

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 007

Titolo nota

28/10/2010

Esempio 1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

Passo base $n=1 \quad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \text{ok}$

Passo induttivo Ipotesi: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $2(n+1)+1$
↓

Tesi: $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Dim. $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{\text{uso ipotesi}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] = (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo ho la tesi.
— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Passo base $n=0 \quad 2^0 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad 1 \geq 0 \quad \text{ok}$

Passo induttivo Ipotesi: $2^n \geq n$ Tesi: $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. $2^{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{2} \cdot 2^n \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ipotesi}}}{2n} \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero che sia} \\ \text{vera}}}{n+1}$

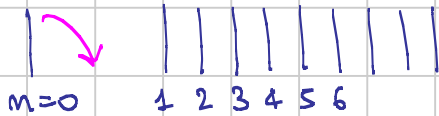
Se la speranza è vera, ho realizzato una "catena di disuguaglianze", in cui il 1° è $\geq$ dell'ultimo, il che sarebbe la tesi.

Resta da esaminare la speranza, cioè il fatto che $2n \geq n+1$.

Questa è vera se e solo se $n \geq 1$.

Questo ci dice che il passo induttivo, cioè il meccanismo di caduta, funziona solo da $n=1$ in poi.

Quindi siamo in questa situazione:



Per concludere devo dimostrare separatamente il caso $n=1$

Secondo passo base $n=1$ $2^1 \geq 1$ Ok.
— o — o —

Esempio 3 Determinare per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che
 $4^n \geq 2^n + 3^n$

Proviamo un po' di valori:

$$n=0 \quad 4^0 \geq 2^0 + 3^0 \quad \text{FALSA!}$$

$$n=1 \quad 4^1 \geq 2^1 + 3^1 \quad \text{FALSA!}$$

$$n=2 \quad 4^2 \geq 2^2 + 3^2 \quad 16 \geq 13 \quad \text{Ok}$$

$$n=3 \quad 4^3 \geq 2^3 + 3^3 \quad 64 \geq 8 + 27 \quad \text{Ok e abbondante}$$

Congettura: la disuguaglianza vale $\forall n \geq 2$.

Provo a dim. per induzione.

Passo base $n=2$ $4^2 \geq 2^2 + 3^2$ Ok, già fatto

Passo induttivo Ipotesi: $4^n \geq 2^n + 3^n$ Tesi: $4^{n+1} \geq 2^{n+1} + 3^{n+1}$

$$\text{Dim: } 4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot (2^n + 3^n) = 4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n$$

↑ ↑ ↑
precorso uso ipotesi precorso

$$\begin{aligned} &\text{al posto di 4 metto } \rightarrow \geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\ &2 \text{ e } 3 \text{ a seconda dei casi} \quad = 2^{n+1} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo abbiamo la tesi.

— o — o —

Nota all'esempio precedente: nel passo induttivo non sono venute
già condizioni su n . Quindi le lettere sono tutte vicine



compresa la P_0 e la P_1 . Il problema è che la P_0 e la P_1 sono
bloccate, cioè non cascano

— o — o —

FATTORIALE

$$n! = \text{fattoriale di } n \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Per definizione
 $0! = 1$

Tabellina: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$

Definizione ricorsiva

- $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$[(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}_{n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)]$$

— o — o —

Esempio 4 Determinare per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che
 $n! \geq 2^n$

Proviamo un po' di valori:

$n=0$	$0! \geq 2^0$	$1 \geq 1$	VERA
$n=1$	$1! \geq 2^1$	$1 \geq 2$	FALSA
$n=2$	$2! \geq 2^2$	$2 \geq 4$	FALSA
$n=3$	$3! \geq 2^3$	$6 \geq 8$	FALSA
$n=4$	$4! \geq 2^4$	$24 \geq 16$	VERA
$n=5$	$5! \geq 2^5$	$120 \geq 32$	VERA e abbondante

Congettura: $n! \geq 2^n$ è vera per $n=0$ e poi $\forall n \geq 4$

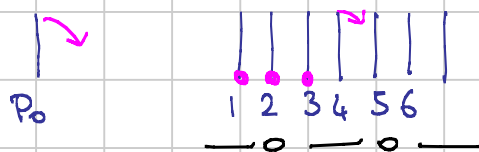
Passo base $n=4$ --- ok

Passo induttivo Ipotesi: $n! \geq 2^n$ Tesi: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim.: $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\uparrow$ def. ric. di fattoriale $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ speranza $\uparrow$ percorso

Quando è vera la speranza? $n+1 \geq 2$ vera per $n \geq 1$



Esempio 5 Disuguaglianza di BERNOLLI
 $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1.$

Passo base $n=0 \quad (1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x \quad 1 \geq 1 \quad \text{ok.}$

Passo induttivo Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$. Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) =$

$\uparrow$ percorso $\uparrow$ uso ipotesi

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$
$$\geq 1 + (n+1)x$$

$\uparrow$ Ho tolto nx^2 : se in una somma tolgo un addendo ≥ 0 ottengo una somma più piccola

Confrontando 1° e ultimo ho la tesi.

Passaggio cruciale. Sapendo che $(1+x)^n \geq 1+nx$, ho dedotto che

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$$

Questo vale solo se ho moltiplicato per roba ≥ 0 , cioè se e solo se $1+x \geq 0$, cioè $x \geq -1$.

— o — o —