

A.A. 2010/2011
Analisi Matematica I

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 053. Introduzione alle successioni per ricorrenza. Primo esempio di studio mediante un piano	4
Lezione 054. Successioni per ricorrenza autonome: piano classico con la monotonia . .	8
Lezione 055. Funzioni Lipschitziane. Successioni per ricorrenza autonome: piano con la distanza dal presunto limite	12
Lezione 056. Esempi di successioni per ricorrenza studiate con la monotonia e la distanza dal presunto limite	16
Lezione 057. Successioni per ricorrenza spiraleggianti: studio mediante la distanza dal presunto limite e mediante la monotonia delle sottosuccessioni dei pari e dei dispari	20
Lezione 058. Successioni per ricorrenza non autonome: piani con la monotonia, il rapporto, la limitatezza ed i carabinieri	24
Lezione 059. Successioni per ricorrenza non autonome: ulteriori esempi	28
Lezione 060. Successioni per ricorrenza non autonome: ulteriori esempi	32
Lezione 061. Formula di Taylor con resto di Lagrange - Applicazioni al calcolo approssimato di funzioni ed alla dimostrazione di disuguaglianze	36
Lezione 062. Introduzione agli integrali: definizione, significato geometrico, definizione mediante le somme di Riemann	40
Lezione 063. Integrabilità delle funzioni monotone. Proprietà delle funzioni integrabili. Primi esempi di calcolo di integrali con considerazioni geometriche	44
Lezione 064. Primitive e funzione integrale. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale	48
Lezione 065. Tecniche di integrazione: primitive elementari	52
Lezione 066. Ulteriori esempi di primitive elementari. Integrali con valori assoluti. Discorso del " +c "	56
Lezione 067. Formula di integrazione per parti e primi esempi di applicazione	60
Lezione 068. Ulteriori esempi di applicazione dell'integrazione per parti	64
Lezione 069. Formula di integrazione per sostituzione e primi esempi di applicazione .	68

Lezione 070. Ulteriori esempi di applicazione della formula di integrazione per sostituzione	72
Lezione 071. Integrazione delle funzioni razionali (prima parte)	75
Lezione 072. Integrazione delle funzioni razionali (seconda parte) - Esempi	79
Lezione 073. Sostituzioni razionalizzanti: funzioni razionali di esponenziali e radici, potenze negative dispari di $\sin x$ e $\cos x$	83
Lezione 074. Sostituzioni razionalizzanti: radici di polinomi di secondo grado, sostituzioni trigonometriche, formule parametriche	87
Lezione 075. Integrali impropri: spezzamento in integrali monoproblema, definizioni nel caso monoproblema	91
Lezione 076. Integrali impropri: esempi classici con problemi a 0 e $+\infty$	94
Lezione 077. Integrali impropri: criterio del confronto e del confronto asintotico per integrande positive. Esempi di applicazione dei criteri	98
Lezione 078. Integrali impropri: assoluta integrabilità, integrali con problemi in punti diversi dall'origine	102
Lezione 079. Integrali impropri: trucco dell'integrazione per parti, primo esempio di "metodo dei triangolini"	106
Lezione 080. Numeri complessi: forma cartesiana. Operazioni algebriche, coniugato, modulo	109
Lezione 081. Numeri complessi: formula trigonometrica. Prodotto, reciproco, coniugato in forma trigonometrica	113
Lezione 082. Numeri complessi: formula esponenziale. Potenze n-esime di un numero complesso. Esempi ed esercizi	117
Lezione 083. Numeri complessi: radici n-esime	121
Lezione 084. Esercizi misti sul programma finora svolto	125
Lezione 085. Teorema fondamentale dell'algebra e fattorizzazioni di polinomi sui complessi	128
Lezione 086. Fattorizzazione sui reali di polinomi a coefficienti reali	131
Lezione 087. Numeri complessi: esponenziale e logaritmo complesso. Funzioni iperboliche di numeri complessi	135
Lezione 088. Seno e coseno di un numero complesso	139
Lezione 089. Esercizi di ricapitolazione sui numeri complessi	143
Lezione 090. Equazioni differenziali: nomenclatura	147

Lezione 091. Equazioni differenziali: problema di Cauchy, teoremi di esistenza e di unicità, esempio di non esistenza	151
Lezione 092. Equazioni differenziali: intervallo massimale di esistenza, tempo di vita, blow-up, break-down	155
Lezione 093. Equazioni differenziali a variabili separabili: metodo di risoluzione . . .	159
Lezione 094. Esempi di risoluzione e studio di equazioni differenziali a variabili separabili	163
Lezione 095. Equazioni differenziali lineari omogenee: struttura dell'insieme delle soluzioni. Metodo per determinare una base nel caso di equazioni di ordine 2 . . .	167
Lezione 096. Equazioni differenziali lineari omogenee di ordine k a coefficienti costanti. Equazioni non omogenee con secondo membro esponenziale	171
Lezione 097. Equazioni differenziali lineari non omogenee con secondo membro polinomiale o trigonometrico	175
Lezione 098. Equazioni differenziali lineari non omogenee: metodo di variazione delle costanti	179
Lezione 099. Equazioni differenziali lineari del prim'ordine (anche a coefficienti non costanti)	183
Lezione 100. Confronti serie-integrali	187
Lezione 101. Serie di potenze: raggio di convergenza e formula per calcolarlo, serie di Taylor	191
Lezione 102. Calcolo della somma di serie di potenze riconducendole ad opportune serie di Taylor. Teorema di scambio serie-integrali	195
Lezione 103. Varianti del teorema di Weierstrass	199
Lezione 104. Esercizi misti sullo studio di funzioni	203
Lezione 105. Esercizi misti sugli integrali impropri	206
Lezione 106. Esercizi misti (più impegnativi) sugli integrali impropri	209
Lezione 107. Studio di un'equazione differenziale senza una formula esplicita per la soluzione. Esempio di studio qualitativo della soluzione di una equazione differenziale	213
Lezione 108. Esercizi misti (anche impegnativi) sulle successioni per ricorrenza	217
Lezione 109. O grande ed equivalenza asintotica. Ordine di infinitesimo e parte principale. Esercizi misti conclusivi	221

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 053

Titolo nota

07/12/2010

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_0 = \alpha$$

funzione data

numero dato

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ $a_0 = 1$. Se voglio posso calcolare i successivi:
 regola per passare da un termine al successivo

$$a_1 = 2a_0 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 13$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 29 \quad \text{e così via.}$$

Volendo calcolare a_{200} bisognerebbe calcolare prima tutti i precedenti.
 In generale non si riesce a trovare una formula per a_n in funzione di n e non del precedente.

Obiettivo della teoria: rispondere alle solite domande (monotonia? Diverge? comportamento?) senza avere la formula chiusa.

Terminologia: si dice ordine di una succ. per ricorrenza il numero di termini precedenti coinvolti nella formula di passaggio

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 5 \quad \text{ordine 1}$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \quad \text{ordine 2: dipende dai 2 termini precedenti}$$

Se la ricorrenza è di ordine k , mi servono k termini iniziali dati per partire con il procedimento.

Una successione per ric. si dice autonoma "se la n compare solo come indice e non nella legge di passaggio".

$$a_{n+1} = 3a_n - 2$$

autonoma

$$a_{n+1} = 3a_n - n$$

non autonoma per colpa di questa n .

Esercizio $a_{n+1} = 3a_n - n$

$$a_0 = 1$$

Calcolare a_3

$$a_1 = 3a_0 - 0 = 3$$

↑
quando calcolo a_1 ho $n=0$

$$a_2 = 3a_1 - 1 = 8$$

↑
 $n=1$

$$a_3 = 3a_2 - 2 = 22$$

↑
 $n=2$

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_n^2$ $a_0 = \frac{1}{4}$

Capire come si comporta questa successione. Provo a calcolare i primi termini: $a_0 = \frac{1}{4}$ $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$

$$a_2 = \frac{3}{32} + \frac{9}{256} = \frac{24+9}{256} = \frac{33}{256} < \frac{3}{16}$$

Sembra che a_n sia decrescente e forse tenderà a 0. Lo dimostro mediante un piano.

- PIANO**
- (i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 - (iv) $l = 0$

Se dimostro i vari punti del piano, so che la succ. è monotona decrescente e tende a 0. Ora devo dimostrare di fila i pti del piano,

Dim. (iii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente decrescente
 Dal p.to (i) so che a_n è limitata inferiormente ($a_n \geq 0$)
 Dal teo. delle succ. monotone so che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (ho già escluso 3 comportamenti su 4).

Dim. di (iv) Scrivo la ricorrenza e passo al limite

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{a_n}{2} + a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ l & = & \frac{l}{2} + l^2 \end{array}$$

Otengo una equazione per l . Poiché dal p.to (iii) so che l è reale, posso risolvere l'equazione:

$$2l = l + 2l^2, \quad 2l^2 = l \Rightarrow l = \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

Però $l = \frac{1}{2}$ è incompatibile con il p.to (i), cioè il fatto che $a_n \leq \frac{1}{4}$. Quindi l'unico limite possibile è $l = 0$.

Dim. (i) Dimostro per induzione che $a_n \geq 0$.

$n=0$ $a_0 \geq 0$, cioè $\frac{1}{4} \geq 0$ che è banalmente vera

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 0$ Tesi: $a_{n+1} \geq 0$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq 0.$$

Dimostro per induzione che $a_n \leq \frac{1}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$ $a_0 \leq \frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq \frac{1}{4}$ Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$$

Non va benissimo: ho detto che $a_n \leq \frac{1}{4}$, dunque $a_n^2 \leq \frac{1}{16}$. Questo non è corretto perché non posso fare il $\square$ impunemente consentendo i versi ($-7 \leq \frac{1}{4}$, ma $(-7)^2$ non è $\leq \frac{1}{16}$).

Nel caso in questione posso fare i quadrati impunemente perché so già che $a_n \geq 0$ perché l'ho appena dimostrato.

Dim. (ii) Per dimostrare il p.to (ii) uso ricorrenza + disuguaglianza.

Devo dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Usando la ricorrenza, questo è equivalente a

$$\frac{a_n}{2} + a_n^2 \leq a_n$$

Questo conduce alla disuguaglianza $\frac{x}{2} + x^2 \leq x$, cioè $x^2 - \frac{x}{2} \leq 0$, cioè $x(x - \frac{1}{2}) \leq 0$, la cui soluzione è $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, cioè $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

Dal p.to (i) so che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$, quindi di sicuro $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, il che dimostra la monotonia.

— 0 — 0 —

Dimostrazione alternativa dei p.ti (i) e (ii).

Considero la funzione $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$. Da un veloce studio vedo che è strett. cresc. per $x \geq 0$ (anche un po' prima).



Dim. alternativa p.to (i) Induzione

$n=0$... banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico f

consento i versi perché so che f è crescente per $x \geq 0$

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(0) \leq f(a_n) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \qquad \qquad \text{"} \qquad \qquad \text{"} \\ 0 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4} \end{array}$$

e questa è proprio la tesi

Dim. alternativa p.to (ii) Induzione

$n=0$ $a_1 \leq a_0$, cioè $\frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$, banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim.: prendo l'ipotesi $a_{n+1} \leq a_n$, applico f

↓ dopo aver spiegato perché posso !!!!!

$$f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \qquad \qquad \text{"} \\ a_{n+2} \leq a_{n+1} \end{array}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 054

Titolo nota

07/12/2010

Esempio $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2$ $a_0 = 1.$ $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

Vedo che aia tira: $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3, \dots$

Sembra che a_n sia crescente e forse $a_n \rightarrow +\infty$

- PIANO**
- (i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim. (i) 1° modo: induzione elementare

$n=0$ $a_0 \geq 1$, cioè $1 \geq 1$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 1$ Tesi: $a_{n+1} \geq 1$

Dim. $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \geq 1.$

$\uparrow$
 Ho usato che
 $a_n \geq 1 \Rightarrow \frac{a_n}{2} \geq \frac{1}{2}$
 $a_n \geq 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 1$

2° modo: applico f . È sempre per induzione, ma nel passaggio induttivo prendo l'ipotesi $a_n \geq 1$ e applico f (so che $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$). Ottengo

$$f(a_n) \geq f(1)$$

$$a_{n+1} \geq \frac{3}{2} \geq 1.$$

— 0 — 0 —

Dim. (ii) 1° modo: ricorrenza + disequazione Devo dim. che

$$a_{n+1} \geq a_n, \text{ cioè } \frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq a_n, \text{ cioè } a_n^2 - \frac{a_n}{2} \geq 0.$$

Ottengo la diseq. $x(x - \frac{1}{2}) \geq 0$ che ha come soluzione

Dal p.to precedente so che $a_n \geq 1$, quindi di sicuro sta nel secondo pezzo, quindi $a_{n+1} \geq a_n$ è verificata.

2° modo: induzione + applico f | dim. per induzione che $a_{n+1} \geq a_n$.

$[n \Rightarrow n+1]$ Hipotesis: $a_{n+1} \geq a_n$ Tesis: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

$$\quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"}$$

$$\quad \quad \quad a_{n+2} \geq a_{n+1}, \text{ che \u00e9 Q.E.D.}$$

Dim. (ii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente crescente.
La limitazione inferiore del p.to (i) non serve a niente.
Pensavo aperte 2 possibilità: $a_n \rightarrow l$ oppure $a_n \rightarrow +\infty$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{l}{2} + l^2$$

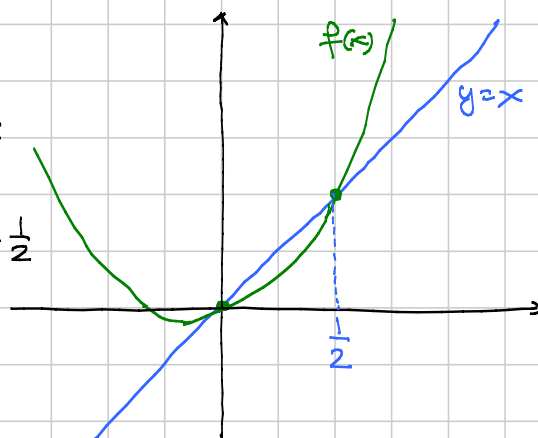
Oss. Un pto (i) del tipo $a_n \geq \frac{1}{2}$ non andava bene per il pto (i.a)

Interpretazione geometrica Disegno sullo stesso grafico la bisettrice $y = x$ e la funzione $y = f(x) = \frac{x}{2} + x^2$.

Per vedere la posizione relativa dei 2 grafici risolvo $f(x) = x$ e $f(x) \geq x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } x = \frac{1}{2}$$

↑
stessa equazione
del p.to (iv)

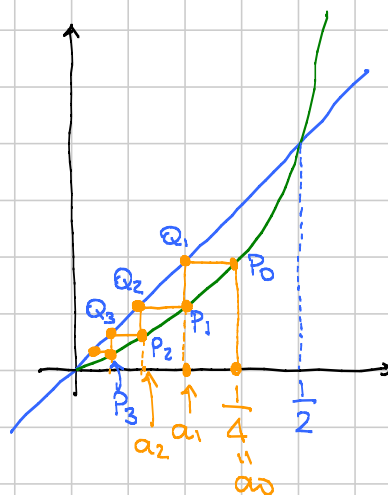


$$f(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + x^2 \geq x \quad (\text{disuguaglianza del p.to (iv)})$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

Suppongo che il dato iniziale sia $a_0 = \frac{1}{4}$. Seguo $\frac{1}{4}$ sull'asse x e procedo con lo slogan

**VERTICALE ALLA FUNZIONE
ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE**



Scrivo le coordinate dei p.ti

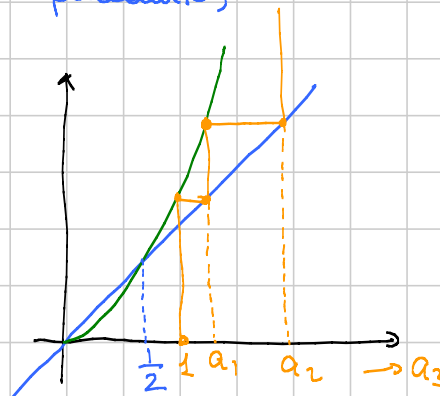
$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$$Q_1 = (a_1, a_1) \quad (\text{ha le coordinate uguali e stessa } y \text{ del precedente})$$

$$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2) \quad (\text{stessa } x \text{ del precedente})$$

$$Q_2 = (a_2, a_2)$$

Le coordinate x dei p.ti costruiti con lo slogan sono i termini successivi della succ. per ricorrenza



Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $a_0 = 2010$

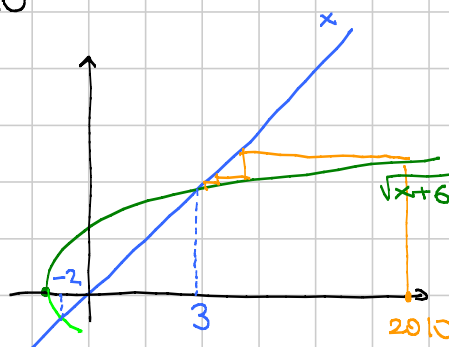
Disegno $y=x$ e $y = \sqrt{x+6}$

Per trovare il p.to d'incontro risolvo

$$x = \sqrt{x+6}$$

$$x^2 = x+6 \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \quad x = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$



Dal disegno uno si aspetta a_n decrescente e $a_n \rightarrow 3$.

PIANO (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + ko. succ. monotone)

(iv) $l = 3$ (passaggio al limite nella ricorrenza + equazione $l = \sqrt{l+6}$ già risolta).

Dim. (ii) Facendo ricorrenza + disequazione si arriva a $\sqrt{x+6} \leq x$, che ha come soluzione $x \geq 3$, cioè $a_n \geq 3$ che è il risultato del p.to (i).

Dim. (i) Induzione + applico f

$n=0$ $a_0 \geq 3$, cioè $2010 \geq 3$ ok

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 3$

Applico $f(x)$ che è crescente addizittura per $x \geq -6$

$$\sqrt{a_n+6} \geq \sqrt{3+6}$$

$$a_{n+1} \geq 3$$

$$f(a_n) \geq f(3)$$

che è la tesi.

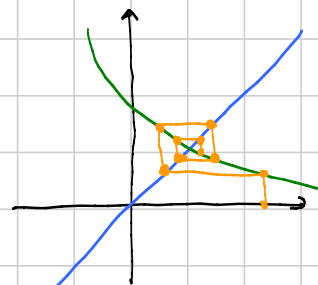
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 055

Titolo nota

07/12/2010

"Verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

LIPSCHITZIANITÀ

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.Si dice che $f(x)$ è Lipschitziana con costante L in A se

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

Il più piccolo valore di L che va bene nella disuguaglianza sopra si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A .

