI [$\sin(-x) = -\sin x$: precorso!]
- PERIODICA di periodo minimo 2π [$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$]
- non iniettiva e non surgettiva

Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

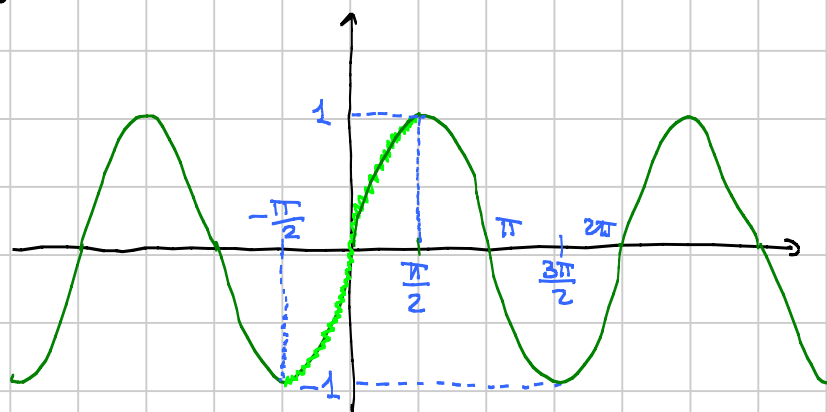
diventa

- iniettiva e surgettiva
- strett. crescente.

La sua inversa è una

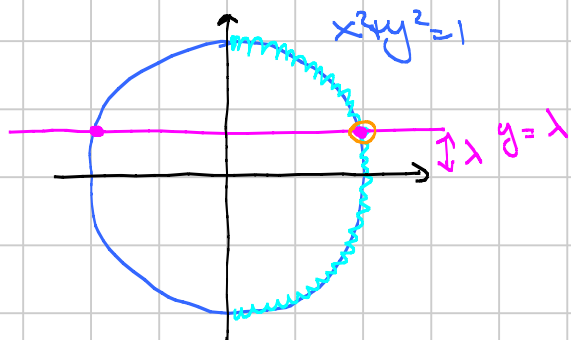
funzione $g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è

$$g(x) = \arcsin x$$



Achtung! $\arcsin x$ prende in INPUT valori in $[-1, 1]$ e restituisce valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Interpretazione sulla circonferenza trigonometrica

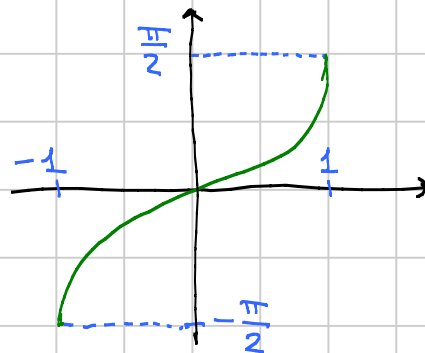


Dato un numero $\lambda \in [-1, 1]$, cosa vuol dire calcolare $\arcsin \lambda$?

Vuol dire

- tracciare la retta $y = \lambda$
- intersecare con la circonferenza
- considerare l'intersezione tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$
- l' $\arcsin \lambda$ è l'arco corrispondente all'unica intersezione in quella zona.

Grafico di $\arcsin x$
(si tratta di una funzione
DISPARI)



— o — o —

cos x

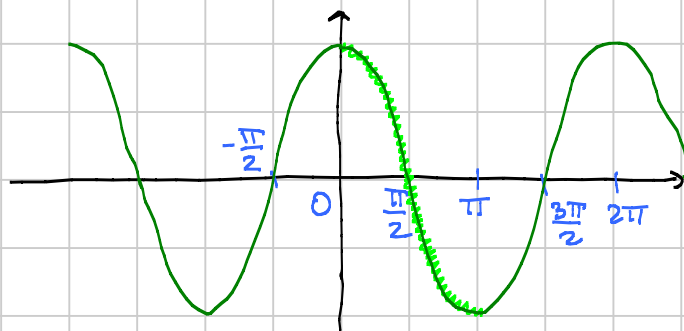
Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- PARI e PERIODICA di periodo minimo 2π
- non iniettiva e non surgettiva

Vista come

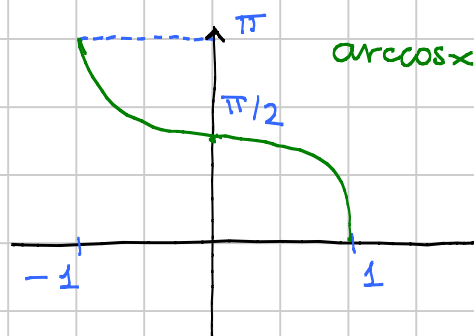
$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

è iniettiva, surgettiva,
strett. decrescente.

