

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 004

Titolo nota

27/10/2010

Funzioni reali $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Proprietà di simmetria. La funzione f si dice

- **PARI** se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **DISPARI** se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **PERIODICA** se esiste $T > 0$ tale che
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se esiste un minimo $T > 0$ per cui la proprietà di sopra è vera, allora quel T si dice periodo minimo della funzione.

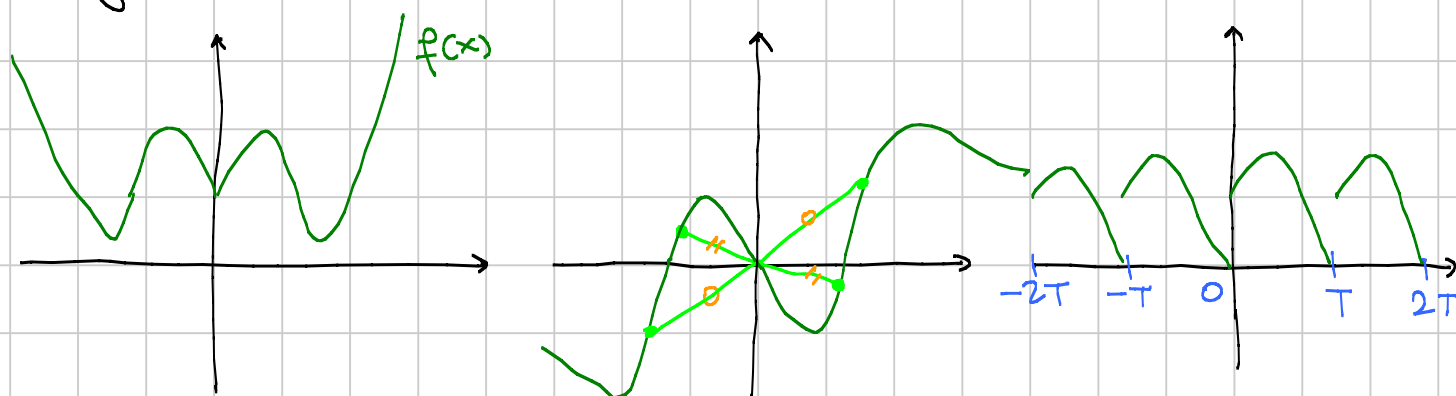
In termini di grafico:

- **PARI** se e solo se grafico simmetrico rispetto asse y
- **DISPARI** " " " " " origine

(Nota bene: un grafico NON può essere simmetrico risp. asse x)

- **PERIODICA** se il pezzo di grafico corrispondente agli $x \in [0, T]$ si ripete poi sempre uguale.

Disegui:



Esercizio Può una funzione essere contemporaneamente pari e dispari? Dovrebbe essere

$$- f(x) = f(-x) = f(x)$$

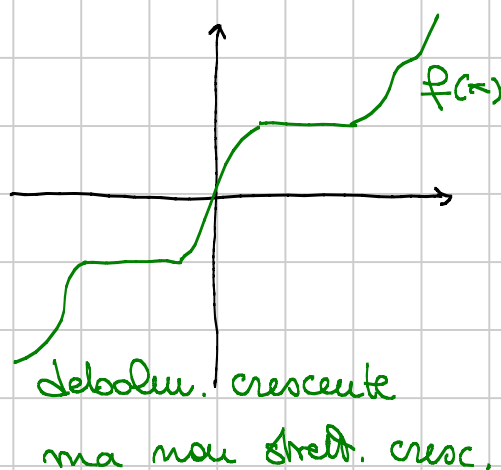
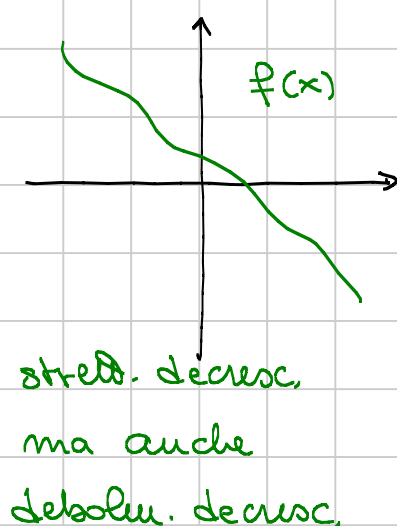
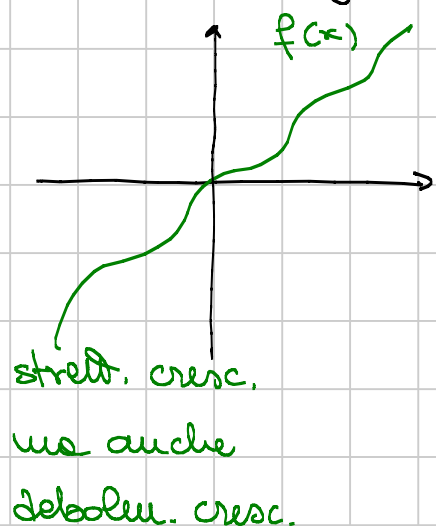
$\uparrow$ $\uparrow$
 f dispari f è pari