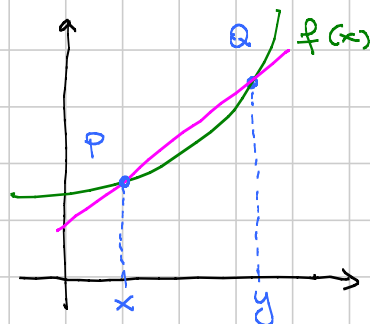
Significato geometrico

Dividendo ottengo $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$, cioè

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

valore assoluto del coeff.

angolare della retta PQ

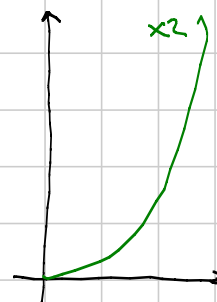


La Lipschitzianità è un controllo sulla pendenza delle rette secanti. Quindi

f Lipschitziana in $A \Leftrightarrow$ il grafico in A ha pendenza limitata

Esempio: $f(x) = x^2$ è Lipschitziana? DOVE?in $[0, +\infty)$ NO! Posso costruire

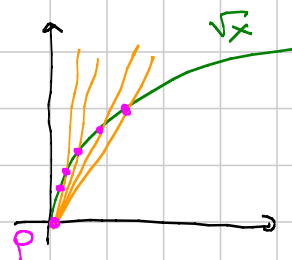
rette secanti con pendenza altissima

in $[2, 7]$ SI! Le pendenze sono limitate.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ è Dip. in $[0,1]$?

NO!

in $[1,+\infty)$ SI! perché il grafico "spiana".



Teorema Supponiamo che f sia derivabile in A , e che A sia un intervallo, una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$.

Allora si ha che

f lipschitziana in $A \Leftrightarrow f'$ limitata in A .

Inoltre la costante di Lipschitz, cioè il migliore L , è proprio

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$$

Dim. Sia $L = \sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$. Se f' è limitata, allora $L \in \mathbb{R}$. Dico che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

Uso LAGRANGE:

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'(c)$$

Quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot |f'(c)| \leq |x - y| \cdot L$$



In questo modo ho dimostrato "nesso teorema", cioè il fatto che derivata limitata $\Rightarrow$ Lipschitziana.

Per la seconda parte, devo assumere che $f(x)$ sia Dip., e dimostrare che la derivata è limitata. Uso la definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|}$$

ma usando la Dip. con $x = x_0 + h$ e $y = x_0$ ottengo che

$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq L |x_0+h - x_0| = L|h|$, ma allora il rapporto incrementale è sempre $\leq L$, quindi il suo limite è $\leq L$ (in valore assoluto).

Esempio 1 Dimostrare che $f(x) = x^2$ è Lipschitziana in $[-4, 22]$.

Basta dimostrare che $f'(x) = 2x$ è limitata in $[-4, 22]$.

1° modo: $f'(x)$ è continua, l'intervallo ha gli estremi, quindi per Weierstrass $f'(x)$ ha max e min nell'intervallo, quindi è limitata

2° modo: direttamente

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [-4, 22] \} = \sup \{ 2|x| : x \in [-4, 22] \} = 44$$

quindi $L = 44$.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x+6}$ è Lipschitziana in $[3, +\infty)$?

Intuitivamente sì. Provo a vedere se la derivata è limitata.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

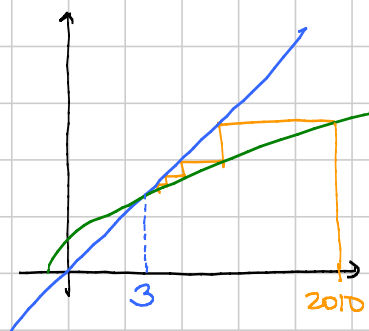
$$\sup \{ |f'(x)| : x \geq 3 \} = \sup \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x+6}} : x \geq 3 \right\} = \frac{1}{6}$$

Quindi ho dimostrato che $f(x) = \sqrt{x+6}$ è Lipschitziana in $[3, +\infty)$ con costante $\frac{1}{6}$.

Studiane $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $a_0 = 2010$

PIANO CON LA MONOTONIA

- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 3$



PIANO CON LA DISTANZA

Pongo $d_n = |a_n - 3|$ e dimo che $d_n \rightarrow 0$.

- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0$
- (iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 3$.

Dim. (i) Esattamente come nel primo con la monotonia. Si può fare per induzione direttamente oppure applicando $f(x)$.

Dim. (iii) Si dimostra facilmente per induzione a partire da (ii)

$n=0$ $d_0 \leq \left(\frac{1}{6}\right)^0 d_0$, $d_0 \leq d_0$ ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0$ Tesi: $d_{n+1} \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} d_0$.

$$\text{Dim. } d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0 = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} d_0$$

$\uparrow$ uso p.to (ii) $\uparrow$ uso ipotesi induttiva $\uparrow$ Percorso.

Dim. (iv) So che

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0$$

val. assol. $\downarrow$ p.to (iii) $\downarrow$
 $0 \downarrow$ $0 \downarrow$ $0 \downarrow$

La conclusione è con i carabinieri (è fondamentale che $\frac{1}{6} < 1$)

Dim. (ii) Devo dimostrare che $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\downarrow$ definita, $\downarrow$ riconvessa
 $d_{n+1} = |a_{n+1} - 3| \leq |f(a_n) - 3|$

3 è il p.to di incontro dei grafici $\Rightarrow$ $|f(a_n) - f(3)|$
 $\leq \frac{1}{6} |a_n - 3|$

$$\leq \frac{1}{6} |a_n - 3|$$

$$= \frac{1}{6} d_n$$

— 0 — 0 —

Ora uso che $f(x)$ è Lip. con costante $\frac{1}{6}$ per $x \geq 3$ (so che $a_n \geq 3$ dal p.to (i)).

.....
Titolo nota

09/12/2010

PIANO CON MONOTONIA

- (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l \geq 0$

Dim. (c) 10 modo: riconvergenza + diseguarzione

Volendo si poteva anche usare la disug. classica

$$\frac{1}{2} \arctan x \leq \frac{1}{2} x \leq x$$

$\uparrow$ $\nearrow$
 Dmg. vera
 $\forall x \geq 0$

2° modo: induttive + applico f.

$n=0$ $a_1 \leq a_0$ vero perché $a_1 = \frac{1}{2} \arctan 2010 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2010 = a_0$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Applico $\frac{1}{2} \arctan x$ che è una funzione strett. crescente. Ottengo

$$\frac{1}{2} \arctan a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \arctan a_n$$

Abbiamo ottenuto $\alpha_{n+2} \in \alpha_{n+1}$ che è proprio la tesi del passaggio indutt.

Dim. (iii) (i) + (ii) + teorema successioni monotone.

Dim. (iv) Passaggio al limite nella ricorrenza + equazione

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2} \arctan a_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{1}{2} \arctan l \end{array}$$

Ci siamo ridotti all'equazione $x = \frac{1}{2} \arctan x$, che dallo studio di funzione ha come soluzione solo $x=0$.

PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 0| = |a_n|$

(i) non serve

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 0$.

Osservazione fondamentale: la funzione $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$ è Lipschitziana con costante $\frac{1}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Si dimostra con Lagrange:

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'(c) = (x - y) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+c^2} \quad (c \text{ tra } x \text{ e } y)$$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+c^2} \leq |x - y| \frac{1}{2}$$

Dim. (ii) $d_{n+1} = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$

(uso Lip.) $\rightarrow \leq \frac{1}{2} |a_n - 0| = \frac{1}{2} d_n$.

Dim. (iii): Facile induzione a partire da (ii)

Dim. (iv) $\boxed{0} \leq \boxed{d_n} \leq \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0}$ $\rightarrow$ È fondamentale in questo passo che $\frac{1}{2} < 1$.

Osservazione Sia a_n la successione appena costruita. Come si comporta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La condizione necessaria c'è, e la serie ha i termini di segno costante. Applico il criterio del rapporto (prima però dimostro per inclusione che $a_n > 0$ (stretto) per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\arctan a_{n+1}}{a_{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{2} < 1$$

$\uparrow$ usò ricom.
 $\uparrow$ $x = a_n$
 e $a_n \rightarrow 0$
 quindi $x \rightarrow 0$

quindi la serie converge. — o — o —

Variante all'esercizio $a_{n+1} = \arctan a_n$ $a_0 = 2010$

Ancora una volta $a_n \rightarrow 0$ decrescendo.

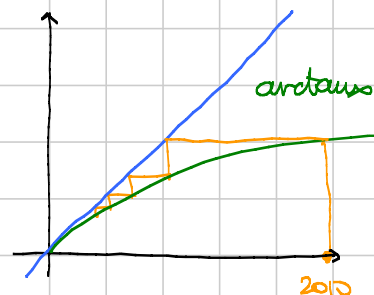
Però:

- il piano con la monotonia funziona allo stesso modo
- nel piano con la distanza la costante al p.to (c) diventa 1, cioè $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi non si può fare il piano con la distanza.

- nello studio della serie il criterio del rapporto ha come risposta $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, quindi BOH, e bisogna usare altri strumenti (ESERCIZIO HARD)

— o — o —

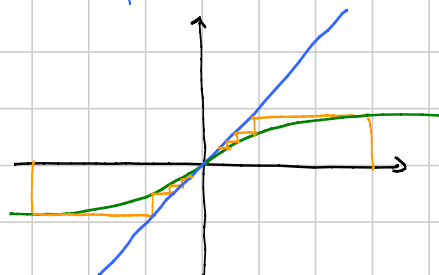


Osservazione $a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n$

$a_0 = \alpha \leftarrow$ parametro

Se faccio il piano con la distanza, funziona allo stesso modo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se faccio il piano con la monotonia, devo distinguere $\alpha \geq 0$ e $\alpha \leq 0$.



Esempio $a_{n+1} = a_n^2$ $a_0 = \alpha$
 (sottoesercizio: trovare formula esplicita per a_n)

Idea:

- se $\alpha > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

PIANO (i) $a_n \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 (iv) $l = +\infty$

- se $0 < \alpha < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 (iv) $l = 0$

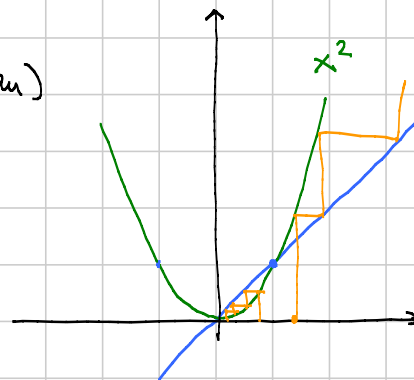
- se $\alpha = 1$, allora $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi in particolare $a_n \rightarrow 1$.

- se $\alpha < 0$, dopo il primo passaggio diventa $a_1 > 0$, quindi da a_1 in poi ricado nei casi precedenti (uno calcola a_1 e fa il piano a partire da a_1).

Conclusione

$a_n \rightarrow +\infty$	per	$\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$a_n \rightarrow 0$	per	$\alpha \in (-1, 1)$
$a_n \rightarrow 1$	per	$\alpha \in \{-1, 1\}$.

— 0 — 0 —



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 057

Titolo nota

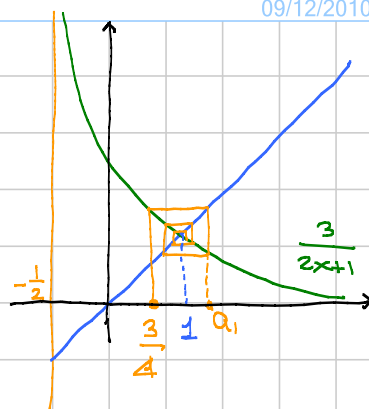
09/12/2010

Esempio $a_{n+1} = \frac{3}{2a_n+1}$ $a_0 = \frac{3}{4}$

Risolvere $\frac{3}{2x+1} = x$, $3 = 2x^2 + x$
 $2x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ spiraleggiando.



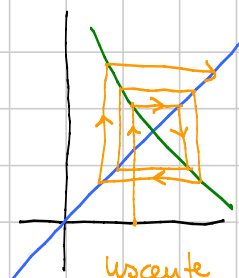
PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 1|$

(i) $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{4}{5} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $a_1 = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{4} + 1} = \frac{3}{\frac{3}{2} + 1} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 1$.



Come trovare il numero che serve al p.to (ii).

Dim (ii) 10 modo: direttamente

uso ric.

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| \stackrel{\downarrow}{=} \left| \frac{3}{2a_n+1} - 1 \right| = \left| \frac{3 - 2a_n - 1}{2a_n+1} \right| = \left| \frac{2 - 2a_n}{2a_n+1} \right|$$

$$= \frac{2|1-a_n|}{|2a_n+1|} = \frac{2}{|2a_n+1|} |a_n-1|$$

$$= \frac{2}{|2a_n+1|} d_n \leq \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{4} + 1} d_n = \frac{4}{5} d_n$$

Ho messo il denominatore più piccolo possibile corrispondente

a $a_n = \frac{3}{4}$ (uso p.to (i))

Questo modo funziona perché sono riuscito a fare conti algebrici.

2° modo: uso la Lipschitzianità di $f(x) = \frac{3}{2x+1}$. Calcolo

$f'(x) = -\frac{3 \cdot 2}{(2x+1)^2}$. Qual è la costante di Lipschitz di $f(x)$ nell'intervallo $[\frac{3}{4}, \frac{6}{5}]$ (quello dato dal pto ci)?

$$\max \{ |f'(x)| : x \in [\frac{3}{4}, \frac{6}{5}] \} = \max \left\{ \frac{6}{(2x+1)^2} : x \in [\frac{3}{4}, \frac{6}{5}] \right\}$$

$$= \frac{6}{(2 \cdot \frac{3}{4} + 1)^2} = \frac{6}{\frac{25}{4}} = \frac{24}{25}$$

Quindi $f(x)$ è lip. nell'intervallo con costante $\frac{24}{25}$. Allora

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| \leq \frac{24}{25} |a_n - 1| = \frac{24}{25} d_n$$

Quindi nel secondo modo ottengo $d_{n+1} \leq \frac{24}{25} d_n$, che va ancora bene perché la costante è < 1 .

Dim (cii) e (iv) Seguono come sempre.

Dim (i) Devo dimostrare che $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Induzione: $n=0$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5}$ Teni $\frac{3}{4} \leq a_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

Devo risolvere $\frac{3}{4} \leq a_{n+1}$, cioè $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2a_n+1}$, cioè $2a_n+1 \leq 4$,

(posso moltiplicare perché so per ipotesi che denominatore > 0)

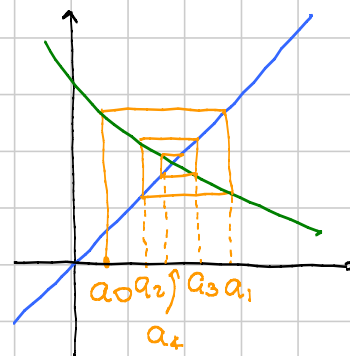
cioè $2a_n \leq 3$, cioè $a_n \leq \frac{3}{2}$. Sapendo per ipotesi che $a_n \leq \frac{6}{5}$ ottengo gratis che $a_n \leq \frac{3}{2}$ cioè la 1ª disug. è verificata.

Devo risolvere anche $a_{n+1} \leq \frac{6}{5}$, cioè $\frac{3}{2a_n+1} \leq \frac{6}{5}$, cioè $5 \leq 4a_n+2$, cioè $4a_n \geq 3$, cioè $a_n \geq \frac{3}{4}$, che è proprio compreso nell'ipotesi.

— o — o —

Idea: a_n non è monotona, MA

- a_{2n} è monotona crescente e
- a_{2n+1} è monotona decrescente



PIANO CON LE 2 SOTTOSUCCESSIONI

- (i) $\frac{3}{4} \leq a_{2n} \leq 1, \quad 1 \leq a_{2n+1} \leq \frac{6}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_{2n+2} \geq a_{2n}, \quad a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$
 (iv) $l = m = 1.$

Dim. (iii) (i) + (ii) + teorema successioni monotone (fatto su a_{2n} e a_{2n+1})

Dim. (iv) Passare al limite nella ricorrenza. La scrivo sui pari e sui dispari

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{3}{2a_{2n} + 1} \\ \downarrow \\ m &= \frac{3}{2l + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{3}{2a_{2n+1} + 1} \\ \downarrow \\ l &= \frac{3}{2m + 1} \end{aligned}$$

Invece di avere un'equazione ho un sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} m = \frac{3}{2l+1} \\ l = \frac{3}{2m+1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2ml + m = 3 \\ 2ml + l = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{sottraggo e ottengo } m = l. \\ &\text{sostituendo trovo} \\ &2l^2 + l = 3, \text{ cioè } 2l^2 + l - 3 = 0, \\ &\text{cioè } l = 1 \text{ oppure } l = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ma $l = -\frac{3}{2}$ è incompatibile con il p.to (i).

"Dim" p.ti (i) e (ii) $a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = \frac{6}{5}, \quad a_2 = \frac{3}{2 \cdot \frac{6}{5} + 1} = \frac{3}{\frac{12}{5} + 1} = \frac{15}{17}$

Ho ottenuto che $a_0 \leq a_2 \leq 1 \quad \left(\frac{3}{4} \leq \frac{15}{17} \leq 1 \right)$

Applico $f(x)$, che è decrescente in quella zona, quindi inverto i versi

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1) \\ a_1 \geq a_3 \geq 1 \end{array}$$

Riapplico $f(x)$ e inverto nuovamente:

$$a_1 \geq a_3 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} f(a_1) \leq f(a_3) \leq f(1) \\ a_2 \leq a_4 \leq 1 \end{array}$$

Al passaggio successivo ho

$$\begin{array}{ccc} f(a_2) \geq f(a_4) \geq f(1) \\ a_3 \geq a_5 \geq 1 \end{array}$$

Continuando in questo modo ottengo decrescenza di a_{2m+1} e
crescenza di a_{2m} (comprese le limitazioni)

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 058

Titolo nota

11/12/2010

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ $a_1 = 2010$

rende la successione non autonoma.

[Oss.: in questo si può trovare anche la formula esplicita (esercizio)].

$$a_1 = 2010, \quad a_2 = \frac{2010}{\sqrt{1}} = 2010, \quad a_3 = \frac{2010}{\sqrt{2}}, \quad a_4 = \frac{2010}{\sqrt{2}\sqrt{3}}, \dots$$

Idea: a_n decresce e $a_n \rightarrow 0$.

PIANO 1: MONOTONIA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim. (i) Induzione banalissima.

Dim. (ii) Ricorrenza + disuguaglianza. Devo dim. $a_{n+1} \leq a_n$, cioè

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n \leq \sqrt{n} a_n, \quad \text{cioè} \quad \underbrace{(\sqrt{n}-1)}_{\geq 0} \underbrace{a_n}_{\geq 0} \geq 0, \quad \text{quindi OK}$$

↑ ho usato p.to (i)

Dim. (iii) Per il p.to (ii) a_n è debolmente decrescente.

Per il p.to (i) a_n è inferiormente limitata.

Per il teo. delle succ. monotone ho che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Dim. (iv) Passo ricorrenza al limite

N.B.: ho usato che so già che $l \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{\frac{a_n}{\sqrt{n}}} = \left[\frac{l}{+\infty} \right]$$

$l = 0$

— 0 — 0 —

PIANO 2: RAPPORTO

- (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale inclusione)
 (ii) $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (ii) Grazie al p.to (i) posso applicare il criterio del rapporto.

Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{a_n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0.$$

Oss. È importante sapere da subito che $a_n > 0$ ← stretto.
 — o — o —

PIANO 3: LIMITATEZZA + CARABINIERI

- (i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) La disuguaglianza $a_n \geq 0$ è la solita inclusione banale.

La disuguaglianza $a_n \leq 10.000$ quasi pure

$n=1$ $a_1 \leq 10.000$, cioè $2010 \leq 10.000$ ok.

$n \geq n+1$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$\text{Dim.: } a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{1}} = 10.000$$

$\uparrow$ ipotesi moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\nwarrow$ Denom. + piccolo

Mettendo assieme il 1° e l'ultimo termine ho la tesi.

