

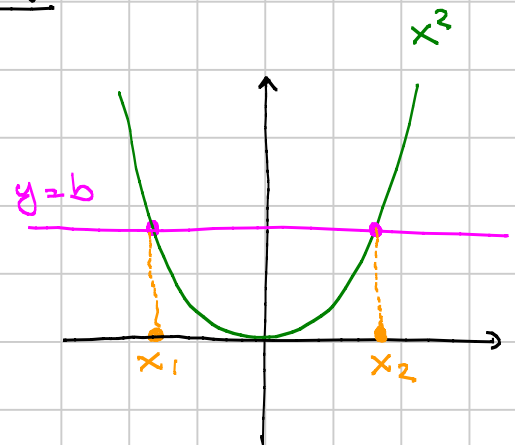
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 003

Titolo nota

26/10/2010

Iniettività, surgettività, grafici, equazioni

Esempio 1 $f(x) = x^2$ che pensiamo come
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Cosa vuol dire risolvere l'equazione

$$f(x) = b$$

vuol dire cercare tutti gli elementi $x \in$ insieme di partenza che vanno a finire in certo $b \in$ insieme di arrivo.

Graficamente: traccio retta $y=b$, interseco con il grafico, ed i valori di x corrispondenti alle intersezioni sono le soluzioni.

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se ogni retta del tipo $y=b$ (parallela all'asse x) interseca il grafico AL MASSIMO una volta (quando ci sono 2 o più intersezioni vuol dire che ci sono 2 o più elementi in partenza che vanno a finire nello stesso)

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se ogni retta del tipo $y=b$ interseca il grafico ALMENO una volta.

È bigettiva se e solo se ogni retta $y=b$ interseca una ed una sola volta il grafico

Esempio 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

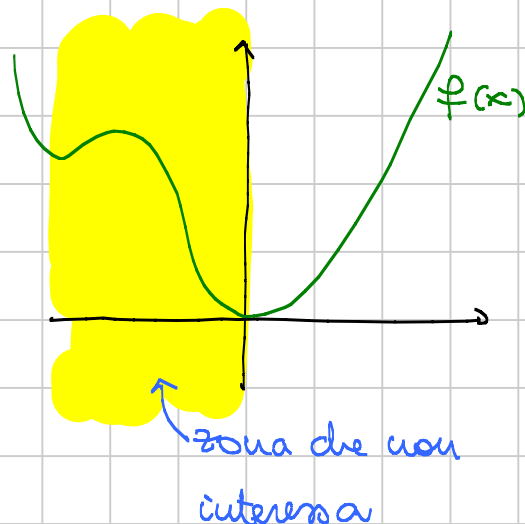
Esistono rette $y = b \geq 0$
che intersecano più di una volta.
Quindi f non è iniettiva



È surgettiva perché tutte le rette $y = b$
con $(b \geq 0 : \text{restrizione imposta dall'insieme di arrivo})$ intersecano
almeno una volta.

Esempio 3 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

È iniettiva perché ogni retta $y = b$
interseca al massimo una volta
nella zona non vietata



Non è surgettiva perché esistono rette $y = b$
che non hanno intersezioni con il grafico
— o — o —
quella con $b < 0$

Iniettività, surgettività ed equazioni

$$\cancel{f}(3x+2) = \cancel{f}(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \Rightarrow x=1$$

↑
grande tentazione

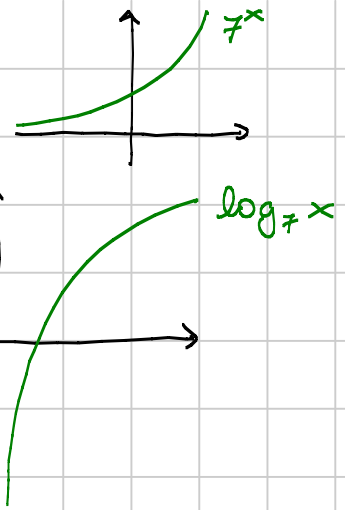
$$\cancel{f}^{3x+2} = \cancel{f}^{2x+3} \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{SI}}$$

$$\log_{\cancel{f}}(3x+2) = \log_{\cancel{f}}(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{NI}}$$

$$\cos(3x+2) = \cos(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{NO}}$$

Morale: se f è iniettiva posso "semplificarla". Se f non è
iniettiva non posso

Negli esempi $f(x) = 7^x$ è iniettiva
 $\cos x$ non è iniettiva



Nel caso centrale $f(x) = \log_7 x$
 è iniettiva come

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

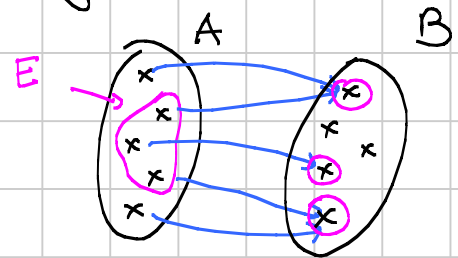
Quindi in un'equazione posso semplificarla
 ma devo imporre che gli argomenti stiano
 nell'insieme di partenza

$$\log_7(3x+2) = \log_7(2x+3) \leadsto \begin{cases} 3x+2 = 2x+3 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}$$

$2x+3 > 0$ Automatica dalle
 prime due

Immagine e controimmagine. Sia $f: A \rightarrow B$. Sia $E \subseteq A$.
 Cosa vuol dire fare $f(E)$, cioè l'immagine di E

Brutalmente: l'immagine di E è
 il sottoinsieme di B costituito dagli
 arrivi di tutte le frecce che partono da E



$$f(E) = \{ f(a) : a \in E \} \subseteq B$$

↑ elenco

$$= \{ b \in B : \exists a \in E \text{ tale che } f(a) = b \}$$

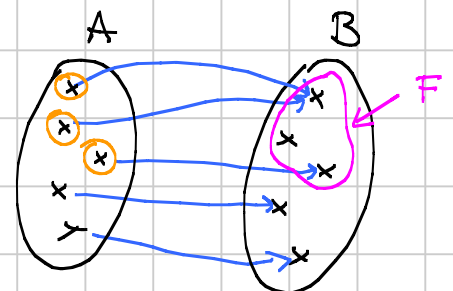
↑ proprietà

La controimmagine è "l'operazione inversa". Dato un sottoinsieme
 $F \subseteq B$

La controimmagine di F è l'insieme
 $f^{-1}(F) \subseteq A$ costituito da tutti gli
 elementi di A che vanno a finire in F

↑ proprietà

$$f^{-1}(F) = \{ a \in A : f(a) \in F \}$$



Esempio 1 $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{x^2 : x \in [-2, 1]\}$$

$$\{f(x) : x \in [-2, 1]\}$$

Fai variare x in $[-2, 1]$ e vedi quali valori assume x^2

$$= [0, 4]$$

Per fare l'immagine

Parto dall'asse x



raggiungo il grafico



raggiungo l'asse y .