Ma allora dovrebbe essere $-f(x) = f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, cioè $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà di MONOTONIA Una funzione $f(x)$ si dice ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

- debolmente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
- strettamente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$
- debolmente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$
- strettamente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

In termini di grafico



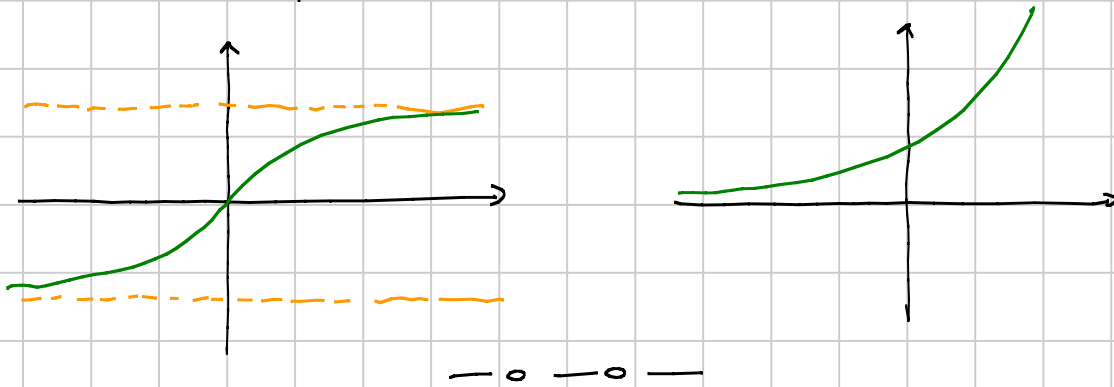
Achtung! Se f è strett. cresc., allora è anche debolm. cresc.
" " decresc., " " " decresc.

Def. Una funzione si dice MONOTONA se ricade in una delle 4 categorie citate sopra.

Fatto importante Le funzioni strettamente monotone (cioè strett. cresc. oppure strett. decrescenti) sono sicuramente INIETTIVE (viste come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

[Dim. Prendo due valori $a_1 \neq a_2$ in partenza. Metto i numeri in modo che $a_1 < a_2$. Allora $f(a_1) < f(a_2)$ se f è strett. cresc.
 $f(a_1) > f(a_2)$ se f è " decresc.

Achtung! le funzioni strett. monotone possono NON essere SURGETTIVE



Monotonia e disequazioni Prendiamo una disequazione del tipo

$$\cancel{f}(\text{Mostro 1}) > \cancel{f}(\text{Mostro 2}) \rightsquigarrow \text{Mostro 1} > \text{Mostro 2}$$

↑
grande
variazione

Dipende dalla monotonia:

① Se f è strett. crescente allora il passaggio si può fare.

Dim. Sappiamo per ipotesi che $f(M_1) > f(M_2)$. Come possono essere messi M_1 ed M_2 ?

- $M_1 < M_2 \rightsquigarrow$ sarebbe $f(M_1) < f(M_2)$ e non va bene
- $M_1 = M_2 \rightsquigarrow$ sarebbe $f(M_1) = f(M_2)$ NO BUONO
- $M_1 > M_2 \rightsquigarrow$ unico caso possibile

(qui ho usato
strett. cresc.)

② Se f è strett. decrescente, allora posso "semplificare la f ", ma devo INVERTIRE IL VERSO della disuguaglianza

$$\cancel{f}(M_1) > \cancel{f}(M_2) \rightsquigarrow M_1 < M_2$$

Dim. Come sopra ho 3 casi

- $M_1 < M_2 \rightsquigarrow$ unico caso possibile
- $M_1 = M_2 \rightsquigarrow$ come sopra $f(M_1) = f(M_2)$ NO
- $M_1 > M_2 \rightsquigarrow f(M_1) < f(M_2)$ perché la strett. decresc. inverte

Achtung! In tutti gli altri casi non è possibile semplificare la f impunemente.

Esempi Se $g(x)$ è strett. crescente ed $f(x)$ è strett. crescente, allora $g(f(x))$ è strett. cresc.

Dim. Prendo $y > x$. Applico f :
 $f(y) > f(x)$ Applico g :
 $g(f(y)) > g(f(x))$

E se fossero entrambe decrescenti?

Prendo $y > x$. Applico f : (invertito perché f è decresc.)
 $f(y) < f(x)$ Applico g : (invertito perché g è decresc.)
 $g(f(y)) > g(f(x))$

La composizione di 2 decrescenti è crescente.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono iniettive, è vero che $g(f(x))$ è iniettiva?

Sì! Prendo $a_1 \neq a_2$ Applico f
 $f(a_1) \neq f(a_2)$ (diversi perché f iniettiva)
Applico g
 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ (diversi perché g iniettiva)