

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 009

Titolo nota

30/10/2010

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Definizione di estremo superiore

- Se A non è limitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$
- Se A è limitato superiormente, si pone $\sup A = \text{minimo dei maggioranti}$

Definizione di estremo inferiore

- Se A non è limitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$
- Se A è limitato inferiormente, si pone $\inf A = \text{massimo dei minoranti}$

Esempio 1 $A = [0, 1)$ I maggioranti sono tutti i $b \geq 1$.

Quindi $\sup A = \text{minimo dei maggioranti} = 1$.

Tuttavia non è il massimo

I minoranti sono tutti i $b \leq 0$, quindi $\inf A = \text{max dei minor.} = 0$

Brutalmente: il $\sup$ è un surrogato del $\max$, quando il $\max$ non esiste

Esempio 2 $B = \mathbb{N}$ (visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$).

$\sup B = +\infty$ perché non esistono maggioranti

$\inf B = 0$ perché i minoranti sono tutti i $b \in \mathbb{R}$ con $b \leq 0$.

TEOREMA Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono sicuramente (finiti o infiniti)

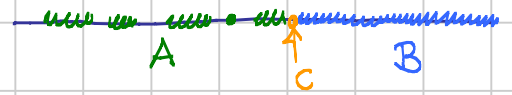
Dim. Dimostriamo un solo caso, cioè che se A è limitato superiormente, allora esiste il minimo dei maggioranti.

Consideriamo l'insieme B costituito da tutti i maggioranti di A .

Per definizione di maggiorante, abbiamo che A sta tutto a sx di B .

Per l'assioma di continuità, esiste

$c \in \mathbb{R}$ tale che



(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante di A)

(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (cioè c è + piccolo di tutti i maggior.)

Quindi c è un maggiorante che è più piccolo di tutti gli altri maggioranti. Quindi c è il minimo dei maggioranti.

— o — o —

Quindi l'assioma di continuità implica che $\inf$ e $\sup$ esistono per forza.

Osservazioni ① $\sup$ e $\inf$ esistono sempre (finiti o infiniti)

② Sono sempre unici

③ Se esiste $M = \max A$, allora è anche $M = \sup A$
 " " $m = \min A$, " " " $m = \inf A$

④ $\sup A$ non è obbligato a stare in A (anche quando $\sup A$ è finito). Se succede che $\sup A \in A$, allora il $\sup$ è anche $\max$.

Discorso analogo per il minimo.

— o — o —

Esempi

Insieme	$\inf$	$\sup$	$\min$	$\max$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.
$\mathbb{Q}$	"	"	"	"
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0, 4)$	0	4	N.E.	N.E.
$(0, 4] \cup \{7\}$	0	7	N.E.	7
$[0, 4) \cup [7, 8]$	0	8	0	8
$\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 3\}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	N.E.	N.E.

Caratterizzazione di sup e inf.

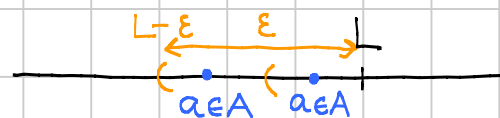
- ① $\sup A = +\infty$ se e solo se
 $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ b.c. $a \geq M$

[Gioco al rilancio: fisso M (anche enorme) e A trova un elemento più grande]

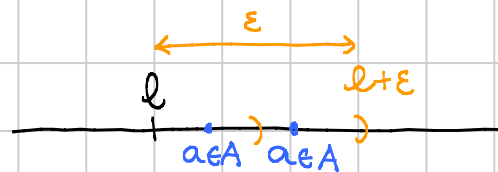


- ② $\inf A = -\infty$ se e solo se
 $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ b.c. $a \leq M$ (il gioco si sposta sull'enorme mente negativo)

- ③ $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se e solo se
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ b.c. $a \geq L - \varepsilon$



- ④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se e solo se
(i) $a \geq l \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ b.c. $a \leq l + \varepsilon$



Esempio 1

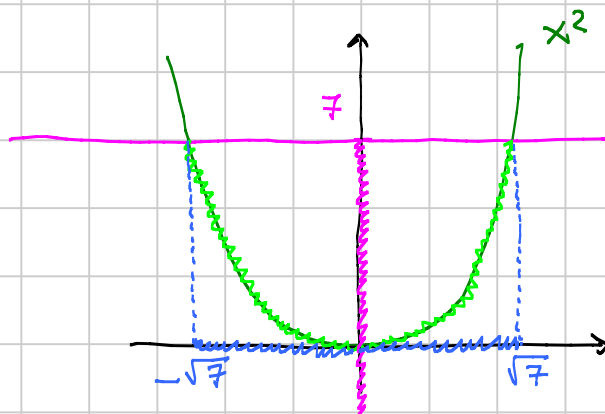
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 7\} \\ = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$$

(Per proprietà)

$$\sup A = \max A = \sqrt{7}$$

$$\inf A = \min A = -\sqrt{7}$$

"Mondo x ", cioè l'insieme è rappresentato sull'asse delle x .



Volendo l'insieme A è la controimmagine di $(-\infty, 7]$, cioè
cerco i valori $x \in$ insieme di partenza $= \mathbb{R}$ tali che
 $f(x) \in (-\infty, 7]$

Esempio 2

$$B = \{ x^2 : x \leq 7 \} \quad (\text{per elenco})$$

$$\inf B = 0$$

$$\min B = 0$$

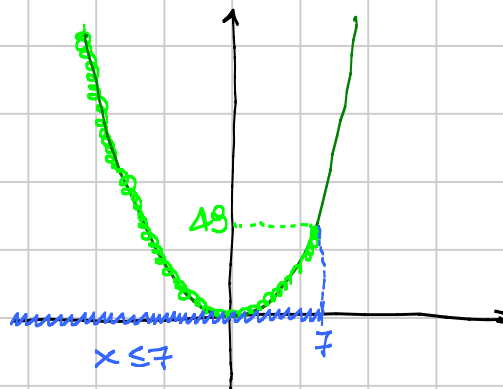
$$\sup B = +\infty$$

$$\max B = \text{N.E.}$$

"Mondo y ", cioè si considerano i valori assunti dalla funzione $f(x) = x^2$ quando x varia in $(-\infty, 7]$

I valori assunti dalla funzione sono tutti gli $y \in [0, +\infty)$

È l'immagine di $(-\infty, 7]$.



— o — o —