Dim. (ii) Dal p.to (i) so che $0 \leq a_n \leq 10.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi, dividendo per $\sqrt{n}$, ottengo

$$0 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n}}, \text{ cioè } \boxed{0} \leq \boxed{a_{n+1}} \leq \boxed{\frac{10.000}{\sqrt{n}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

In questo modo ho dimostrato che $a_{n+1} \rightarrow 0$.

Ma allora (sottosucc. finita) anche $a_n \rightarrow 0$.

— o — o —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan(na_n) + \sin n!}{n+3}$ $a_0 = 2010$

PIANO: MONOTONIA + CARABINIERI (i) $-10.000 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (ii) Supponiamo di aver dimostrato il p.to (i). Allora

$$\frac{-20.000 - \frac{\pi}{2} - 1}{n+3} \leq a_{n+1} \leq \frac{20.000 + \frac{\pi}{2} + 1}{n+3}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Per i carabinieri ho che $a_{n+1} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$ per il solito motivo.

Dim. (i) È equivalente a dimostrare che $|a_n| \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lo faccio per induzione.

$n=0$ Diventa $|2.010| \leq 10.000$, ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $|a_n| \leq 10.000$ Tesi: $|a_{n+1}| \leq 10.000$

Dim. $|a_{n+1}| \stackrel{\text{uso ric}}{=} \left| \frac{2a_n + \arctan(na_n) + \sin n!}{n+3} \right|$

(Pecorso) $\leq \frac{2|a_n| + |\arctan(na_n)| + |\sin n!|}{n+3}$

$$\leq \frac{20.000 + \frac{\pi}{2} + 1}{n+3} \leq \frac{30.000}{3} = 10.000$$

$\uparrow$
 Num. + grande
 Denom. + piccolo

Mettendo insieme 1° e ultimo termine ottengo la tesi.

— 0 — 0 —

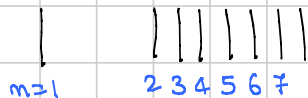
Variante $a_{n+1} = \frac{2a_n + \sin n!}{n+1}$ $a_0 = 2010$

Quando devo dimostrare il passaggio induttivo mi ritrovo

$$|a_{n+1}| \leq \frac{2|a_n| + |\sin n!|}{n+1} \leq \frac{20.000 + 1}{n+1} \leq 10.000$$

$\downarrow$
 yonei, ma non è vero $\forall n$

La disuguaglianza che vorrei è vera solo per $n \geq 2$, quindi il passaggio induttivo, cioè il meccanismo di caduta vale solo da $n=2$ in poi:



Quindi devo usare come passo base $n=1$ ed $n=2$.

Se $n=1$ è banale, bisogna fare $n=2$, cioè dimostrare che $|a_2| \leq 10.000$. Questo è vero perché

$$a_2 = \frac{2a_1 + \sin 1}{2} = \frac{4.020 + \sin 1}{2} \leq 10.000$$

$$a_2 \geq 0 \geq -10.000$$

Oss. In quest'ultimo esempio non sarebbe vero che $|a_n| \leq 2.010$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

È stato quindi importante fissare una limitazione come 10.000 che fosse abbondante.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 059

Titolo nota

11/12/2010

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3}$ $a_0 = 2010$

Congettura: $a_n \rightarrow 2$.

Tentativo: proviamo a vedere se a_n può essere monotona.

Se voglio dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$, devo dimostrare che

$$\frac{a_n + 2n}{n+3} \leq a_n, \text{ cioè } a_n + 2n \leq n a_n + 3 a_n, \text{ cioè}$$

$$(n+2) a_n \geq 2n, \text{ cioè } a_n \geq \frac{2n}{n+2} \leftarrow \text{se l'ho dimostrato in un p.to precedente ho finito.}$$

PIANO CON MONOTONIA

(i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 2$

Dim (i) Provo per induzione.

$n=0$ $2010 \geq 2$ Ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 2$ Tesi: $a_{n+1} \geq 2$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \geq \frac{2 + 2n}{n+3} \geq 2$$

$\uparrow$ uso ricor. $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: $\frac{2+2n}{n+3} \geq 2$ $2+2n \geq 3n+6$ e purtroppo è falso !!!!!

Cambio il p.to (i) mettendo $a_n \geq \frac{2n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Riprovo per induzione: $n=0$ $2010 \geq 0$ Ok.

$$\boxed{n \Rightarrow n+1} \quad \text{Ipotesi: } a_n \geq \frac{2n}{n+2} \quad \text{Tesi: } a_{n+1} \geq \frac{2n+2}{n+3}$$

$$\text{Dim.} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \geq \frac{\frac{2n}{n+2} + 2n}{n+3} \geq \frac{2n+2}{n+3}$$

$\uparrow$ Ric. $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: semplificati i denominatori trovo

$$\frac{2n}{n+2} + 2n \geq 2n+2 \quad 2n \geq 2n+4$$

purtroppo è falsa.

— o — o —

Nuovo tentativo: **CARABINIERI + MONOTONIA** (i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_n \rightarrow 2$

Dim. (ii) Se ho dimostrato il pto (i), allora so che

$$\frac{2n}{n+3} \leq a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \leq \frac{10.000 + 2n}{n+3}$$

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2

Per i carabinieri ho che $a_{n+1} \rightarrow 2$, quindi anche $a_n \rightarrow 2$.

Dim. (i) Dimostrare che $a_n \geq 0$ è una banale induzione.

Dimostro per induzione che $a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n=0$ banale $2.010 \leq 10.000$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi $a_{n+1} \leq 10.000$

$$\text{Dim.} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \leq \frac{10.000 + 2n}{n+3} \leq 10.000$$

$\uparrow$ uso ric. $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: $\frac{10.000 + 2n}{n+3} \stackrel{?}{\leq} 10.000$,

$$10.000 + 2n \stackrel{?}{\leq} 10.000n + 30.000, \quad 0 \leq 9.998n + 20.000$$

banalmente vero!

— o — o —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = \frac{1}{2}$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO MONOTONIA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim (i) Banale induzione

Dim (ii) 1° modo: ricorrenza + disequazione. Devo dim. $a_{n+1} \leq a_n$, cioè

$$\frac{a_n^2}{n} \leq a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n^2 \leq n a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n(a_n - n) \leq 0$$

Questa è verificata per $a_n \in [0, n]$, una dal punto (i) so soltanto che $a_n \geq 0$.

Per rimediare basta dimostrare al p.to (i) che $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ed il p.to (i) rimane facile. PERÒ BISOGNA RIMEDIARE

2° modo: induzione. $n=0$ Devo dim. che $a_2 \leq a_1$, ma $a_2 = \frac{a_1^2}{1} = \frac{1}{4}$ quindi resta $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ che è vera.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$

Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dim.} & a_{n+2} & = & \frac{a_{n+1}^2}{n+1} & \leq & \frac{a_n^2}{n+1} & \leq & \frac{a_n^2}{n} & = & a_{n+1} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Uso} & & \text{Uso} & & \text{Dimos.} & & \text{Uso} & & \\ & \text{ricorrenza} & & \text{ipotesi +} & & \text{+ piccolo} & & \text{ricorrenza} & & \\ & & & \text{p.to (i) per} & & & & & & \\ & & & \text{poter fare il } \square & & & & & & \end{array}$$

Mettendo insieme 1° e ultimo termine ho la tesi.

Dim (iii) (i) + (ii) + teo. succ. monotone.

Dim. (iv) Passo al limite

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{a_n^2}{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ -o- & -o- & -o- \\ & l = 0 & \left[= \frac{l^2}{+\infty} \right] \end{array}$$

PIANO CARABINIERI

(i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 0$

Supponiamo di dim. (i) per induzione... arriviamo a

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{10.000^2}{n} \leq 10.000$$

↑
spero

questo è vero per ogni $n \geq 10.000$, e bisogna controllare 10.000 passi base...Molto meglio: (i) $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim. (i) $a_n \geq 0$ è una banale induzione. Sempre per induzione dimostro che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$. **$n \geq 1$** banale **$n \Rightarrow n+1$** Ipotesi: $a_n \leq 1$ Tesi: $a_{n+1} \leq 1$

Dim. $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$

↑
Ric.

↑
Uso ipotesi e il fatto che $a_n \geq 0$.

↑
Den. + piccolo

Dim. (ii) Dal p.to (i) otteniamo che
Solito finale con i carabinieri.

$$0 \leq a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$$

— 0 — 0 —

Domanda: quanto velocemente $a_n \rightarrow 0$? Ad esempio $\sum a_n < +\infty$?

Applico rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{n} \left[= \frac{0}{+\infty} \right] \rightarrow 0$

↑
Ric.

 $\Rightarrow$ la serie converge.Rilancio: $\sum \frac{a_n}{n!}$ converge? (sì) [$a_n \rightarrow 0$ molto + veloce di $\frac{1}{n!}$]

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)! a_{n+1}}{n! a_n} = (n+1) \frac{a_n^2}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{a_n}{1} \rightarrow 0$$

↓
0

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 060

Titolo nota

11/12/2010

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = \frac{1}{2}$

Si poteva usare il criterio del rapporto? Proviamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{n} \quad \text{per il momento non posso dire nulla.}$$

Però, se al p.to (i) avessi dimostrato che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$, allora avrei che

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

da questo dedurrei che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$.

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (inclusione semplice)

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$ per criterio rapporto.

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = 2$

Esperimenti: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{a_1^2}{1} = 4$, $a_3 = \frac{4^2}{2} = 8$, $a_4 = \frac{8^2}{3} = \frac{64}{3} = 21, \dots$

Idea: $a_n \rightarrow +\infty$. Si potrebbe provare con la monotonia, ma fallisce (provare per esercizio).

PIANO (i) $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow +\infty$ (Basta confronto dato p.to (i))

Dim. (i) Inclusione $[n \geq 1]$ Basta $a_1 \geq 2^1$, $2 \geq 2$.

[$n \Rightarrow n+1$] Ipotesi: $a_n \geq 2^n$ Tesi: $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Dim. $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n} \geq 2^{n+1}$

Ric. $\downarrow$
Ipot. $\downarrow$
Spero $\downarrow$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$
 (ii) $a_n \rightarrow 7$ (Banale dato (i))

Dim (i) Induzione a partire da n_0 . $n=n_0$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq a_{n_0}$ Tesi: $a_{n+1} \leq a_{n_0}$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = 7 + \frac{3n^5}{2^n} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} a_{n_0} \leq a_{n_0}$$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso defn. di n_0 $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

La speranza è: $7 + \frac{1}{2} a_{n_0} \leq a_{n_0}$, vero $\Leftrightarrow a_{n_0} \geq 14$.

Per sistemare questo dettaglio, cambio leggermente il pto (i) mettendo

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq a_{n_0} + 14 \quad \forall n \geq n_0$$

Il caso $n=n_0$ è ancora più banale: $a_{n_0} \leq a_{n_0} + 14$...

Nel passaggio induttivo troviamo

$$a_{n+1} \leq 7 + \frac{1}{2} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} (a_{n_0} + 14) = 7 + \frac{a_{n_0}}{2} + 7 = \frac{a_{n_0}}{2} + 14 \leq a_{n_0} + 14$$

$\uparrow$ uso nuova ipotesi

Mettendo insieme ho che $a_{n+1} \leq a_{n_0} + 14$, che è la nuova tesi induttiva.

— 0 — 0 —

Esempio 4 $a_{n+1} = 5 + \frac{2010 a_n}{\sqrt{n+3}} \quad a_0 = 2010$

In questo caso $a_n \rightarrow 5$.

PIANO 1 Fisso n_0 tale che $\frac{2010}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$. Si trova

$$4020 \leq \sqrt{n+3} \quad \text{cioè} \quad n+3 \geq 4020^2, \quad n \geq 4020^2 - 3 = n_0$$

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq a_{n_0} + 5 \quad \forall n \geq n_0 = 4020^2 - 3 \quad (\text{come sopra})$$

$$(ii) \quad a_n \rightarrow 5 \quad (\text{Carabinieri})$$

PIANO 2 Monotonia!!!!

Supponiamo che per un certo valore di n si abbia

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Dico che da lì in poi è monotona decrescente. Detto meglio:
se $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$.

Dim.: induzione per $n \geq n_0$. Il caso $n_0 = n$ è l'ipotesi.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } a_{n+2} &= 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+4}} a_{n+1} \leq 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+4}} a_n \leq 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+3}} a_n \\ &\quad \uparrow \text{uso } a_{n+1} \leq a_n \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

quindi ho ottenuto la tesi.

Resta da dimostrare che prima o poi a_n decresce almeno una volta.

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+3}} a_n \leq a_n \Leftrightarrow a_n \left(1 - \frac{2010}{\sqrt{n+3}} \right) \geq 5$$

tende a 1 per $n \rightarrow \infty$

Se a_n arriva sottozero, essendo partito da 2010 vuol dire che almeno una volta ha fatto un passaggio decrescente.
Altrimenti sta sopra 2010 sempre, quindi prima o poi la disuguaglianza è vera.

PIANO (i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$

(ii-a) esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$

(ii-b) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 5$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 061

Titolo nota

11/12/2010

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Caso con centro
in $x_0 = 0$.

Taylor con resto di Peano

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

↑
resto di Peano

Brutalmente: $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$, quindi se approssimo $f(x)$ con $P_n(x)$ commetto un errore piccolo nel senso che è $o(x^n)$.

o piccolo è una informazione al limite, ma per $x \neq 0$ non dice nulla.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Taylor - Lagrange

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove c è un p.to tra 0 e x .Ovviamente non so chi è c , ma spesso non serve.↑
resto di LagrangeEsempio 1 Voglio calcolare $\sin \frac{1}{10}$ a mano.

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots \quad \text{Al posto di } x \text{ metto } \frac{1}{10}. \text{ Calcolo}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{10} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} + \text{errore} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \text{errore} \\ &= \frac{599}{6000} + \text{errore} \end{aligned}$$

Domanda: se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$, quale errore commetto?

Uso Taylor-Lagrange con $n=4$. Ho che

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

quindi $|\text{errore}| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{5!}x^5 = \frac{|\cos c|}{5!}x^5$ p.to misterioso

$$\text{Con } x = \frac{1}{10} \text{ ottengo } |\text{errore}| = \frac{|\cos c|}{5!} \frac{1}{10^5} \leq \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{1,2 \cdot 10^7} = \frac{1}{12.000.000}$$

Se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$ commetto un errore

più piccolo di 10^{-7} . Riprova: $\frac{599}{6000} = 0,09983333$
 $\sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}$

errore di 1 sulla
7ª cifra decimale.

Esempio 2 Voglio calcolare $e^{\frac{1}{10}}$. Uso Taylor con $n=4$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \text{errore}$$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{240000} + \text{errore}$$

$$= \frac{240.000 + 24.000 + 1.200 + 40 + 1}{240.000} + \text{errore} = \frac{265.241}{240.000} + \text{errore}$$

Per Taylor-Lagrange ho che

$$|\text{errore}| \leq \frac{|f^{(5)}(c)|}{5!}x^5 \leq \frac{e^c}{120 \cdot 10^5} = \frac{e^c}{1,2 \cdot 10^7} \leq \frac{e}{1,2 \cdot 10^7}$$

Riprova: $\frac{265.241}{240.000} = 1,1051708$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1,105170\boxed{8}$$

errore di 1 sulla settima cifra

Esempio 3 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1° modo: studiare $f(x) = e^x - 1 - x$ (fatto a suo tempo)

2° modo: Taylor-Lagrange con $n=1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2 = 1 + x + \boxed{\frac{e^c}{2!} x^2} \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

≥ 0

Esempio 4 Dimostrare che $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$ per ogni $x \geq 0$

1° modo: studio la funzione differenziale (fine per esercizio...)

2° modo: Taylor-Lagrange con $n=2$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^c}{3!} x^3$$

Per $x \geq 0$ ho che il resto è ≥ 0 , quindi se lo tolgo ottengo qualcosa di più piccolo, quindi $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Per $x \leq 0$ ho che il resto è ≤ 0 , quindi tutto è girato e $e^x \leq 1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Esempio 5 $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \geq 0$

Taylor-Lagrange con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{24} x^4 = x - \frac{1}{6}x^3 + \boxed{\frac{\sin c}{24} x^4}$$

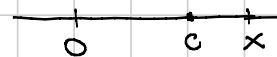
RESTO

Il segno del resto dipende da $\sin c$.

Supponiamo che $0 \leq x \leq \pi$. Allora anche

$0 \leq c \leq \pi$, quindi $\sin c \geq 0$, quindi resto ≥ 0 , quindi

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \quad \text{vale per lo meno per ogni } x \in [0, \pi]$$



Dopo π , la situazione è
quindi non so se c sta in una zona
con $\sin c > 0$ o $\sin c < 0$.

In π , quanto vale il polinomio?

$$\pi - \frac{1}{6}\pi^3 < \pi - \frac{27}{6} < -1$$

Voglio dire che per $x \geq \pi$ ho che il polinomio
sta sotto -1 . Basta vedere che $P_3(\pi) < -1$ e poi è decrescente
perché

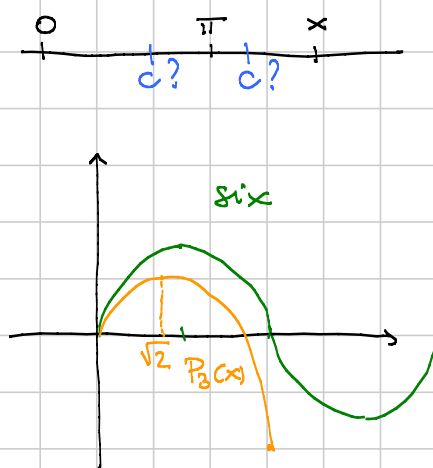
$$P_3'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < 0 \text{ per } x \geq \pi$$

Conclusione: $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per $x \in [0, \pi]$ per Taylor-Lagrange

Per $x \geq \pi$ ho che $\sin x \geq -1 \geq x - \frac{1}{6}x^3$. Ma allora

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \text{ per ogni } x \geq 0$$

Per $x \leq 0$ sono tutte funzioni dispari, quindi si girano i segni.
— 0 — 0 —



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 062

Titolo nota

14/12/2010

INTEGRALE DI RIEMANN

- ① Come si indica
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definisce
- ④ Come si calcola

1 Notazioni Due ingredienti fondamentali

- zona di integrazione: intervallo $[a, b]$ (dunque limitato)
- funzione da integrare (integrand): funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$).

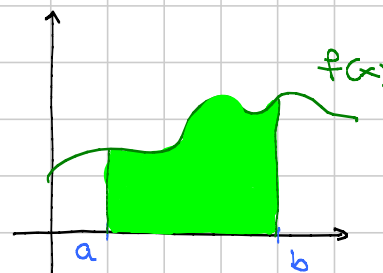
Integrale di $f(x)$ in $[a, b]$ è

$\int_a^b f(x) dx$

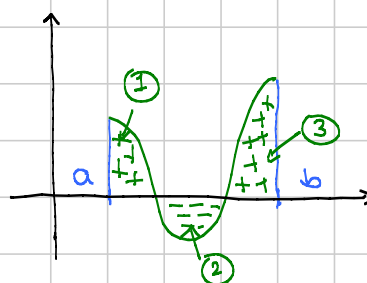
simbolo di integrale $\rightarrow$ $\int$
 estremi zona di integrazione $\rightarrow$ a, b
 integranda $\rightarrow$ $f(x)$
 indica la variabile rispetto a cui si integra $\rightarrow$ dx

2 Significato geometrico

$\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO}$
 della regione di piano che sta tra l'asse x ed il grafico di $f(x)$



"Con segno" significa che le aree sopra l'asse x contano con il segno $(+)$, quelle sotto con il segno $(-)$.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area ①} + \text{Area ③} - \text{Area ②}$$

Problema: come definire l'area di una regione "storta".

