

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 006

Titolo nota

28/10/2010

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Insiemi numerici:

$\mathbb{N}$ = numeri naturali = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N} \rightarrow$ naturali

$\mathbb{Z}$ = interi relativi = $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

$\mathbb{Z} \rightsquigarrow$ Zahlen = numeri

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = $\left\{ \text{frizioni } \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

$\mathbb{Q} \rightsquigarrow$ quozienti

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{R} \rightarrow$ reali

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

$\mathbb{C} \rightarrow$ complessi

Ovviamente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$2 \in \mathbb{R}$ VERA $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}$

$-2 \in \mathbb{C}$ VERA

— o — o —

Il principio di induzione riguarda proprietà dei numeri naturali.

Sia P_n una proprietà che riguarda $\mathbb{N}$, cioè un'affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$, e che a seconda del valore di n può essere VERA o falsa.

Esempi: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$n^2 > 7n + 2$$

Principio di induzione Supponiamo che

(i) P_0 è vera (se sostituisco $n=0$, funziona) PASSO BASE

(ii) P_n VERA $\Rightarrow P_{n+1}$ VERA (se è vera per un certo intero, allora è vera per il successivo)
PASSO INDUTTIVO

Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

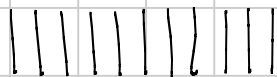
Brutalmente, perché funziona? P_0 è vera per la (i)

Se P_0 è vera, allora è vera P_1 (grazie alla (i)) con $n=0$

" P_1 " " " " P_2 " " " $n=1$

" P_2 " " P_3 ...

Descrizione alternativa: tessere del domino che cascano in sequenza



(i) La 0-esima tessera (la 1a) cade

(ii) Le tessere sono disposte in maniera ravvicinata: se cade una, allora cade anche la successiva.

Allora cadono tutte.

Variante Supponiamo che (i) P_{77} è VERA

(ii) P_n VERA $\Rightarrow P_{n+1}$ VERA (sott: $\forall n \in \mathbb{N}$)

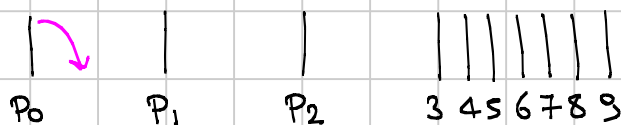
Allora P_n è vera $\forall n \geq 77$.

Variante più pericolosa Supponiamo che

(i) P_0 è vera

(ii) $\forall n \geq 3$ si ha P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ VERA

Allora P_0 è VERA, ma delle altre non posso dire nulla



Se voglio ottenere qualcosa, devo dimostrare che P_3 è VERA: così
innesco il meccanismo di caduta.

Esempio 1 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Passo base $n=1 \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \text{OK}$

Passo induttivo Ipotesi: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Tesi: $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
stessa formula con $(n+1)$ al posto di n

Dim. $1 + 2 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + \dots + n] + (n+1)$

uso Ipotesi $\rightarrow = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

Precorso $\rightarrow = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

In particolare ho costruito una "catena di uguaglianze" in cui il 1° è uguale all'ultimo, il che è proprio la tesi.

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(si intende che a è un parametro $a \neq 1$)

PASSO BASE $n=0 \quad 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \quad \text{OK.}$

Verifica non richiesta per $n=1$: $1 + a = \frac{a^2 - 1}{a - 1} \quad (= \frac{(a+1)(\cancel{a-1})}{\cancel{a-1}})$

PASSO INDUCTIVO Ipotesi: $1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

Tesi: $1 + a + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \rightarrow$ stessa, con $(n+1)$ al posto di n

Dim. $1 + a + \dots + a^{n+1} = \underbrace{1 + a + \dots + a^n}_{\text{uso ipotesi}} + a^{n+1}$
 $= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = (\text{Precorso})$
 $= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$

Confrontando il 1° e l'ultimo, abbiamo dim. la tesi.
— o — o —

Esempio 3 Dimostrare che $n+7 < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mi dimentico del passo base...

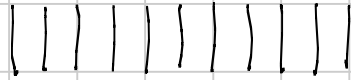
PASSO INDUCTIVO Ipotesi: $n+7 < n$

Tesi: $n+8 < n+1$

Dim. $m+8 = \underbrace{(m+7)}_{\text{uso ipotesi}} + 1 < m+1$

Confrontando il 1° e l'ultimo ho la tesi

In termini di tessere del domino, questo dice che le tessere sono vicine tra di loro, cioè c'è il meccanismo di caduta



Il problema è che nessuna cade (non trovo valori di n da cui far partire la caduta collettiva).