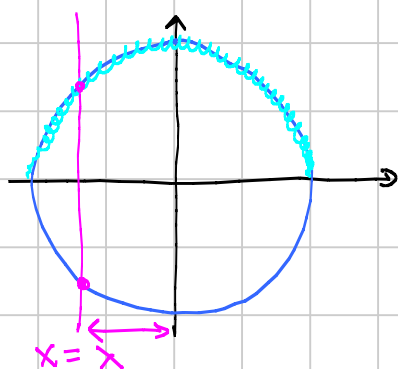


La sua inversa $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ è $g(x) = \arccos x$

Grafico:

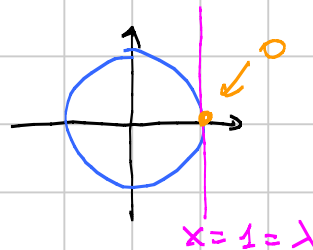
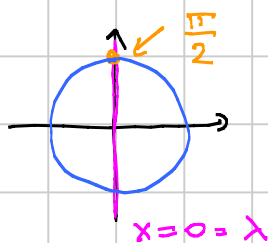
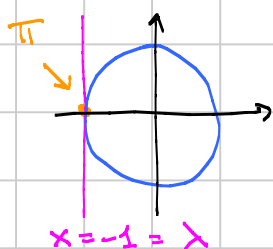


Interpretazione nella circ. trigonometrica



Dato $\lambda \in [-1, 1]$, calcolare $\arccos \lambda$ vuol dire

- tracciare la retta $x = \lambda$
- determinare le 2 intersezioni
- Scegliere quella in $[0, \pi]$
- $\arccos \lambda$ è l'arco corrispondente all'intersezione buona.



— o — o —

$\tan x$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è nemmeno definita...
ci sono problemi in tutti gli x del tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vista con $f: \mathbb{R} \setminus \{p.t. \text{ del tipo } \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ risulta

- DISPARI e PERIODICA di periodo minimo π
- non iniettiva, ma surgettiva.

Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

è dispari, strett. cresc.,
iniettiva e surgettiva.

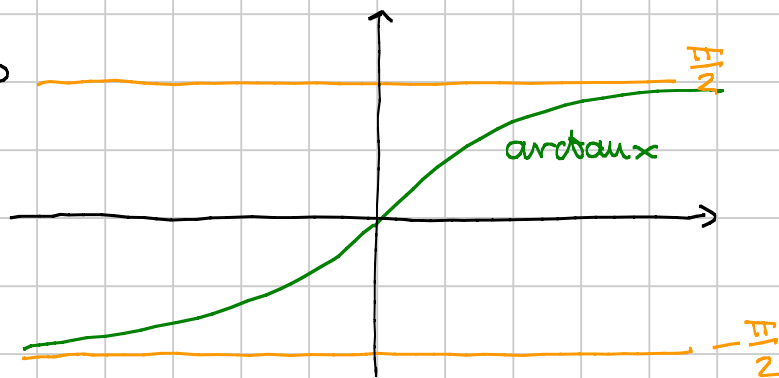
L'inversa

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$e' \quad g(x) = \arctan x$$

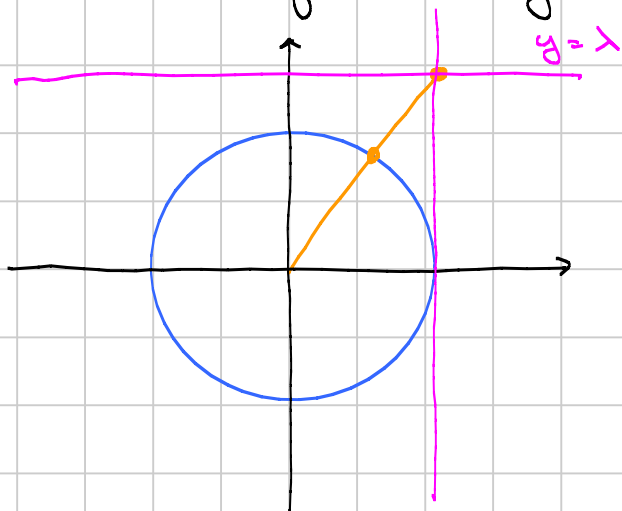
(in INPUT: tutti i reali, in OUTPUT: roba in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

Grafico



È una funzione
dispari

Nella circonferenza trigonometrica



Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, cosa vuol dire fare $\arctan \lambda$?

- Traccio la retta $y = \lambda$
- Interseco con $x = 1$
- Unisco con l'origine e interseco con la circ. trigonometrica
- L'arco corrispondente è $\arctan \lambda$

Esercizio

$$\arccos(\cos 4) = 4 \quad \text{F}$$

$$\arccos(\cos 3) = 3 \quad \text{V}$$

$$\arccos(\cos 2) = 2 \quad \text{V}$$

$$\arccos(\cos 1) = 1 \quad \text{V}$$

$$\arcsin(\sin 4) = 4 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 3) = 3 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 2) = 2 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 1) = 1 \quad \text{V}$$

$$\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{V}$$

$$\cos(\arccos 2) = 2 \quad \text{F}$$

$$\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{V}$$

$$\sin(\arcsin 2) = 2 \quad \text{F}$$

Una funzione e la sua inversa "si semplificano" nei rispettivi insiemi di partenza / arrivo.

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

cioè l'insieme di partenza della restrizione di $\sin x$ che ha come inversa $\arcsin x$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

↓ partenza restrizione del coseno

Analogamente : $\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Esercizio : capire quanto valgono i casi in cui sopra era falsa, cioè quanto valgono

$$\arccos(\cos 4)$$

oppure

$$\arcsin(\sin 2)$$