3 Definizione di integrale

→ Caso banale

→ Caso semi-banale

→ Caso generale

Caso banale: $f(x) = \text{costante}$. $f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$ In questo caso $\int_a^b f(x) dx =$ $= \text{area con segno del rettangolo}$

$$= \lambda (b-a)$$

 λ altezza con segno $(b-a)$ lunghezza baseCaso semi-banale: $f(x) = \text{costante a tratti}$

Esistono punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

ed esistono costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che

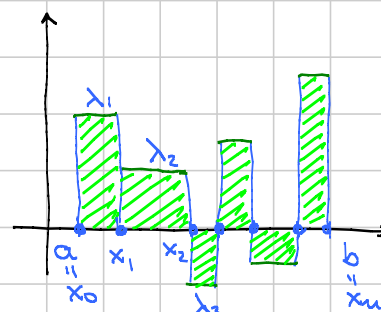
$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

In questo caso

 $\int_a^b f(x) dx = \text{somma ALGEBRICA delle aree dei vari rettangoli}$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

λ_i altezza con segno del rettangolo i -esimo
 $(x_i - x_{i-1})$ lunghezza base rettangolo i -esimo



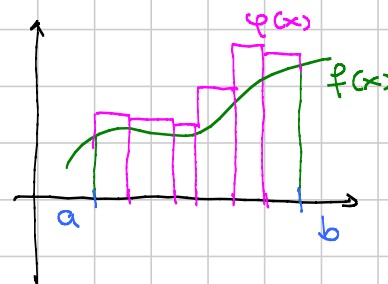
Osservazione: ① i vari sottointervalli possono avere lunghezze diverse.

② il numero dei sottointervalli non è fissato in partenza.

Le funzioni costanti a tratti si chiamano anche funzioni a gradino, funzioni semplici, STEP FUNCTIONS.

Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata qualunque.

Prendo una funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a gradino tale che $f(x) \leq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.



Idea 1: L'integrale di $\varphi(x)$ (che ho già definito) deve essere $\geq$ dell'integrale di $f(x)$ (che voglio definire).

Idea 2: L'integrale di $f(x)$ sembra essere l'inf di tutte le aree corrispondenti a funzioni $\varphi(x) \geq f(x)$ a gradino.

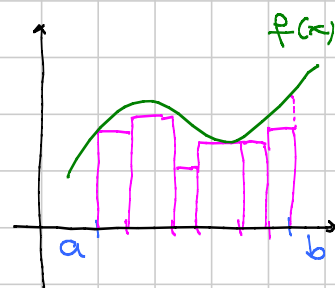
Si definisce INTEGRALE SUPERIORE di $f(x)$ in $[a, b]$ il numero

$$I^+(f, [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradino e } \varphi(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$

Idea brutale: per realizzare l'inf. devo usare molti sottointervalli molto piccoli e non sprecare in altezza.

In modo analogo si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f, [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradini e } \varphi(x) \leq f(x) \forall x \in (a, b) \right\}$$



Teorema Per ogni funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata si ha che

$$I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b]),$$

ma ci sono casi (piuttosto patologici) in cui non c'è uguaglianza.

Definizione Se accade che $I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$, allora si dice che $f(x)$ è integrabile (secondo RIEMANN) e si pone

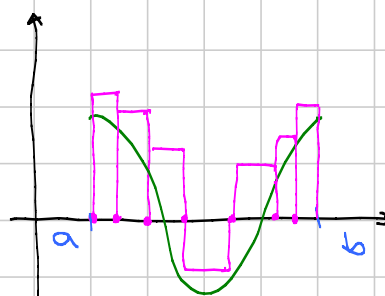
$$\int_a^b f(x) dx = I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b]).$$

Somme di Riemann (inferiori e superiori) sono le aree approssimanti dall'alto e dal basso introdotte nel caso generale della definizione.

— o — o —

Osservazione Se $f(x)$ non è positiva, allora occhio a come sono fatte le somme di Riemann.

Non è detto che
somma di Riemann superiore =
contiene la parte di piano di cui
vogliamo fare l'area.



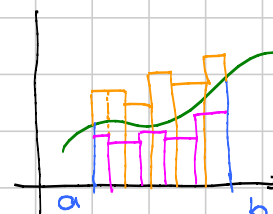
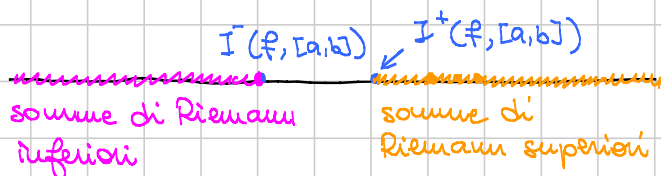
esempio di somma di
Riemann superiore

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 063

Titolo nota

14/12/2010

Somme di Riemann inferiori e superiori e definizione di integrale



Se c'è il buco, allora $I^- < I^+$, e $f(x)$ non è integrabile in $[a, b]$

Se non c'è il buco, allora c'è un unico elemento separatore e quello è proprio l'integrale.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Caratterizzazione delle funzioni integrabili Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0$ esistono una somma di Riemann superiore ed una inferiore che distano meno di ε .

In simboli: $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ funzioni a gradino tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \varepsilon$$

Inoltre $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ le posso pensare costruite a partire dalla stessa suddivisione di $[a, b]$, più di considerare alcuni rettangoli adiacenti di uguale altezza.

Quali funzioni sono integrabili? "Quasi tutte", in particolare

→ tutte le funzioni monotone

→ tutte le funzioni continue

→ tutte le funzioni "continue a tratti", cioè continue su sottointervalli con il limite che esiste agli estremi.

Proprietà dell'integrale Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili in $[a, b]$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Altro modo di dire le prime due proprietà: la funzione $f(x) \mapsto \int_a^b f(x) dx$

è un'applicazione lineare (da dove a dove?)

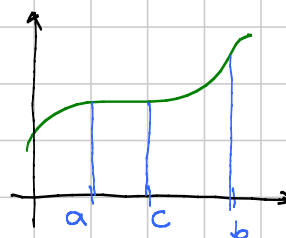
$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \text{nulla di furbo}!!!!$$

(si vede già per funzioni con 2 gradienti)

Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in (a, b)$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Se $c \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

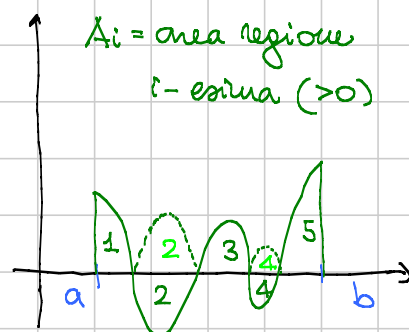


$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Cosa vuol dire in termini di aree

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = |A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5|$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$



Nel calcolo di $\left| \int f \right|$ ho compensazione tra aree + e aree -

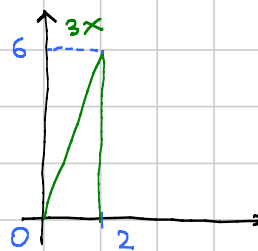
" " " $\int |f|$ tutte le aree si sommano.

Esempio 1 $\int_0^2 3x \, dx =$

= area triangolo

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$

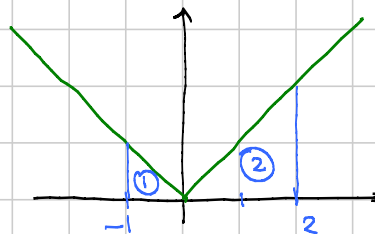
↑ ↑
base altezza.



Esempio 2 $\int_{-1}^2 |x| \, dx =$

= Area 1 + Area 2

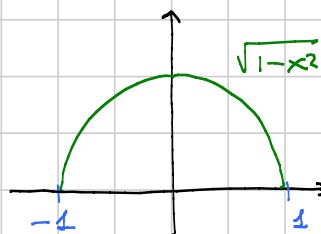
$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$



Esempio 3 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx =$

= area semicerchio di raggio 1

$= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 064

Titolo nota

14/12/2010

4 Come si calcolano operativamente gli integrali

Primitiva Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice primitiva di f una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{basta } (a, b))$$

Osservazione Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora anche $F(x) + 37$ è una primitiva. Più in generale $F(x) + c$ è una primitiva per ogni costante $c \in \mathbb{R}$.

Primitive calcolo di integrali. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F(x)$ una qualunque sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notazione}}}{[F(x)]_a^b} = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Oss. È fondamentale che il risultato non dipenda dalla primitiva scelta. Questo è ovvio quando invece di $F(x)$ uso $F(x) + c$ (la costante se ne va). È ovvio in tutti i casi in cui le primitive differiscono tra di loro per una costante.

Teorema Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, e F_1 ed F_2 sono due primitive di f , allora

$F_1(x) - F_2(x)$ è una funzione costante.

Dim.: Pongo $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Allora

F_1, F_2 sono primitive

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \stackrel{\downarrow}{=} f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

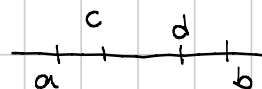
Perché $\Phi'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (basterebbe anche (a, b)) ho che $\Phi(x)$ è costante. Perché?

Prendo 1 punto $y \in [a, b]$ e per Lagrange ho che

$$\Phi(y) - \Phi(a) = (y-a) \cdot \underset{0}{\Phi'(c)} = 0$$

Quindi $\Phi(y) = \Phi(a)$ per ogni $y \in [a, b]$, quindi Φ è costante.

Oss. Più in generale vale che



$$\int_c^d f(x) dx = [F(x)]_c^d$$

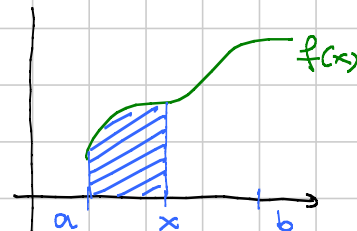
questo perché, se $F(x)$ è primitiva in $[a, b]$, allora è primitiva pure in $[c, d]$.

— o — o —

FUNZIONE INTEGRALE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora per ogni $x \in [a, b]$ pongo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

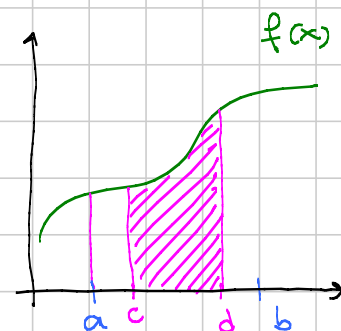
↑
variabile di integrazione



Proprietà fondamentale della funzione integrale

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Quindi: se io conoscessi la funzione integrale, saprei calcolare l'integrale di $f(x)$ tra ogni coppia di estremi.



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.

Teorema della media integrale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Siano

$$m = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$M = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

(esistono per Weierstrass)

Allora esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dim. Per ogni $x \in [a, b]$ si ha che

$$m \leq f(x) \leq M$$

quindi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Dividendo ottengo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_\lambda \leq M$$

Ma allora per una delle tante varianti al teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un valore $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \lambda$

— o — o —

Significato geometrico del valore λ e del p.to c .

Rispondo da tei come

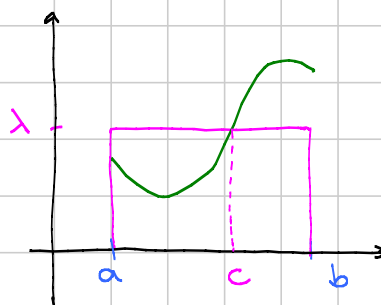
$$\int_a^b f(x) dx = \lambda(b-a) = (b-a) f(c)$$

λ è l'altezza del rettangolo che

ha come base $[a, b]$ e come

area l'integrale di f .

Area rettangolo di altezza λ = integrale funzione



Dim. teo. Fondamentale calcolo integrale.

Sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ la funzione integrale. Voglio dimostrare che $F(x)$ è una primitiva, cioè $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

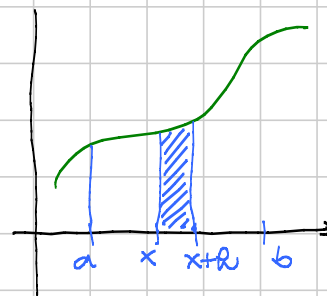
↑
integrale su $[x, x+h]$
lunghezza intervallo di integrazione

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h)$$

↑
p.to misterioso nell'intervallo $[x, x+h]$

Quando $h \rightarrow 0$, ho che $c_h \rightarrow x$. Quindi, essendo $f(x)$ continua, il limite di sopra è proprio $f(x)$ (solito cambio di variabili $y = c_h$: quando $h \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow x$, quindi...).

Oss. Ho fatto il caso $h \rightarrow 0^+$.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 065

Titolo nota

15/12/2010

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Come trovare una primitiva di una funzione $f(x)$ data.

Definito $\int_a^b f(x) dx$. Se $f(x)$ è continua questo si calcola cercando una primitiva $F(x)$ di $f(x)$, cioè una funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Una volta ottenuta una qualunque primitiva si ha

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Trovare una primitiva è un'operazione NON meccanica.

Tecniche standard:

- primitive elementari
- integrazione per parti
- integrazione per sostituzione
- integrazione funzioni razionali
- sostituzioni razionalizzanti

Primitive elementari = leggere la tabellina di derivate al contrario !!!

Notazione: $\int f(x) dx$ = una qualunque primitiva di $f(x)$.
 (funzione della x)
 senza estremi

$$\int e^x dx = \text{qualcosa che derivato fa } e^x = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + 2\pi$$

$$\int \cos x dx = \text{qualcosa che derivato fa } \cos x = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int 1 dx = x$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Più in generale $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{per ogni } \alpha \neq -1.$$

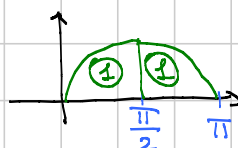
[Verifica: fare la derivata!!! $\left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]' = \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha$]

Esempio 1 $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$
 $= 0 + \cos 0 = 1.$



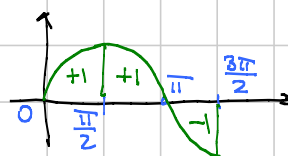
Nota bene: l'integrale è (e doveva essere) positivo perché l'integranda è > 0 nell'intervallo di integrazione.

Esempio 2 $\int_0^\pi \sin x dx = 2$



$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Esempio 3 $\int_0^{3\pi/2} \sin x dx = 1$

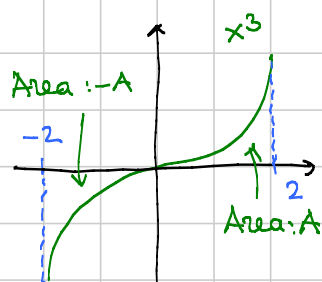


(Fare i conti con la primitiva per esercizio)

Esempio 4 $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3} [x^3]_0^2 = \frac{1}{3} (8-0) = \frac{8}{3}$

verifica: $\left(\frac{1}{3} x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ OK

Esempio 5 $\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} [x^4]_{-2}^2 = \frac{1}{4} (16-16) = 0.$



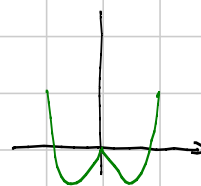
Fatto generale 1: se $f(x)$ è una funzione DISPARI, allora

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } a \geq 0$$

↑ integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine: $[-a, a]$.

Fatto generale 2: se $f(x)$ è una funzione PARI, allora

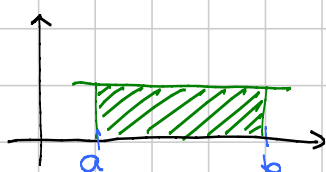
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



Esempio 6 $\int_{45}^{74} 1 dx = \int_{45}^{74} \underset{\text{sottinteso}}{1} dx = 74 - 45 = 29$

Ragione calcolosa: $\int_a^b 1 dx = [x]_a^b = b - a$

Ragione geometrica: $\int_a^b 1 dx = \text{lunghezza intervallo } [a, b] = b - a$



$$\begin{aligned} \int_a^b 1 dx &= \text{area del rettangolo} \\ &= \text{base} \cdot \text{altezza} \\ &= (b-a) \cdot 1 \\ &= b-a \end{aligned}$$

Esempio 7 $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2$

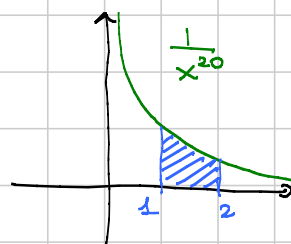
$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} [2^{\frac{3}{2}} - 1] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2} - 1]$$

↑ verifica: $\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{ok}$

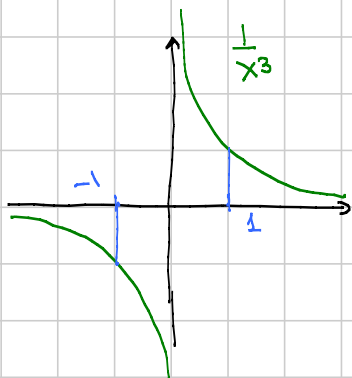
Esempio 8 $\int_1^2 \frac{1}{x^{20}} dx = \int_1^2 x^{-20} dx = \left[\frac{1}{-19} x^{-19} \right]_1^2 =$

$$= -\frac{1}{19} \left[\frac{1}{x^{19}} \right]_1^2 = \underbrace{-\frac{1}{19} \left[\frac{1}{2^{19}} - 1 \right]}_{\text{Numero POSITIVO !!!}}$$

Dovrebbe venire un numero positivo perché l'integranda è positiva !!



Esempio 9 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^1 x^{-3} dx = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1$
 $= -\frac{1}{2} (1-1) = 0.$ **NO ooooooooooooo**



Non si tratta di un integrale PROPRIO perché la funzione integranda non è limitata, quindi l'integrale non è numero definito.

Esempio 10 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$
 verifica: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Esempio 11 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
 f(x) è pari, quindi è il doppio del precedente.

Esempio 12 $\int_0^2 (x^2 - x + 3e^x + \sqrt{x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3e^x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$
 Fare la verifica !!

$= \frac{8}{3} - 4 + 3e^2 + \frac{2}{3} 2\sqrt{2} - 3e^0 = \frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3}\sqrt{2} + 3(e^2 - 1).$
 — o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 066

Titolo nota

15/12/2010

Primitiva di $\frac{1}{x}$ $\int x^\alpha dx$ con $\alpha = -1$.

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{NI}$$

È vero che $(\log x)' = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$.

D'altra parte $\frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, non solo per $x > 0$. Quindi ha senso cercare una funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Questa è $F(x) = \log |x|$. Facciamo la verifica:

- per $x > 0$ ho che $F(x) = \log x$, quindi $F'(x) = \frac{1}{x}$,
- per $x < 0$ ho che $F(x) = \log(-x)$, quindi $F'(x) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$
↑ derivata di $-x$.

