

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 002

Titolo nota

26/10/2010

Funzioni tra insiemi

$$f: A \rightarrow B$$

↑
insieme di partenza

← insieme di arrivo

Una funzione sono 3 cose

- (1) Un insieme di partenza
- (2) Un insieme di arrivo
- (3) Una legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa un unico elemento dell'insieme di arrivo

Se $a \in A$ si indica con $f(a)$ l'unico elemento di B che la legge associa ad A .

Composizione di due funzioni

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

La funzione composta $g(f(x))$ è la funzione ottenuta facendo prima f e poi g . È una funzione da A a C .

Per fare la composizione serve che l'insieme di arrivo della prima (cioè quella più interna) coincida con l'insieme di partenza della seconda (quella più esterna).
↑ basta in realtà che sia contenuto...

Rappresentazione con "disegni"

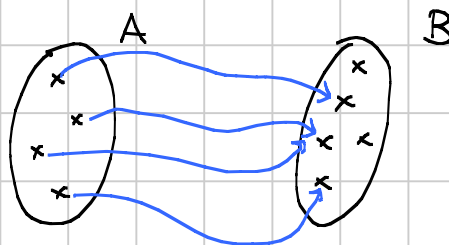


Grafico di una funzione Per questo serve il

Prodotto cartesiano di 2 insiemi

Siano A e B due insiemi.

Si definisce

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

prod. cart.

↑ gli elementi sono coppie ORDINATE

$$(a, b) \neq (b, a) \\ \text{se } a \neq b.$$

Esempio

$$A = \{7, z\} \quad B = \{3, 7, 2\}$$

$$A \times B = \{(7, 3), (7, 7), (7, 2), (z, 3), (z, 7), (z, 2)\}$$

$$A \times A = \{(7, 7), \underbrace{(7, z), (z, 7)}_{\text{DIVERSI}}, (z, z)\} = \text{tutte le possibili coppie in cui i 2 elementi stanno in } A$$

In generale, se $|A| = m$ e $|B| = n$, allora

$$|A \times B| = m \times n$$

Infatti ciascuno degli m elementi di A si può accoppiare con ciascuno degli n elementi di B .

Grafici Data una funzione $f: A \rightarrow B$, si dice grafico di f il sottoinsieme del prodotto $A \times B$ così definito

$$\{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

↑ presentazione per proprietà: 2^a coordinata = f (1^a coordinata)
— o — o —

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, BIGETTIVITÀ, INVERTIBILITÀ

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione

Def. La funzione f si dice

- iniettiva se (brutalmente: manda elementi distinti in elementi distinti)

$$\underline{a_1 \neq a_2} \Rightarrow \underline{f(a_1) \neq f(a_2)}$$

a_1 e a_2 sono elementi
distinti di A

$f(a_1)$ e $f(a_2)$ sono elementi
distinti di B

In maniera equivalente, si può scrivere

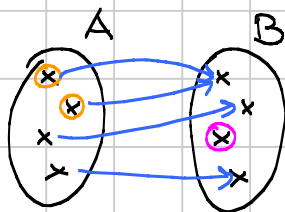
$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- surgettiva se (brutalmente: ogni elemento di B è f di qualcosa)

$\forall b \in B \quad \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$
 per ogni esiste almeno un

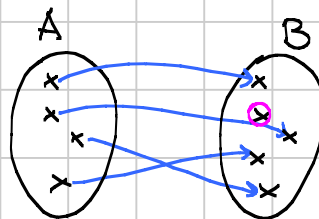
- bigettiva se è iniettiva e surgettiva.

Esempio



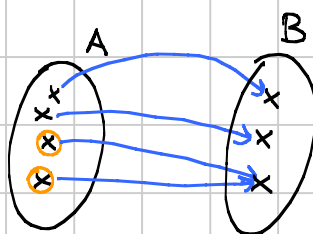
Iniettiva NO

Surgettiva NO



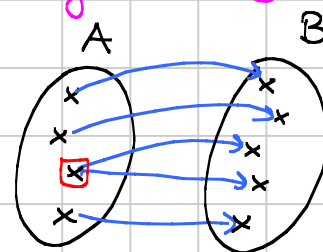
Iniettiva SI

Surgettiva NO



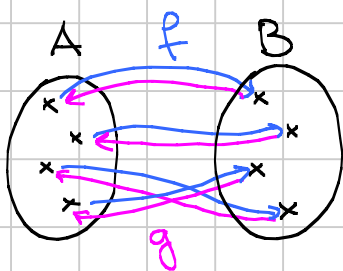
Surgettiva SI

Iniettiva NO



Non è una funzione !!!

Non possiamo partire 2 frecce da uno stesso elemento di A.



Bigettiva.

Quando $f: A \rightarrow B$ è bigettiva, allora "posso tornare indietro", cioè esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

La funzione g è l'inversa della funzione f . Esiste se e solo se f è bigettiva.

Esempio $f(x) = x^2$ Iniettiva? Surgettiva?

Dipende dagli insiemi di partenza e arrivo!!!

Partenza	Arrivo	Iniettiva	Surgettiva
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	NO $f(2) = f(-2)$	NO (i negativi non sono il quadrato di nulla)
$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	NO	SI
$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	SI	SI
$(-\infty, 0]$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$		

SCHIFEZZA !!! Non è una funzione perché agli elementi dell'insieme di partenza non corrispondono el. insieme d'arrivo.