

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 008

Titolo nota

30/10/2010

NUMERI REALI

$\mathbb{R}$

Proprietà: $\rightarrow$ algebriche

$\rightarrow$ ordinamento

$\rightarrow$ assioma di continuità

Proprietà algebriche. Su $\mathbb{R}$ sono definite 2 operazioni: somma e prodotto con queste proprietà:

$$(S1) \quad a+b = b+a$$

$$(S2) \quad a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$(S3) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0 = a$$

$$(S4) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a+b = 0$$

(si indica $b = -a$) $\uparrow$ no in $\mathbb{N}$

$$(P1) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(P2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(P3) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$$

$$(P4) \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 1$$

(si indica $b = \frac{1}{a}$) $\leftarrow$ no in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

Cometto dopo video: vale anche in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, $\uparrow$ of course ... ①

$\leftarrow$ no in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

$$(D) \quad a(b+c) = ab+ac$$

Proprietà di ordinamento Dati $x \in \mathbb{R}$ ed $y \in \mathbb{R}$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. L'ordinamento ha 3 proprietà

$$(O1) \quad x \leq x$$

$$(O2) \quad \text{Se } x \leq y \text{ e } y \leq z, \text{ allora } x \leq z$$

$$(O3) \quad \text{Se } x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{ allora } x = y$$

L'ordinamento è legato alle operazioni algebriche da 2 proprietà

$$(OA1) \quad \text{Se } x \leq y, \text{ allora } x+z \leq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

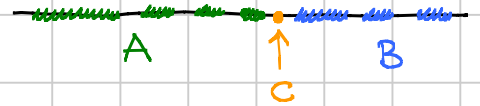
$$(OA2) \quad \text{Se } x \leq y, \text{ allora } x \cdot z \leq y \cdot z \quad \text{per ogni } z \geq 0$$

$$(OA2') \quad \text{Se } x \leq y, \text{ allora } x \cdot z \geq y \cdot z \quad \text{per ogni } z \leq 0$$

Oss. Finora nulla distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$.

Assioma di continuità Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Supponiamo che A "sta a sinistra" di B , cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$



Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \quad \forall a \in A$$

$$c \leq b \quad \forall b \in B$$

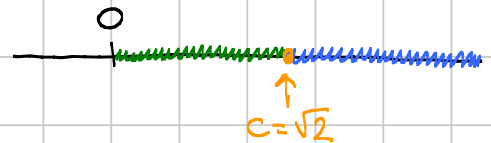
Osservazioni ① c non è obbligato ad essere unico

② L'intersezione $A \cap B$ potrebbe non essere vuota. Se non è vuota, allora contiene un elemento, e questo elemento è proprio c .

Osservazione importante L'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non vale in $\mathbb{Q}$. Prendiamo per esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$



Allora A sta a sinistra di B (precorso)

In $\mathbb{R}$ c'è un c che sta in mezzo. Questo "ovviamente" verifica $c^2 = 2$, quindi $c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$. Quindi in $\mathbb{Q}$ non c'è nessun elemento tra A e B , in $\mathbb{R}$ sì.

Le proprietà algebriche e di ordinamento si usano (senza accorgersene) risolvendo equazioni e disequazioni.

$$3x + 2 = 7 \quad \text{Aggiungo } -2 \text{ a dx e sx}$$

$$3x + 2 - 2 = 7 - 2$$

$$3x + (2 - 2) = 5$$

$$3x + 0 = 5$$

$$3x = 5$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Uso proprietà associativa

↳ Definizione di -2

↳ Proprietà dello 0

↳ Moltiplico per $\mathbb{Q}$ inverso di 3

↳ Lavoro ancora un po'

MASSIMO E MINIMO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive

$$M = \max A$$

se

$$(i) a \leq M \quad \forall a \in A$$

$$(ii) M \in A.$$

Analogamente $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di A e si scrive $m = \min A$ se

$$(i) m \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(ii) m \in A.$$

Osservazioni ① M ed m non sono obbligati ad esistere

② Quando esistono, sono unici

Esempi

$$A = [0, 1)$$

$\min A = 0$, $\max A$ non esiste

$$B = \mathbb{N}$$

$\min B = 0$, $\max B$ non esiste

$$C = \mathbb{Z}$$

$\min C$ non esiste, $\max C$ non esiste

— 0 — 0 —

MAGGIORANTI E MINORANTI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Si dice che $b \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$b \geq a \quad \forall a \in A \quad (b \text{ è + grande di tutti gli elementi di } A)$$

Analogamente, $b \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$b \leq a \quad \forall a \in A \quad (b \text{ è + piccolo di tutti gli el. di } A)$$

Osservazioni ① Maggioranti e minoranti non sono obbligati ad esistere

② Quando esistono, non sono mai unici

Esempi

$$A = [0, 1)$$

I minoranti sono tutti i numeri reali

I maggioranti ~ ~ ~ ~

occhio all' =

$$b \leq 0$$

$$b \geq 1$$

$$B = \mathbb{N}$$

Minoranti: tutti i $b \leq 0$

Maggioranti non ne esistono

$$C = \mathbb{Z}$$

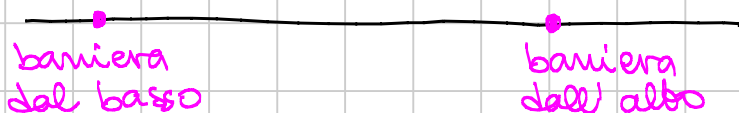
Non esistono né maggioranti, né minoranti

Osservazione Quando $\max A$ esiste, questo a sua volta è un maggiorante (ed è il più piccolo).
Analogo discorso per il minorante.
— o — o —

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice

- limitato superiormente se ammette un maggiorante (quindi ne esistono infiniti),
- limitato inferiormente se ammette un minorante,
- limitato se è limitato sia super, sia infer.

Esempio $A = (2, 7)$ è limitato inferiormente e superiormente, ma non ammette né max, né min



Osservazione $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c.
 $|a| \leq b \quad \forall a \in A$

(Percorso: vuol dire che tutti gli $a \in A$ stanno tra $-b$ e b .)