Quindi

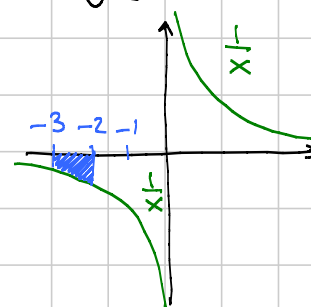
$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

Esempio 1 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$
↑ senza valore assoluto perché siamo sugli $x > 0$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{-3}^{-2} = \log |-2| - \log |-3| = \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3} < 0$$
↑ ora serve

Non stupisce che sia venuto negativo perché è integrale di una $f(x) < 0$.

$$\int_{-3}^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{Non è un integrale proprio.}$$



Discorso del +c

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \quad \text{Ok per calcolare numericamente gli integrali tra 2 estremi.}$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c \quad \leftarrow \text{insieme di tutte le primitive di } x^2$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c \quad \leftarrow \text{Non è l'insieme di tutte le primitive di } \frac{1}{x}$$

Un'altra primitiva è

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 3 & x > 0 \\ \log |x| + 7 & x < 0 \end{cases}$$

Trucco: se la zona di definizione è fatta di 2 pezzi (in questo caso $x > 0$ ed $x < 0$), allora posso usare 2 valori diversi di c nei 2 pezzi.

Fatto generale: se una funzione in un intervallo ha derivata nulla, allora è costante (Lagrange)



se una funzione definita per $x \neq 0$ ha derivata nulla, allora è costante per $x < 0$ e per $x > 0$, ma le 2 costanti possono essere diverse

Quindi: aggiungere +c alla fine

→ non serve per il calcolo operativo

→ non basta per descrivere TUTTE le primitive (dovrei usare c diversi in ogni pezzo dell'insieme di definizione).

Quindi non c'è una sola buona ragione per mettere +c alla fine.

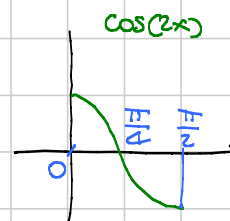
Esempio 2 $\int_0^2 e^{3x} dx$. Faccio la primitiva, cioè cerco qualcosa che derivato faccia e^{3x}

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \quad [\text{Verifica: } (\frac{1}{3} e^{3x})' = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}]$$

$$\int_0^2 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^2 = \frac{1}{3} [e^{3x}]_0^2 = \frac{1}{3} (e^6 - 1).$$

Esempio 3 $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x)$ [Verifica!...]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 0) = 0$$



Esempio 4 $\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$ ↑
precorso

Verifica: $\left(-\frac{1}{4} \cos(2x) \right)' = -\frac{1}{4} (-\sin(2x)) \cdot 2 = \frac{1}{2} \sin(2x)$

Altro modo: $\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$

Verifica: $\left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$ Ok.

Come è possibile che siano venute 2 primitive completamente diverse?

Non sono diverse per ragioni precorsistiche:

$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, quindi $-\frac{1}{4} \cos(2x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x$,
 quindi le 2 primitive sono la stessa a meno di una costante.

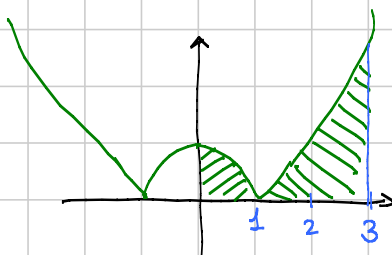
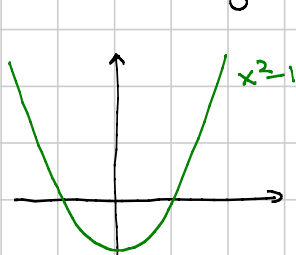
Esempio 5 $\int \sqrt[3]{x+6} dx = \int (x+6)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+6)^{\frac{1}{3}+1} =$
 $= \frac{3}{4} (x+6)^{\frac{4}{3}}$ [Verifica: $\left(\frac{3}{4} (x+6)^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} (x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$]

Esempio 6 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \int (2x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} (2x+3)^{\frac{1}{2}} =$
 $= 2 (2x+3)^{\frac{1}{2}}$ [Verifica: $\left[2 (2x+3)^{\frac{1}{2}} \right]' = 2 \cdot \frac{1}{2} (2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
 ops, non torna ↑
deriv. di 2x

C'è un 2 di troppo !! Quindi

$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \sqrt{2x+3}$ [Verifica: torna].

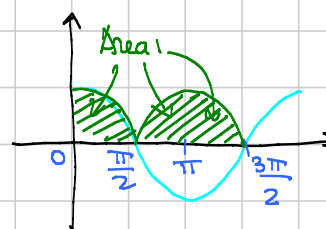
Esempio 7 $\int_0^3 |x^2 - 1| dx$ SPEZZARE LE VARIE ZONE



$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2 - 1| dx &= \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^3 |x^2 - 1| dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^3 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 9 - 3 - \frac{1}{3} + 1 = \text{conto...}$$

Esempio 8 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = 3$



Spezzamento

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \text{conti... viene.} \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 067

Titolo nota

16/12/2010

INTEGRAZIONE PER PARTI Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue su un intervallo $[a, b]$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ due loro primitive

$$F'(x) = f(x) \quad G'(x) = g(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Pongo $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora $\Phi'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$
 $= f(x)G(x) + F(x)g(x)$

Fatto generale

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Applicando il fatto generale nel caso specifico $\Phi(x) = F(x)G(x)$ ottengo

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x)G(x) + F(x)g(x)] dx &= [F(x)G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)G(x) dx + \int_a^b F(x)g(x) dx \end{aligned}$$

Portando un termine a destra ottengo infine

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx$$

FORMULA
INTEGRAZIONE
PER
PARTI

Un po' abusivamente si ricorda come

$$\int fG = FG - \int Fg$$

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx \\ &\quad \begin{matrix} G & f \\ & \end{matrix} \quad \begin{matrix} G & F \\ & \end{matrix} \quad \begin{matrix} F & g \\ & \end{matrix} \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Verifica: $[x \sin x + \cos x]' = \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x} = x \cos x \quad \text{Ok}$

Regola generale: $f \rightsquigarrow$ qualcosa che so integrare
 $G \rightsquigarrow$ qualcosa che derivato migliora

Esempio 2 $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x$

$G \quad f \qquad \qquad G \quad F \qquad \qquad g \quad F$

Esempio 3 $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx$

$G \quad f \qquad \qquad G \quad F \qquad \qquad g \quad F$

$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$

Resta da calcolare

$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx$

$G \quad f \qquad \qquad G \quad F \qquad \qquad g \quad F \qquad \qquad = -x \cos x + \sin x$

Tornando all'integrale iniziale:

$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

Verifica: $(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x)' = \cancel{2x \sin x} + x^2 \cos x + \cancel{2 \cos x} - \cancel{2x \sin x} + \cancel{-2 \cos x} = x^2 \cos x \quad \text{Ok,}$

— o — o —

Con questo sistema si integrano tutte le funzioni del tipo

$\int p(x) e^x dx$

$\int p(x) \sin x dx$

$\int p(x) \cos x dx$

con $p(x)$ polinomio, e anche più in generale

$\int p(x) e^{ax} dx$

$\int p(x) \sin(ax) dx$

$\int p(x) \cos(ax) dx$

$\int p(x) \sin(ax) \cos(bx) dx$

Osservazione: quando c'è un prodotto $\sin(ax) \cos(bx)$ si trasforma in somma grazie alle formule trigo. **PRODOTTO $\rightarrow$ SOMMA**

Esempio 4 $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \sin x \, dx$

G F G F g F

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

se uno procede per parti
torna indietro !!!

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Abbiamo così ottenuto che

$$\int \cos^2 x = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

GRANDE RITORNO

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x, \text{ quindi}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

Esempio 5 $\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \sin x (-\cos x) - \int \cos x (-\cos x) \, dx$

G F G F g F

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx$$

grande ritorno

da cui: $2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x, \text{ quindi}$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x$$

L'esempio 4 e 5 si potevano fare con formule trigonometriche

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \text{ Da queste si ricava che}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x).$$

— 0 — 0 —

Esempio 6 $\int \cos^3 x \, dx =$

$$\begin{aligned}&= \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos^2 x} \, dx = \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g}{\cos^2 x} - \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g}{2 \cos x} (-\sin x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \sin^2 x \, dx \\ &\quad \uparrow \text{precorso} \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \, dx - 2 \int \cos^3 x \, dx \\ &\quad \uparrow \text{grande ritorno}\end{aligned}$$

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x. \text{ Dividendo si finisce.}$$

— 0 — 0 —

Più in generale

$$\begin{aligned}\int \cos^k x \, dx &= \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos^{k-1} x} \, dx = (\underset{f}{+ \sin x}) \underset{g}{\cos^{k-1} x} - \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g}{(k-1) \cos^{k-2} x} (-\sin x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{k-2} x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{k-2} x \, dx \\ &= \sin x \cos^{k-1} x + (k-1) \underbrace{\int \cos^{k-2} x \, dx}_{\text{esponente + piccolo}} - (k-1) \underbrace{\int \cos^k x \, dx}_{\text{grande ritorno}}\end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 068

Titolo nota

16/12/2010

Esempio 1 $\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-\sin x) \, dx$

$\begin{matrix} \text{F} & \text{G} & & \text{F} & \text{G} & & \text{F} & \text{G} \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx$$

Calcolo a parte (per parti) il secondo integrale

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cos x \, dx$$

$\begin{matrix} \text{F} & \text{G} & & \text{F} & \text{G} & & \text{F} & \text{G} \end{matrix}$

F G $\rightarrow$ provare per vedere cosa succede

Tornando all'integrale iniziale abbiamo che

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \underbrace{\frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x \, dx}_{\text{grande ritorno}}$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x \quad \text{ed infine}$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x \quad \text{Verifica: ...}$$

— o — o —

Con la tecnica di "grande ritorno" si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int \cos^k x \, dx, \quad \int \sin^k x \, dx \quad (k \text{ intero positivo: ogni passaggio per parti riduce l'esponente di } 2)$$

$$\int \cos(ax) e^{\beta x} \, dx, \quad \int \sin(ax) e^{\beta x} \, dx : \text{ il grande ritorno c'è dopo 2 passaggi per parti.}$$

$$\int \cos(ax) \sin(bx) e^{\delta x} \, dx : \text{diventano i casi precedenti con prodotto } \rightarrow \text{somma.}$$

Esempio 2 $\int x^2 \cdot 2^x dx$ Mi serve $\int 2^x dx = 2^x \frac{1}{\log 2}$
 G F

volendo è un caso particolare di $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

$$\int 2^x dx = \int e^{x \cdot \log 2} dx = \text{quello di sopra con } \alpha = \log 2$$

$$\int x^2 \cdot 2^x dx = x^2 \cdot 2^x \frac{1}{\log 2} - \int 2x \cdot \frac{2^x}{\log 2} dx =$$

G F G F g F

$$= \frac{1}{\log 2} x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log 2} \int x \cdot 2^x dx$$

G F

$$= \frac{1}{\log 2} \cdot x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log 2} \left\{ x \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x - \int 1 \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x dx \right\}$$

G F g F

$$= \frac{1}{\log 2} \cdot x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log^2 2} x \cdot 2^x - \frac{2}{\log^2 2} \int 2^x dx \text{ e si finisce.}$$

— o — o —

Esempio 3 Trucco dell'1 nascosto

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x = x(\log x - 1) \end{aligned}$$

f G F G F g

Esempio 4 $\int \log(1-x^2) dx = \int \log[(1+x)(1-x)] dx =$

$$= \int \log(1+x) dx + \int \log(1-x) dx$$

$$\int \log(1+x) dx = (1+x) \log(1+x) - (1+x)$$

Formula di sopra con 1+x al posto di x: verifica !!

$$\int \log(1-x) dx = [(1-x) \log(1-x) - (1-x)] (-1)$$

↑ dovuto al fatto che c'è -x...

Esempio 5 $\int x^6 \log(x^{27}) dx = 27 \int x^6 \log x dx$

$$\int \underset{f}{x^6} \underset{G}{\log x} dx = \underset{f}{\frac{1}{7} x^7} \underset{G}{\log x} - \int \underset{f}{\frac{1}{7} x^7} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \frac{1}{7} x^7 \log x - \frac{1}{7} \int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 \log x - \frac{1}{49} x^7$$

Con questa tecnica si fanno le primitive del tipo $\int p(x) \log x dx$
↑ polinomio.

Esempio 6 $\int \frac{\log x}{x^6} dx = \int \underset{f}{\frac{1}{x^6}} \cdot \underset{G}{\log x} = -\frac{1}{5} \underset{f}{\frac{1}{x^5}} \underset{G}{\log x} - \int \underset{f}{(-\frac{1}{5} \frac{1}{x^5})} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} dx$

$$= -\frac{1}{5} \frac{\log x}{x^5} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^6} = -\frac{1}{5} \frac{\log x}{x^5} - \frac{1}{25} \frac{1}{x^5} \quad \text{Verifica...}$$

Esempio 7 $\int \arctan x dx$

$$= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} = \underset{f}{x} \cdot \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Esempio 8 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$= \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} dx = \underset{f}{(-\cos x)} \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{f}{(-\cancel{\cos x})} \cdot \underset{g}{(-\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}})} (-\sin x) dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \dots$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$0 = 1 \quad \text{!!!!!!}$$

Capire cosa è successo e perché !!!

Esempio 9 $\int_0^{\pi} |x \cos x| dx$ Bisogna capire il segno di $x \cos x$. Dipende dal segno di $\cos x$

$$|x \cos x| = \begin{cases} x \cos x & \text{in } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{dove } \cos x \geq 0) \\ -x \cos x & \text{in } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \quad \text{" } \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |x \cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} |x \cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |x \cos x| dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x dx \end{aligned}$$

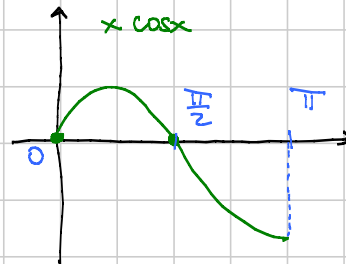
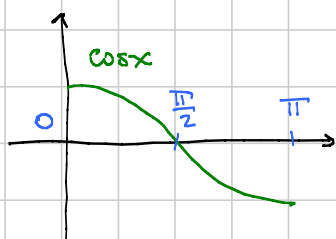
Calcolo la primitiva: $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$

$$\dots = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} - \left[x \sin x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 1 - (-1 - \frac{\pi}{2}) = \pi$$

Se fosse stato senza valore assoluto

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi} = \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 \sin 0 - \cos 0 = -2.$$

È ragionevole che sia negativo? Grafico di $x \cos x$



$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad \text{perché le 2 aree sono uguali e si compensano}$$

Quando moltiplico per x la seconda area (quella negativa) viene moltiplicata per i valori della x più grandi, quindi l'area negativa prevale.

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 069

Titolo nota

16/12/2010

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Formula fondamentale: $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Prendo $\Phi(x) = F(G(x))$ $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) G'(x) = f(G(x)) g(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Sostituisco nell'identità fondamentale:

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi'(x) dx &= \Phi(b) - \Phi(a) = F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= \int_a^b f(G(x)) g(x) dx &= [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} \\ & &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Uguagliando primo e ultimo otteniamo

$$\boxed{\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx}$$

FORMULA DI
INTEGRAZIONE
PER
SOSTITUZIONE

Interpretazione brutale: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx \quad \text{Pongo } y = G(x).$$

Come cambia $f(G(x)) \rightsquigarrow f(y)$. Come cambiano gli estremi?

Quando $x=a$ ho che $y=G(a)$. Quando $x=b$ ho che $y=G(b)$

Come cambia dx ?

$$\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x) \quad \text{"quindi"} \quad dy = g(x) dx$$

In questo modo

$$\int_{G(a)}^{G(b)} \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

Esempio 1 $\int x \cos x^2 dx$

Pongo $y = x^2$. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ cioè } dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos x^2}_{\cos y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$$

$\uparrow$
torna in x

Esempio 2 $\int x^2 e^{-x^3} dx =$

Pongo $y = x^3$. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ cioè } dy = 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \underbrace{e^{-x^3}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{3} e^{-y} = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

Esempio 3 $\int \underbrace{\sin x}_y \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dy}$

si può fare con formula di duplicazione

In alternativa pongo $y = \sin x$,

quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, $dy = \cos x dx$

$$= \int y dy$$

$$= \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

Esempio 4 $\int \sin^3 x dx$

$$= \int \underbrace{\sin x}_f \cdot \underbrace{\sin^2 x}_g dx = \underbrace{(-\cos x)}_F \underbrace{\sin^2 x}_G - \int \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{2 \sin x \cos x}_g dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

1° modo: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow$ grande ritorno

2° modo: sostituzione $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, $dy = -\sin x \, dx$

$$\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = - \int \underbrace{\cos^2 x}_{y^2} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int y^2 \, dy = -\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{3} \cos^3 x$$

In conclusione

$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x \cdot \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos^3 x$$

Esercizio: confrontare con la risposta che si ottiene con grande ritorno.

3° modo: percorso da subito: $\int \sin^3 x = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx =$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx \quad \text{Pongo } y = \cos x, \dots \quad dy = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{1 - y^2} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int (1 - y^2) \, dy = -y + \frac{1}{3} y^3 = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

Occhio! è la stessa risposta di sopra.

Osservazione: questa tecnica funziona con tutte le potenze DISPARI di $\sin x$ e $\cos x$ (in alternativa al grande ritorno)

Esempio 5 $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x \, dx$
 $= \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x \, dx$

$$\int (1 - \sin^2 x)^2 \underbrace{\cos x \, dx}_{dy} = \int (1 - y^2)^2 \, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy$$

$$= y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$$

Esercizio: confrontare svolgimento con grande ritorno.

Esempio 6 (Funziona anche con esponenti negativi)

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx & y = \cos x \Rightarrow dy &= -\sin x \, dx \\ &= - \int \frac{1}{\cos x} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} \, dy = -\log |y| = -\log |\cos x| \\ &= \log \frac{1}{|\cos x|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Esempio 7} \quad \int \frac{\log x}{x^2} \, dx &= \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_F \underbrace{\log x}_G \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \log x - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_F \underbrace{\frac{1}{x}}_G \, dx \\ &= -\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \log x - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\text{Esempio 8} \quad \int \frac{\log x}{x} \, dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{\log x}_G \, dx = \log |x| \cdot \log x - \int \underbrace{\log |x|}_F \underbrace{\frac{1}{x}}_G \, dx$$

A parte il modulo, che non serve a nulla perché da subito deve essere $x > 0$ perché abbia senso l'integrande, ho grande ritorno

$$\int \frac{\log x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \log^2 x$$

Si voleva per sostituzione ponendo $y = \log x \quad dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$\int \frac{\log x}{x} \, dx = \int \underbrace{\log x}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \, dx}_{dy} = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \log^2 x.$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 070

Titolo nota

16/12/2010

Esempio 1 $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$ $y = 1+x^2$
 $dy = 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log (1+x^2)$

Esempio 2 $\int \frac{x^3}{7+2x^4} dx$ $y = 7+2x^4$ $dy = 8x^3 dx$
 $= \frac{1}{8} \int \frac{1}{7+2x^4} \cdot 8x^3 dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{8} \log |y| = \frac{1}{8} \log (7+2x^4).$

Esempio 3 $\int \sqrt{7-5x} dx$ $y = 7-5x$ $dy = -5dx$
 $= -\frac{1}{5} \int \underbrace{\sqrt{7-5x}}_{\sqrt{y}} \underbrace{(-5)dx}_{dy} = -\frac{1}{5} \int \sqrt{y} dy = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2}$
 $= -\frac{2}{15} (7-5x)^{3/2}.$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ Provo $y = 1+x^4$ e non va...
 Provo $y = x^2$, quindi $dy = 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \arctan y = \frac{1}{2} \arctan x^2$

Esempio 5 $\int \frac{1}{1+2x^2} dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} dx$ Pongo $y = \sqrt{2}x$
 $dy = \sqrt{2} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} \cdot \sqrt{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} dy$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2}x).$

Più in generale $\int \frac{1}{1+ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan (\sqrt{a}x)$ per ogni $a > 0$.

Esempio 6 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2} dx = \text{quello precedente}$
 con $a = \frac{1}{2}$, quindi
 $= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$

Più generale $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}$ per ogni $a > 0$.

Esempio 7 $\int \log^2 x dx$ 1 nascosto !!!

$$\begin{aligned}
 &= \int \underbrace{1}_F \cdot \underbrace{\log^2 x}_G dx = x \cdot \log^2 x - \int \underbrace{x}_F \cdot \underbrace{2 \log x \cdot \frac{1}{x}}_G dx \\
 &= x \cdot \log^2 x - 2 \int \log x dx \\
 &= x \log^2 x - 2x (\log x - 1)
 \end{aligned}$$

Con la stessa tecnica si fa qualunque potenza del logaritmo.

Esempio 8 $\int \frac{1}{x \log^4 x} dx$ Pongo $y = \log x$; $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log^4 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y^4} dy = -\frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log^3 x}$$

Esempio 9 $\int \frac{1}{x \log x} dx$ $y = \log x$ $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 10 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi $y = e^x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

$$= \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y = \arctan e^x$$

Esempio 11 $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy$$

$$= \int \cos y \cdot \cos y dy$$

$$= \int \cos^2 y dy = \int \frac{\cos(2y)+1}{2} dy$$

$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$$

$$= \frac{1}{4} \sin(2y) + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{1}{2} y$$

Devo tornare in x

$$\sin y = x ; y = \arcsin x, \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}. \text{ Quindi}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

Osservazioni: si può usare l'integrazione per sostituzione "al contrario", cioè ponendo $y = \text{Mostro}(x)$ oppure $x = \text{Mostro}(y)$ (basta cambiare il nome alle variabili !!)

Molti passaggi sono stati fatti brutalmente, senza considerare problemi di segni e simili. La verifica risolve tutti i dubbi.

Esempio 12 $\int x^3 e^{-x^2} dx$ Pongo $y = x^2$, quindi $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 e^{-x^2} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy$$

corretto dopo video

$$= \frac{1}{2} \{ -e^{-y} y + \int e^{-y} dy \} = -\frac{1}{2} y e^{-y} \ominus \frac{1}{2} e^{-y}$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \overset{\text{IDEM}}{\ominus} \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Allo stesso modo faccio $\int x^{2k+1} e^{\pm x^2} dx$

Esempio 13 $\int \sin(\log x) dx$

$$y = \log x \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int x \sin(\log x) \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy}$$

$$= \int e^y \sin y dy \rightsquigarrow \text{parti + grande ritorno.} \quad \square$$

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 071

Titolo nota

18/12/2010

Integrazione delle funzioni razionali

$$\text{Funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Si integra in 4 passaggi:

- divisione
- fattorizzazione
- sistema lineare
- integrazione

- ① **DIVISIONE** Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$, allora non c'è nulla da fare, e si passa alla fase successiva.
 Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, allora faccio la divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$.
 Ottengo una scrittura del tipo

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + B(x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 quoziente resto, con $\text{grado}(B(x)) < \text{grado}(Q(x))$

Ma allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + B(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 polinomio, nuova funz. razionale, con
 che si integra $\text{grado}(\text{Num}) < \text{grado}(\text{Denom.})$

Conclusione prima fase: se si integrano le funzioni razionali con $\text{grado}(\text{Num.}) < \text{grado}(\text{Denom.})$, allora si può integrare tutte.

Esempio

$$\frac{x^3}{x^2+2} = \frac{x^3+2x-2x}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2}$$

- 2 FATTORIZZAZIONE** Scrivere il denominatore come prodotto di polinomi di 1° e 2° grado, eventualmente con molteplicità.

Fatto generale (che rivedremo con i numeri complessi): ogni polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di polinomi di 1° e 2° grado a coeff. reali. Ovviamente i fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali del polinomio. Si intende che i fattori di 2° grado non sono ulteriormente scomponibili ($\Delta < 0$)

Esempi $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$
 ↳ ulteriormente scomponibile

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$
 ↳ non ulteriormente scomponibile

$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$

$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$
 $= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $\Delta < 0 \quad \Delta < 0$

$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$
 $= x \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-1)$
 ↳ molteplicità

$x^4 + 1$ non ha radici reali, quindi non ha fattori di 1° grado nella scomposizione. Per il fatto generale DEVE essere prodotto di 2 fattori di 2° grado.

$x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2$
 $= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$
 $= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$
 $A^2 - B^2$
 $(A+B)(A-B)$

- 3 SISTEMA LINEARE** Scrivere la funzione razionale data (con grado (Num.) < grado (Den.)) come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori del denominatore iniziale.

Esempio 1 $\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = \frac{2x+3}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$

$\uparrow$
fattorizz.

Ora A e B sono costanti da determinare.

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

per avere uguaglianza deve essere

$$\begin{cases} A+B=2 & (\text{coefficiente di } x) \\ 3A+2B=3 & (\text{termine noto}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ 3A+4-2A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ A=-1 \end{cases}$$

Così abbiamo

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

In generale si procede così.

Caso semplice: tutti i fattori del denominatore hanno molteplicità 1.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{1^\circ \text{grado}} + \frac{B}{1^\circ \text{grado}} + \frac{C}{1^\circ \text{grado}} + \frac{Dx+E}{2^\circ \text{grado}} + \frac{Fx+G}{2^\circ \text{grado}}$$

cioè $\rightarrow$ sopra i fattori di 1° grado c'è una costante incognita

$\rightarrow$ sopra i fattori di 2° grado c'è un polinomio di 1° grado a coefficienti incogniti

Esempio 2 $\frac{x^2+1}{x^3+2x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

$$= \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & (\text{coeff. } x^2) & B=\frac{1}{2} \\ C=0 & (\text{coeff. } x) & C=0 \\ 2A=1 & (\text{termine noto}) & A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $\frac{x^2+1}{x^3+2x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+2}$

Consiglio: fare la verifica al termine della fase 3.

Caso generale: se ci sono molteplicità maggiori di 1.

$$\frac{\dots}{(x-1)(x-2)^3(x+5)^2(x^2+1)(2x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+5} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{2x^2+3} +$$

$$+ \frac{d}{dx} \frac{Hx^6 + Ix^5 + Lx^4 + Mx^3 + Nx^2 + Ox + P}{(x-2)^2(x+5)(2x^2+3)^2}$$

Fino qui come se non ci fossero molteplicità

↑ ponte: inutilizzata del denominatore

← generico polinomio con grado minore di 1 rispetto al denominatore

Osservazione: Quante sono le incognite? Tante quante il grado del denominatore iniziale.
 Quante sono le equazioni? Tante quanti i coeff. del numeratore iniziale, che però sono tanti quanto il grado del denom. iniziale.

Fatto generale: il sistema lineare che viene fuori dalla fase 3 ha sempre SOLUZIONE UNICA (e tante equazioni quante incognite).

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 072

Titolo nota

18/12/2010

Integrazione funzioni razionali (parte 2)

Al termine del sistema lineare abbiamo scritto $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come somma di addendi di 3 tipi:

- $\frac{d}{dx}$ Mostro₁ . Questo si integra banalmente togliendo il $\frac{d}{dx}$
Mostro₂
- $\frac{a}{bx+c}$ (provenivano dai fattori di 1° grado del denominatore)

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = \frac{a}{b} \log|bx+c| \quad (\text{volendo posso } y=bx+c \text{ e vado per sostituzione})$$

- $\frac{dx+\beta}{ax^2+bx+c}$ con denominatore non ulteriormente scomponibile (cioè $b^2-4ac < 0$)

Volendo c'è una formula, la funzione dei 5 parametri...
Vediamo di illustrarla in un po' di esempi.

Esempio 1 $\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$
 $= \log(x^2+1) + 3 \arctan x$

Esempio 2 $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1)$
 ↑ volendo $y=x+1$

Esempio 3 $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2} dx$ Mi aspetto un po' di log per sistemare la x e arctan per sistemare il termine noto

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1)$$

Esempio 4 $\int \frac{5x-3}{x^2+4x+7} dx$

Denominatore: x^2+4x+7

Derivata denum: $2x+4$

Vedo di far saltar fuori un $2x$ al numeratore

$$\begin{aligned} \frac{5x-3}{x^2+4x+7} &= \frac{5}{2} \frac{2x - \frac{6}{5}}{x^2+4x+7} = \\ &= \frac{5}{2} \frac{2x+4 - \frac{6}{5} - 4}{x^2+4x+7} = \frac{5}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+7} - \frac{5}{2} \cdot \frac{26}{5} \frac{1}{x^2+4x+7} \\ &= \frac{5}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+7} - \frac{13}{x^2+4x+7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+4x+7} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx - 13 \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx \\ &= \frac{5}{2} \log(x^2+4x+7) - 13 \int \frac{1}{3+(x+2)^2} dx \\ &\quad \text{essendo } 4 < 0 \text{ il polinomio} \\ &\quad \text{è sempre } > 0 \\ &= \frac{5}{2} \log(x^2+4x+7) - 13 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}}}_{\text{formula per } \int \frac{1}{a+y^2} dy} \end{aligned}$$

Esempio 1 $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$

① Divisione: divido x^3 per x^2-1

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 + x \\ \hline x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2-1 \\ x \end{array}$$

Quindi $x^3 = x(x^2-1) + x$, quindi

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1) + x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}, \text{ quindi}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \log|x^2-1|$$

Più breve ancora: $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int \frac{x^3-x+x}{x^2-1} dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx = \dots$

Esempio 2 $\int \frac{dx}{x^2-1}$ Divisione non serve

② Fattorizzazione $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

③ Sistema Lineare

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{(coeff. } x) \\ -A+B=1 & \text{(termine noto)} \end{cases} \begin{cases} B=-A \\ -2A=1 \end{cases} \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

④ Integrazione: $\int \frac{1}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1}$

$$= -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{1/2}$$

Osservazione Modo alternativo di risolvere il sistema lineare.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \text{Moltiplico tutto per } x+1:$$

$$\frac{1}{x-1} = A + \frac{B(x+1)}{x-1} \quad \text{Metto } x=-1$$

$$-\frac{1}{2} = A + 0$$

Moltiplico per $(x-1)$: $\frac{1}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$ Metto $x=1$: $\frac{1}{2} = B$

Esempio 2 $\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$ ① Divisione non serve

② Fattorizzazione:

$$(x^2-4)^2 = (x+2)^2(x-2)^2$$

③ Sistema Lineare

$$\frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2-4}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C(x^2-4) - 2x(Cx+D)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)(x-2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + Cx^4 - 4C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2-4)^2}$$

= ... conto.

Esempio 3 $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ ① e ② : banali
③ Sistema lineare

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A=0 & (\text{coeff. } x^3) & A=0 \\ B-C=0 & (\text{coeff. } x^2) & B=C=\frac{1}{2} \\ A-2D=0 & (\text{coeff. } x) & D=0 \\ B+C=1 & (\text{termine noto}) \end{cases}$$

Quindi $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$

Quindi $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$$

x aggiunta dopo video

[Verifica finale ...]

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 073

Titolo nota

18/12/2010

Sostituzioni razionalizzanti: integrali di funzioni strane che si riducono a funzioni razionali con opportune sostituzioni.

Esempio 1 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ Pongo $y = e^x$, quindi $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \arctan e^x$$

Esempio 2 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ Pongo $y = e^x$, quindi $dy = e^x dx$: mi devo procurare e^x al numeratore

$$= \int \frac{1}{e^x} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{y} \frac{1}{1+y^2} dy \quad \text{è diventato razionale}$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A+Ay^2+By^2+Cy}{y(1+y^2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{(coeff. } x^2) \\ C=0 & \text{(coeff. } x) \\ A=1 & \text{(termine noto)} \end{cases} \quad \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{matrix} \quad \frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}$$

$$\int \frac{1}{y} \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{y}{1+y^2} dy = \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

$$\text{Tornando in } x: \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) \\ = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

Metodo alternativo: $y = e^{2x}$ $dy = 2e^{2x} dx$: serve $2e^{2x}$ al num.

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^{2x}} \frac{2e^{2x} dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(y+1)}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \quad \text{con conti o occhio} \dots = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

Quindi $\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{y+1} dy = \log|y| - \log|y+1|$
 $= \log \left| \frac{y}{y+1} \right|$

Tornando in x :

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(y+1)} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \log e^{2x} - \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1)$$

$$= x - \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1)$$

Lo stesso metodo funziona per tutte le integrande del tipo
 funzione razionale di e^x o di a^x .

Esercizio 3 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx$ Pongo $y = \sqrt{x}$, quindi $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
 quindi mi devo procurare $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{y^2+3}{y-2} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^3+3y}{y-2} dy$$

[In alternativa: pongo $y = \sqrt{x}$, quindi $x = y^2$, quindi $dx = 2y dy$, quindi
 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx = \int \frac{y^2+3}{y-2} \cdot 2y dy$ e si ottiene lo stesso integrale]

Per integrare $\frac{y^3+3y}{y-2}$ occorre fare la divisione

$$\begin{array}{r} y^3 + 3y \\ - y^3 + 2y^2 \\ \hline 2y^2 + 3y \\ - 2y^2 + 4y \\ \hline 7y \\ - 7y + 14 \\ \hline 14 \end{array}$$

Quoziente
Residuo

Dalla divisione deduco che

$$y^3+3y = (y-2)(y^2+2y+7) + 14$$

Quoz. resto

da cui

$$\frac{y^3+3y}{y-2} = y^2+2y+7 + \frac{14}{y-2}$$

$$\int \frac{y^3+3y}{y-2} dy = \int (y^2+2y+7) dy + \int \frac{14}{y-2} dy = \frac{y^3}{3} + y^2 + 7y + 14 \log|y-2|$$

Tornando nella variabile x si ha che

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx = 2 \int \frac{y^3+3y}{y-2} dy = \frac{2}{3} y^3 + 2y^2 + 14y + 28 \log |y-2|$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2x + 14\sqrt{x} + 28 \log |\sqrt{x}-2|$$

Esempio 4 $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x}-2} dx$ Pongo $y = \sqrt[3]{x}$, quindi $x = y^3$,
quindi $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{y^3+3}{y-2} \boxed{3y^2 dy} \text{ da qui in poi è razionale}$$

Esempio 5 $\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}-2} dx$ Pongo $y = \sqrt[6]{x}$ (in questo modo avrò
che $\sqrt{x} = y^3$ e $\sqrt[3]{x} = y^2$)
quindi $x = y^6$, quindi $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{y^3+3}{y^2-2} \cdot 6y^5 dy \text{ ed è diventato razionale.}$$

Esempio 6 $\int \sqrt{\frac{2x+3}{x-5}} dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{2x+3}{x-5}}$ e ricavo x

$$= \int y \left[\frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]' dy$$

$$y^2 = \frac{2x+3}{x-5}, \quad xy^2 - 5y^2 = 2x+3$$

$$x(y^2-2) = 5y^2+3, \quad x = \frac{5y^2+3}{y^2-2}$$

è diventato razionale e
lo posso fare in 2 modi.

$$dx = \left[\frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]' dy$$

1° modo: calcolo la derivata e parto con l'algoritmo per le funzioni razionali.

2° modo: per parti!

$$\int \underbrace{y}_{G} \underbrace{\left[\frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]'}_F dy = \underbrace{y}_{G} \cdot \underbrace{\frac{5y^2+3}{y^2-2}}_F - \int \underbrace{1}_{G} \cdot \underbrace{\frac{5y^2+3}{y^2-2}}_F dy$$

e questo si fa facilmente.

Con questa tecnica si fanno tutti gli integrali che contengono

$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, anche tante radici con tanti k diversi (basta prendere il minimo comune multiplo tra gli indici delle varie radici)

La cosa importante è che l'argomento delle varie radici sia lo stesso.

$$\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}+1} dx \quad \text{Questo è un problema !!!}$$

— o — o —

Esempio 7 $\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx$
 $= \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \int (1 - y^2) \, dy$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad y = \sin x$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \sin^2 x)^2} \quad \begin{array}{l} \text{Pongo } y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx \end{array}$$

$$= \int \frac{dy}{(1 - y^2)^2} \quad \text{ed è razionale} \quad (1 - y^2)^2 = (1 + y)^2 (1 - y)^2$$

$$\frac{1}{(1 - y^2)^2} = \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} + \frac{d}{dy} \frac{Cy + D}{1 - y^2}$$

e da qui in poi sono facili conti.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 074

Titolo nota

18/12/2010

Primitive di funzioni del tipo $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}}$ Esempio 1 $\int \sqrt{2+x^2} dx$ Pongo $\sqrt{2+x^2} = x+y$ Ricavo x

$$2+x^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Nella variabile x diventa di 1° grado, quindi si può ricavare senza fare radici

$$2xy = 2 - y^2, \quad x = \frac{2-y^2}{2y}$$

$$dx = \left[\frac{2-y^2}{2y} \right]' dy$$

$$= \int \frac{2-y^2+y^2}{2y} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2}{y} - y \right]' dy = \frac{1}{4} \int \frac{2+y^2}{y} \left[-\frac{2}{y^2} - 1 \right] dy$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2+y^2}{y} \frac{-2-y^2}{y^2} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{(2+y^2)^2}{y^3} dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{4+4y^2+y^4}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{4}{y^3} + \frac{4}{y} + y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} - \log(y) - \frac{1}{8} y^2 \quad \text{Al posto di } y \text{ devo mettere } \sqrt{2+x^2} - x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{2+x^2}-x)^2} - \log |\sqrt{2+x^2}-x| - \frac{1}{8} (\sqrt{2+x^2}-x)^2$$

Esempio 2 $\int \sqrt{5x^2+6x+7} dx$ Pongo $\sqrt{5x^2+6x+7} = \sqrt{5}x+y$ Quando ricavo x ottengo

$$5x^2+6x+7 = 5x^2+y^2+2\sqrt{5}xy$$

Nella variabile x è diventato di 1° grado, quindi si ricava.Allo stesso modo si gestiscono integrali con $\sqrt{ax^2+bx+c}$ purché $a > 0$.

Esempio 3 $\int \sqrt{-x^2-4x+5} \, dx = \int \sqrt{-(x^2+4x-5)} \, dx$
 $= \int \sqrt{-(x+5)(x-1)} \, dx$

Scego uno a caso dei 2 fattori, ad esempio $(x+5)$ e pongo

$$\sqrt{-(x+5)(x-1)} = (x+5)y \quad \text{Quando ricavo } x \text{ ottengo}$$

$$-(x+5)(x-1) = (x+5)^2 y^2$$

Ancora una volta come equazione in x è di primo grado, quindi posso ricavare x senza fare radici quadrate

$$-x+1 = xy^2+5y^2$$

$$x(y^2+1) = 1-5y^2, \quad x = \frac{1-5y^2}{y^2+1}$$

quindi $dx = \left[\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right]' dy$. Tornando all'integrale:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2-4x+5} \, dx &= \int (x+5)y \left[\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right]' dy \\ &= \int \left(\frac{1-5y^2}{y^2+1} + 5 \right) y \left(\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right)' dy \end{aligned}$$

e questo è razionale e si fa!!!
 $\frac{1}{0} \quad \frac{0}{0}$

Questa tecnica funziona tutte le volte che posso scomporre il polinomio sotto radice, quindi tutte le volte che $\Delta > 0$.

Riassunto

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\lambda = \text{radice del polinomio}$
$a > 0$	$\sqrt{} = \sqrt{a}x+y$ $\sqrt{} = (x-\lambda)y$	$\sqrt{} = \sqrt{a}x+y$	
$a < 0$	$\sqrt{} = (x-\lambda)y$		$\leftarrow$ ho radice di un pol. di 2° grado che è sempre < 0 , quindi non è mai definita.

Esempio 4 $\int \sqrt{4-x^2} dx$

$$= \int (x-2) y \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} \right)' dy$$

$$= \int \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} - 2 \right) y \left(\right)' dy$$

$$\sqrt{4-x^2} = (x-2) y$$

$$\sqrt{-(x+2)(x-2)} = (x-2) y$$

$$-(x+2)(x-2) = (x-2)^2 y^2$$

$$-x-2 = xy^2 - 2y^2$$

$$x(y^2+1) = 2y^2-2$$

$$x = \frac{2y^2-2}{y^2+1}$$

$$= \int \frac{2y^2-2-2y^2-2}{y^2+1} y \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} \right)' dy = -8 \int \frac{y}{y^2+1} \frac{2y(y^2+1)-2y(y^2-1)}{(y^2+1)^2} dy$$

$$= -8 \int \frac{y \cdot 4y dy}{(y^2+1)^3} = -32 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^3} dy$$

Impostazione: $\frac{y^2}{(y^2+1)^3} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{d}{dy} \frac{Cy^3+Dy^2+Ey+F}{(y^2+1)^2}$

con un po' di conti viene (Punito!!!)

Alternativa: pongo $x = 2 \sin y$, da cui $dx = 2 \cos y dy$. Ottengo:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \int \sqrt{4-4 \sin^2 y} \cdot \frac{2 \cos y dy}{dx} = 4 \int \cos^2 y dy$$

fatto ai vari modi

$$= 4 \left(\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sin y \cos y \right)$$

$$= 2y + 2 \sin y \sqrt{1-\sin^2 y} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + x \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$\uparrow$
 $y = \arcsin \frac{x}{2}$

(confrontare con la risposta ottenuta al p.to precedente).

Esempio 5 $\int \sqrt{4+x^2} dx$

1° modo: $\sqrt{4+x^2} = x+y$ e trova

2° modo: $x = 2 \sinh y$, quindi

$$dx = 2 \cosh y dy$$

$$= \int \sqrt{4+4 \sinh^2 y} 2 \cosh y dy = 4 \int \cosh^2 y dy$$

Per integrare $\cos^2 y$ ci sono 3 modi (almeno)

→ usare formula per $\cos(2y)$

→ parti + grande ritorno

→ sostituire la formula con gli esponenziali e integrare !!!
(confrontare i risultati). — o — o —

Se non funziona null'altro, provare le formule parametriche!

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{dove } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{Ricavo } x: \frac{x}{2} = \arctan t, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\text{Esempio 6} \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

formula
parametrica

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\text{In alternativa: } \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= - \int \frac{dy}{1-y^2} \quad \text{e da qui si conclude}$$

↑
 $y = \cos x$

(confrontare con risposta precedente)

$$\text{Esempio 7} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

1° modo: formule parametriche

2° modo: viene $\tan x \dots$

(primitiva elementare !!!)

— o — o —

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 075

Titolo nota

21/12/2010

INTEGRALI IMPROPRI

Integrali propri: $\rightarrow$ zona di integr. limitata
 $\rightarrow$ funzione integranda limitata

Se mancano una o entrambe le condizioni, l'integrale è improprio.

Esempi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

funzione limitata
 zona integr. non lim.

funzione non lim.
 zona integr. lim.

Manca
 tutto

**INTEGRALI IMPROPRI MONOPROBLEMA**

= un problema solo

Ce ne sono di 2 tipi.

$\rightarrow$ zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$
 funzione integranda limitata

$\rightarrow$ zona di integrazione = intervallo $[a, b]$, quindi limitata
 funzione integranda non limitata nell'intorno di uno dei due estremi (e altrove senza problemi).

Un integrale improprio con tanti problemi si spezza in tanti integrali impropri monoprobema.

Esempi
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{12} \frac{1}{x^2} dx + \int_{12}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

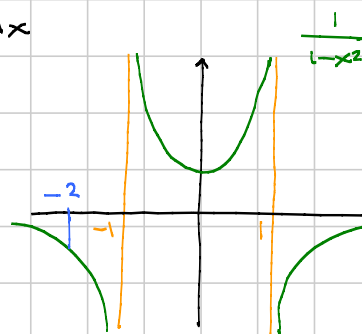
$\uparrow$
 problema =
 funzione in $x=0$

$\uparrow$
 problema = zona di
 integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{15} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{15}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

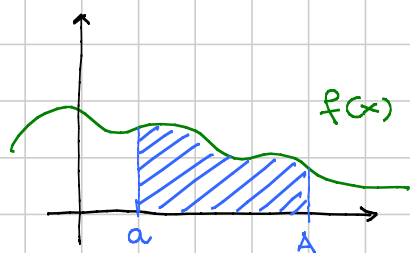
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

6 integrali monoprobema



Studio degli integrali monoproblema

Caso $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ con f limitata



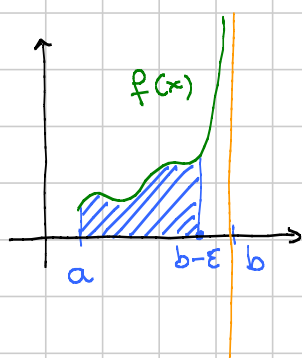
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty}$$

$\int_a^A f(x) dx$
essendo $f(x)$ limitata,
questo è un integrale
le proprio.

Essendo un limite, ci sono 4 tipi di comportamento possibile

- convergere ad un numero $l \in \mathbb{R}$
- divergere a $+\infty$
- " " $-\infty$
- essere indeterminato.

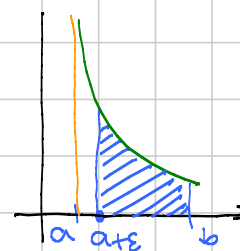
Caso $\int_a^b f(x) dx$. Supponiamo che il problema sia in $x = b$.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Se il problema è in $x = a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



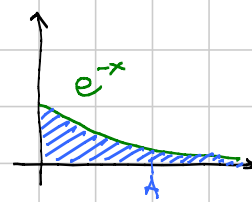
Ancora una volta i possibili comportamenti sono 4 (i soliti).

Se l'integrale ha tanti problemi, si procede così:

- si studiano i vari pezzi monoproblema in cui è stato scomposto
- si sommano i vari pezzi con le regole algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$, con l'accordo che se un pezzo diverge a $+\infty$ e un altro diverge a $-\infty$, allora quello generale si dichiara indeterminato.

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + e^0) = e^0 = 1$$



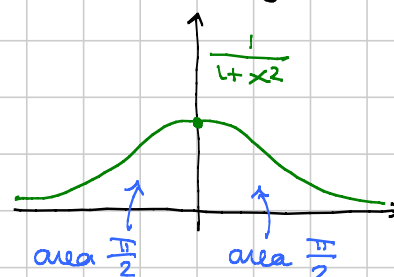
Esempio 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ lo spezzo in 2: $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

I 2 pezzi hanno lo stesso tipo di comportamento essendo l'integranda una funzione pari

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan A - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$



L'altro pezzo è uguale per simmetria, quindi tutto converge a π

Esempio 3 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ Ci sono 2 problemi:
 $x=2$ e $x=+\infty$

Quindi spezzo in $[2,3]$ e $[3,+\infty)$

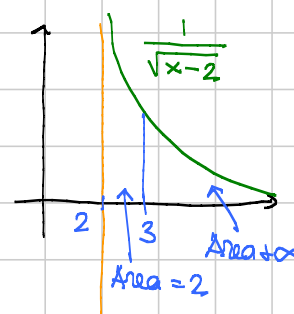
$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x-2}]_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{3-2} - 2\sqrt{2+\varepsilon-2})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x-2}]_3^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A-2} - 2) = +\infty$$

Un pezzo converge a 2, un pezzo diverge a $+\infty \Rightarrow$ il globale diverge a $+\infty$.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 076

Titolo nota

21/12/2010

Studio della convergenza di integrali impropri senza passare attraverso primitiva + limite.

Integrandi a segno costante (positivo): Intanto i comportamenti possibili sono solo due (convergere o divergere a $+\infty$)

→ confronto

→ confronto asintotico (casi standard e casi limite)

→ tabellina di integrali impropri classici (per cui si conosce il comportamento) con cui confrontare

Integrandi a segno variabile:

→ assoluta integrabilità

→ trucco dell'integrazione per parti.

Integrali impropri classici

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_1^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log A - \log 1] = +\infty \Rightarrow \text{diverge}$$

Esempio 2 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A$

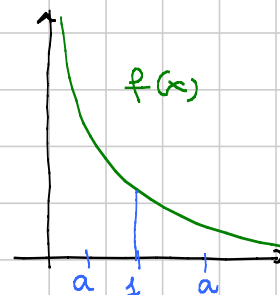
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{1}\right) = 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Esempio 3 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x}]_1^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A} - 2\sqrt{1}) = +\infty \Rightarrow \text{diverge}$$

Osservazione: se invece di usare 1 come estremo, usavo un qualunque $a > 0$, il tipo di comportamento non cambierebbe. Può cambiare solo il valore a cui eventualmente converge.

Infatti la differenza tra l'integrale in $[1, +\infty)$ e quello in $[a, +\infty)$ è l'integrale in $[1, a]$ oppure $[a, 1]$ e questo è un integrale proprio, cioè un numero.



Esempio 4
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-\alpha} dx$$

$\nearrow$ $= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right]_1^A$

$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{1-\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha} \right]$

vale se $\alpha \neq 1$, ma il caso $\alpha=1$ l'abbiamo fatto a parte

Quanto fa il limite? Dipende da α :

- se $\alpha > 1$, allora "A è al denominatore" e il limite è $\frac{1}{\alpha-1}$, quindi l'integrale improprio converge al valore positivo $\frac{1}{\alpha-1}$,
- se $\alpha < 1$, allora "A è al numeratore", quindi il limite è $+\infty$ (moltiplicato un coeff. positivo), quindi l'integrale diverge a $+\infty$
- se $\alpha = 1$, si fa come l'esempio 1 e diverge.

Conclusione

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx =$	$\nearrow$	converge a $\frac{1}{\alpha-1}$	se $\alpha > 1$
	$\searrow$	diverge a $+\infty$	se $\alpha \leq 1$

Comportamento dell'integrale improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$ con unico problema a $+\infty$ (posso sostituire l'estremo $x=1$ con un qualunque $a > 0$)

Osservazione Con gli integrali siamo riusciti a dimostrare perché si sa fare la primitiva.

Esempio 5 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3 x} dx$ (se partissi da $x=1$ avrei 2 problemi)

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3 x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log^3 x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 x} \right]_2^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 A} + \frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 2} \right] \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{volendo} \\ y = \log x \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 2}, \text{ quindi converge.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esempio 6} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log(\log x)]_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \log(\log A) - \log(\log 2) \\ &= +\infty, \text{ quindi diverge.} \end{aligned}$$

Più in generale (esercizio)

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x} dx$	↗ converge	se $\alpha > 1$
	↘ diverge	se $\alpha \leq 1$

$$\text{Esempio 7} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2, \text{ quindi converge}$$



$$\text{Esempio 8} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \varepsilon) = +\infty, \text{ quindi diverge.}$$

$$\text{Esempio 9} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1$$

(caso $\alpha=1$ fatto
a mano)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

Il limite dipende dal valore di α :

- se $\alpha > 1$, il termine con ε è al denominatore, quindi tende a $+\infty$ e ha davanti il coeff. $\frac{1}{\alpha-1}$ che è positivo, quindi diverge a $+\infty$;
- se $\alpha < 1$, il termine con ε è come fosse al numeratore, quindi tende a 0 e l'integrale converge a $\frac{1}{1-\alpha}$, che in questo caso è un numero positivo.

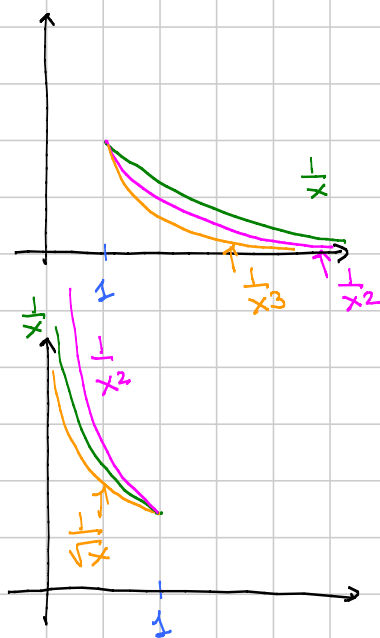
Tenendo conto del caso $\alpha=1$, abbiamo che

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$	$\rightarrow$ converge a $\frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ $\rightarrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$	Integrale improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$ con problema unico in $x=0$
----------------------------------	---	---

Conseguenza: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: infatti ha sempre 2 problemi ed almeno uno dei 2 pesi diverge (nel caso $\alpha=1$ entrambi i pesi divergono).

— o — o —

Interpretazione geometrica



In $[1, +\infty)$ più l'esponente è grande, più la funzione è piccola, più è facile che l'integrale improprio converga.

In $[0, 1]$ le cose si scambiano: più l'esponente è grande e più la funzione è grande, quindi più è facile che l'integrale improprio diverga.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 077

Titolo nota

21/12/2010

Criteri per studio della convergenza $\int_E f(x) dx$: questa notazione riassume i 2 tipi di integrale improprio: E può essere un intervallo o una semiretta.

Criterio del confronto : supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$
Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

Altre implicazioni non ce ne sono.

Osservazione La relazione $0 \leq f(x) \leq g(x)$ non serve che sia verificata per ogni $x \in E$, ma basta che sia verificata "in un intorno del problema".
— o — o —

Criterio del confronto asintotico. Supponiamo $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
 $g(x) > 0 \quad \forall x \in E$

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \neq +\infty$$

dove x_0 è il punto in cui c'è il problema ($+\infty$ se l'integrale è su una semiretta, è uno degli estremi dell'intervallo nell'altro caso)

Allora

$$\int_E f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_E g(x) dx$$

hanno lo stesso tipo di comportamento.

Achtung! Si assume che entrambi siano mai problema ed abbiano il problema nello stesso x_0 .

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 6}{x} dx$

L'integranda ha segno costante.

Criterio del confronto:

$\frac{\sin x + 6}{x} \geq \frac{5}{x}$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{5}{x} dx$ diverge, anche quello dato diverge.

Num. ≥ 5

Esempio 2 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 6}{x\sqrt{x}} dx$

Ancora una volta ho integranda positiva e uso confronto.

$\frac{\sin x + 6}{x\sqrt{x}} \leq \frac{7}{x\sqrt{x}}$

L'integrale di $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ con problema a $+\infty$ converge (esponente $\frac{3}{2} > 1$), quindi l'integrale dato converge.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{20x^3+5x+7} dx$

Il denominatore è sempre > 7 , quindi non ci sono problemi di limitatezza. L'unico problema è $+\infty$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{10x^2}$ per x grandi.

Facciamo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{20x^3+5x+7} \cdot x^2 = \frac{1}{10} \neq 0 \neq +\infty$

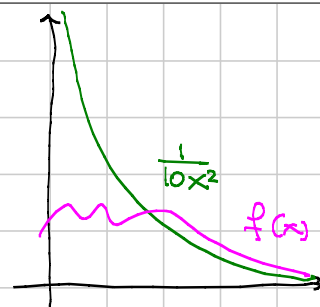
Quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, quindi diverge.

NO!!!!!! Bisogna fare il confronto asintotico solo tra integrali monoproblema!!! Avendo fatto il limite per $x \rightarrow +\infty$, ed essendo venuto $\neq 0$ e $\neq +\infty$, posso dedurre che

l'integrale improprio di $f(x)$ con unico problema a $+\infty$ si comporta come l'integrale improprio di $g(x)$ con unico problema a $+\infty$. Ora $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge, quindi quello dato converge.

Interpretazione grafica: la $f(x)$ data si comporta come $\frac{1}{10x^2}$ per valori grandi di x .

L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{10x^2} dx$ diverge per colpa del comportamento vicino a $x=0$, ma lì $f(x)$ e $\frac{1}{10x^2}$ non hanno nulla a che fare.



Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$ Ci sono 2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$, quindi spesso

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

Considero $\int_1^{+\infty}$. Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x} + x^2} = 1$. L'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con unico problema a $+\infty$ converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema a $+\infty$ converge.

Considero $\int_0^1 f(x) dx$. Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} = 1$.

↑ problema

L'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con unico problema a 0 converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema in $x=0$ converge.

Quello globale converge perché somma di 2 pezzi convergenti.

Esempio 5 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ In $[0,1]$ $\sin x$ si annulla solo in 0

Brutale: $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$, quindi è come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, cioè diverge.

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+3}} dx$ Integranda $f(x) \geq 0$
Unico problema a $+\infty$

Brutale: $f(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{3/2}}$ $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge.

Rigroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \dots$ convergenza.

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ Due problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$: $f(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ converge

$\int_0^1 f(x) dx$: $f(x) \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ diverge. (Ho usato $\arctan x \sim 0$ per $x \rightarrow 0$)

Rigrosamente: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty \dots$$

Esempio 8 $\int_0^{+\infty} x^8 e^{-\sqrt{x}} dx$ $f(x) \geq 0$ sempre. Unico problema a $+\infty$

Tifo per l'esponenziale, e provo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{10} e^{-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{10 \log x - \sqrt{x}} [e^{-\infty}] = 0$$

Caso limite di confronto asintotico

[se $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, quindi

$f(x) \leq g(x)$ vicino al problema]

L'integrale di $g(x) = \frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$ converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con problema a $+\infty$ converge.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 078

Titolo nota

22/12/2010

Integrali impropriAssoluta integrabilità. Per integrali impropri monoproblema si ha che

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ BOH}$$

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3} dx$ Unico problema: $+\infty$
Integranda $f(x)$ ha segno variabile

Studio $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+3} dx$ a questo applico il confronto semplice:

$$\frac{|\cos x|}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2+3} \text{ per ogni } x \geq 0.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3} dx$ converge per confronto asintotico con l'integrale di $\frac{1}{x^2}$
con unico problema a $+\infty$

$\Downarrow$
 $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+3} dx$ converge per confronto tra integrande ≥ 0

$\Downarrow$
 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3} dx$ converge per assoluta integrabilità.

Da non dire e non pensare nemmeno (achtung!)

$$\frac{\cos x}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2+3} \text{ per ogni } x \geq 0$$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3} dx$ converge, quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3} dx$ converge per confronto

$\uparrow$
No! Il confronto vale soltanto quando si hanno integrande ≥ 0 .

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ Ci sono 2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Il secondo lo gestisco come prima.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge (perché $\frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} dx$ converge

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ converge

↑
confronto tra
integrande ≥ 0

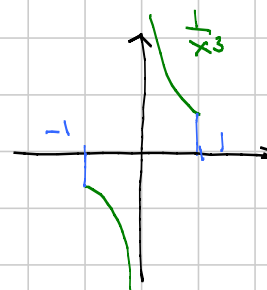
Considero ora $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$. Intanto l'integrande è ≥ 0 (ovunque, ma basta vicino a $x=0$, dove c'è il problema)

Brutale: $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow$ convergenza

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Esempio 3 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ se uno fa la primitiva e sostituisce gli estremi viene 0. Non va bene perché è improprio e bisogna spezzarlo

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } +\infty}$$



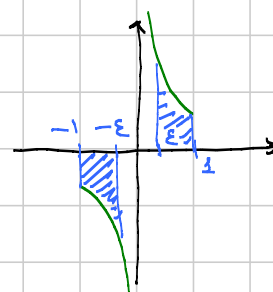
Per definizione l'integrale globale è indeterminato.

Osservazioni: se io faccio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx \right) = 0 \quad (\text{i 2 pezzi sono finiti e si cancellano per simmetria})$$

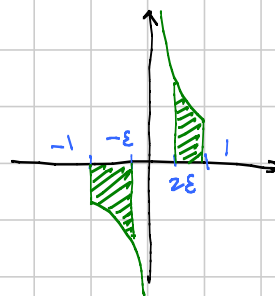
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{\varepsilon}^1 \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} + -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = 0$$



Ora faccio il "buco" tra $-\varepsilon$ e 2ε . L'ampiezza del buco è 3ε , quindi $\rightarrow 0$. Faccio lo stesso conto:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{2\varepsilon}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot 1} - \cancel{\frac{1}{2} \cdot 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\varepsilon^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = -\infty \end{aligned}$$



Esercizio: trovare un "modo di fare il buco" in modo che l'ampiezza tenda a 0, ma l'integrale tenda a 2011.

Fatto generale: se l'integrale è fatto da tutti pezzi convergenti, il risultato del limite è sempre lo stesso purché l'ampiezza del buco tenda a 0 (il risultato è il valore dell'integrale)

Se invece ho un pezzo che diverge a $+\infty$ e uno che diverge a $-\infty$, allora buchi diversi producono al limite risultati diversi (anche se l'ampiezza va a zero).

_ 0 _ 0 _ 0 _

Se il problema è in un punto diverso da zero? Si riporta in $x=0$ mediante cambio di variabili!!

Esempio 4 $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ il problema è in $x=2$.

Abbastanza brutale: $y = x-2$. Quando $x=2$ ho $y=0$ $dy = dx$
Quando $x=3$ ho $y=1$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy$, quindi converge. La brutalità sta nell'uso dell'integrazione per sostituzione con gli integrali impropri, che però si giustifica molto facilmente

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \stackrel{\boxed{y=x-2}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$\uparrow$ a è fisso è un integrale proprio

Tabellina Dato un intervallo $[a, b]$ ho che

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge per } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge per } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Infatti con la sostituzione $y = x - a$ diventa

$$\int_0^{b-a} \frac{1}{y^\alpha} dy \quad \text{con problema in } y=0$$

Analogamente

$$\int_a^b \frac{1}{|b-x|^\alpha} dx = \int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge per } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge per } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Sostituzione: $y = b - x \dots$ (occhio che $dy = -dx$).

Esempio 5

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 \log x} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx$$

converge: c'è x^2 e $\log x$ aiuta;
confronto asintotico con $\frac{1}{x^2}$
e viene un caso limite

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \log x} dx$$

Pongo $y = x - 1 \quad dy = dx$

Quando $x=1$ ho che $y=0$

Quando $x=2$ ho che $y=1$

Diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2 \log(y+1)} dy$$

Brutale:

$$\frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)} \sim \frac{1}{y} \Rightarrow \text{diverge.}$$

Rigoroso: C.A. con $g(y) = \frac{1}{y}$: $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{(y+1)^2} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$
 $\neq 0$
 $\neq \pm \infty$
 $\dots$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 079

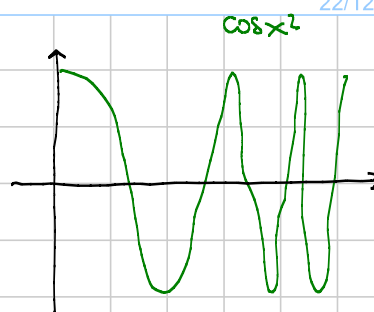
Titolo nota

22/12/2010

Trucco integrazione per parti

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{è a segno variabile}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$$



Quindi basta studiare il secondo:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos(x^2) dx && \text{(moltiplico e divido per } 2x \text{ perché sono lontano da 0)} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{2x} \sin(x^2) \right]}_G \right)_1^A - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{\sin 1}{2}}_{\text{Numero}} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin x^2}{x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx \end{aligned}$$

Grazie all' x^2 sotto posso dire che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x^2|}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx \text{ converge}$$

Ma allora $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge.

Allo stesso modo si tratta $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$ e $\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx$
 purché $\alpha > 1$.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ se provo assoluta convergenza + confronto
come sempre ottengo BOR

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{questo non ha problemi perché}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Questo non ha problemi perché $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$, quindi
 $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x \in (0, 1]$, quindi
è una funzione limitata !!!

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} \sin x dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx \right)$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$$= \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{converge perché c'è } x^2 \text{ sotto.}}$$

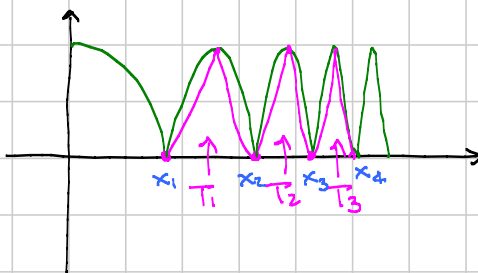
Back to esempio 1

$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge, ma la funzione
integrandata $\cos(x^2)$ non ha
limite per $x \rightarrow +\infty$, in particolare
non tende a zero.

Quindi anche per gli integrali impropri con problema a $+\infty$
NON c'è l'equivalente della condizione necessaria per la serie.

Método dei TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$$



$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = \text{area sotto la funzione}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k)$$

Dove si annulla $\cos(x^2)$? Dove $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

Base triangolo T_k ha lunghezza $x_{k+1} - x_k$

Altezza triangolo $T_k = 1$, quindi

$$\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right)$$

si razionalizza e si vede che diverge. Visto che la serie diverge, anche l'integrale diverge.

Esempio bon $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^{30} + \int_{30}^{+\infty}$
 $\sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{converge}$

Considero il primo:

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 colpevole diventa $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con problema a 0 $\Rightarrow$ converge.

tranquillo

BUON NATALE!

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 080

Titolo nota

11/01/2011

NUMERI COMPLESSI

Tre modi di presentarli:

→ forma CARTESIANA

→ forma TRIGONOMETRICA

→ forma ESPONENZIALE

FORMA CARTESIANA $z \in \mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

$$z = x + y i$$

 x e y sono numeri reali i = unità immaginaria = oggetto tale che $i^2 = -1$

$$x = \text{parte reale di } z = \operatorname{Re}(z) = \mathcal{R}(z)$$

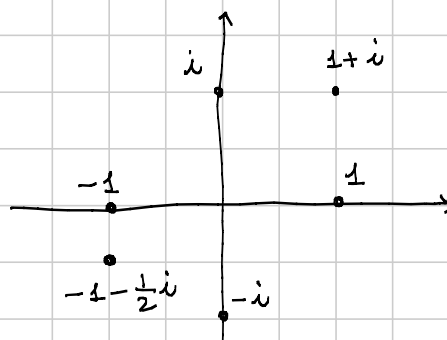
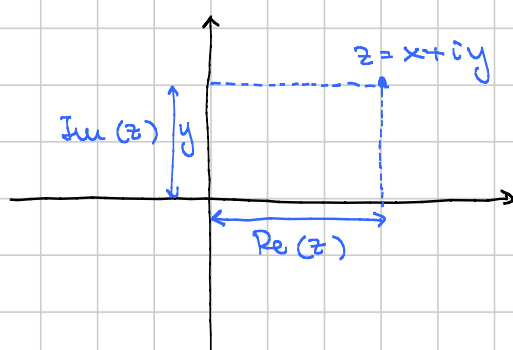
$$y = \text{parte immaginaria di } z = \operatorname{Im}(z) = \mathcal{I}(z)$$

Oss. Parte reale e parte immaginaria sono numeri reali.Esempi

$3 + 2i$

$-7 + \sqrt{2}i$

$e + \pi i$

Rappresentazione di un numero complesso : PIANO DI GAUSSNormalissimo piano cartesiano in cui identifichiamo $z \in \mathbb{C}$ con il pto (x, y) del pianoOss. I numeri reali sono in particolare numeri complessi e nel piano di Gauss sono tutti e soli quelli che stanno sull'asse x .

$$\rightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$\rightarrow z \in \mathbb{C}$ si dice immaginario puro $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow$ nel piano di Gauss sta sull'asse y .

Operazioni algebriche tra numeri complessi

Somma e differenza

$$z = a + bi \in \mathbb{C}$$

$$w = c + di \in \mathbb{C}$$

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

In altri termini: $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ idem per la
 $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$ differenza

Prodotto: si moltiplicano applicando la proprietà distributiva

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bd \overset{i^2 = -1}{i^2} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w)$$

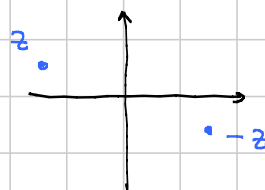
Oss. • L'equivalente di 0 in $\mathbb{C}$ è il numero complesso $0+0i = 0$
 che nel piano di Gauss sta nell'origine.

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C} \exists w \in \mathbb{C} \text{ b.c. } z + w = 0$$

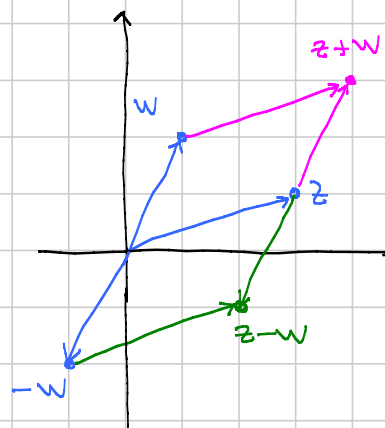
$$\text{Se } z = a + bi, \text{ allora } w = -a - bi = -z$$

Nel piano di Gauss z e $-z$ sono simmetrici rispetto all'origine



- Nel piano di Gauss la somma di 2 numeri complessi corrisponde alla regola del parallelogramma.

Per la differenza basta pensarla come $z - w = z + (-w)$



- Per ora il prodotto non ha una interpretazione geometrica evidente.

Divisione $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, quindi basta saper fare il reciproco.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad \text{"razionalizzo" moltiplicando sopra e sotto per } a-bi$$

$$= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a-bi}{a^2 + b^2}$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Oss. Il denominatore è $\neq 0$ se e solo se $a=b=0$, cioè se e solo se $z=0$.

Quindi riesco a calcolare $\frac{1}{z}$ se e solo se $z \neq 0$, quindi posso dividere per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

Verifica $z \cdot \frac{1}{z} = (a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2 + b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$

Esempio Calcolare $\frac{3+2i}{5-i}$

Razionalizzo moltiplicando per $5+i$

$$\frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

CONIUGATO

$z = a + bi$. Allora si definisce

$$\bar{z} = \text{coniugato di } z = a - bi$$

Nel piano di Gauss è il simmetrico rispetto all'asse x .

MODULO

Si definisce

$$|z| = \text{modulo di } z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

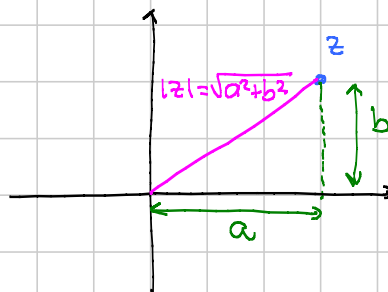
Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$. Inoltre

$$|z| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Nel piano di Gauss, $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine.

Reciproco, coniugato, modulo

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$



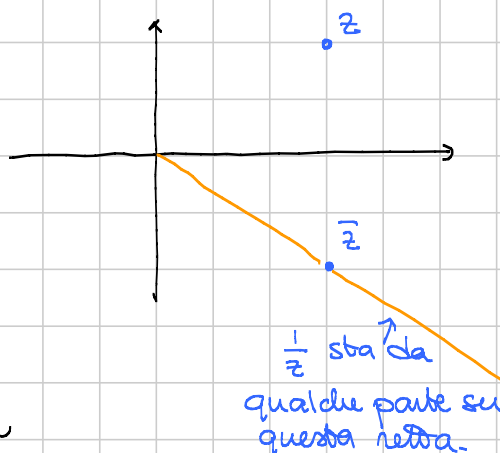
Quindi

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

e anche

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

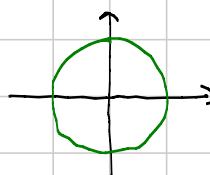
Geometricamente:



Oss.1 $\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$

Quindi $\frac{1}{i} = -i$ (Verifica $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$)

Oss.2 $\frac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow |z| = 1$



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 081

Titolo nota

11/01/2011

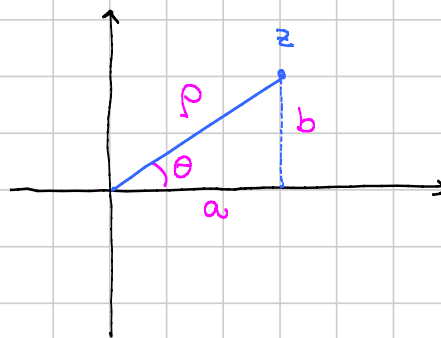
FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

= coordinate polari nel piano

= individuare un p.to del piano

mediante le coordinate ρ, θ

dove

 ρ = distanza dall'origine (quindi $\rho \geq 0$) θ = angolo formato con il semiasse positivodelle x , misurato in senso antiorario(quindi θ è un angolo, definito a meno di multipli di 2π)Formule di passaggio Note le polari, trovare le cartesiane

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

Note le cartesiane, trovare le polari

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

 θ = guardare il disegno !!!Achtung! Divido tra di loro le formule per a e b . Otteengo

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

da cui

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

La formula è pericolosa per 2 motivi

• se $a = 0$ ci sono problemi

• $\arctan$ fornisce solo valori nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, che corrisponde al I e IV quadrante. Quindi la formula NON può funzionare nel II e III quadrante. In questi 2 quadranti occorre aggiungere π al risultato.

Scrivere un numero complesso in forma trigonometrica vuol dire scriverlo in funzione di ρ e θ

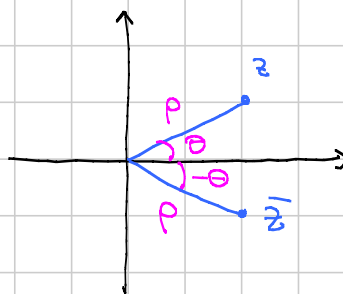
$$z = a + bi = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i = \boxed{\rho (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

Operazioni semplici in forma trigonometrica

$$\operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta \quad \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

$$|z| = \rho$$

Coniugato: stesso ρ
 θ cambiato di segno



$$\begin{aligned} \bar{z} &= \rho \cos \theta - i \rho \sin \theta \\ &= \rho \cos(-\theta) + i \rho \sin(-\theta) \\ &= \rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

Prodotto in forma trigonometrica

$$z = a + bi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = c + di = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$= \underbrace{\rho r \cos \theta \cos \varphi}_{ac} - \underbrace{\rho r \sin \theta \sin \varphi}_{bd} + (\underbrace{\rho r \sin \theta \cos \varphi}_{bc} + \underbrace{\rho r \cos \theta \sin \varphi}_{ad})i$$

$$= \rho r \{ (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + (\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)i \}$$

$$= \rho r \{ \cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta + \varphi)i \}$$

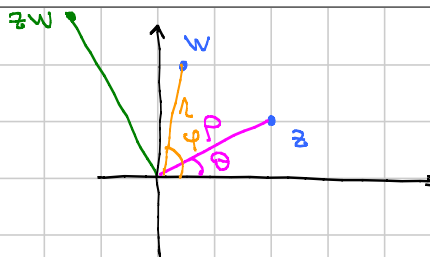
Quindi moltiplicare 2 numeri complessi in forma trigonometrica vuol dire

- moltiplicare i moduli
- sommare gli angoli (l'angolo si chiama anche "argomento di z ").

Geometricamente:

Il modulo di zw è il prodotto dei moduli

L'argomento di $z \cdot w$ è la somma degli argomenti.



Reciproco

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{\rho^2}$$

$$= \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

In forma trigonometrica fare il reciproco vuol dire

- fare il reciproco del modulo
- cambiare il segno all'angolo

Divisione : $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{\rho}{r} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi))$$

Quindi in forma trigonometrica dividere 2 numeri complessi equivale a

- dividere i moduli
- sottrarre gli argomenti.

— o — o —

Esercizio (proprietà del coniugato)

① $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$$z = a+bi \quad w = c+di \quad z+w = (a+c) + (b+d)i$$

$$\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i$$

D'altra parte

$$\bar{z} = a-bi \quad \bar{w} = c-di \quad \bar{z} + \bar{w} = (a+c) - (b+d)i$$

ed è venuto uguale al precedente

$$\textcircled{2} \quad \overline{\overline{z}} = z \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$z = a+bi \quad \overline{z} = a-bi \quad \overline{\overline{z}} = a+bi$$

$$\textcircled{3} \quad |\overline{z}| = |z| \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$z = a+bi \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\overline{z} = a-bi \quad |\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\textcircled{4} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Formula: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \overline{z}$, quindi $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{|z|^2} \overline{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$

D'altra parte $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ (altro modo di dire che $z\overline{z} = |z|^2$)

$$\textcircled{5} \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

1° modo: è banale in forma trigonometrica

2° modo: $|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$

↑
coniugato prodotto =
prodotto coniugati

$$= z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$$

$$= |z|^2 \cdot |w|^2$$

Così ho dimostrato che $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$. Facendo la radice (e posso perché è tutto ≥ 0) ottengo la tesi.

3° modo $z = a+bi \quad w = c+di \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad |w| = \sqrt{c^2+d^2}$

$$z \cdot w = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$|z \cdot w| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

Basta togliere le radici e fare i quadrati: fatto!
(Verificare anche che $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$).

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 082

Titolo nota

11/01/2011

FORMA ESPONENZIALE

La forma esponenziale è un riciclaggio della forma trigonometrica

$$z = \rho e^{i\theta}$$

dove ρ e θ sono gli stessi della forma trigonometrica

Vantaggio: la regola per il prodotto segue dalle regole formali per il prodotto di esponenziali

$$z = \rho e^{i\theta} \quad w = r e^{i\varphi} \quad z \cdot w = \rho r e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$$

Procedendo formalmente si ricottiene che il prodotto equivale a moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.

Per la divisione è lo stesso

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\varphi}} = \frac{\rho}{r} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\varphi)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

La forma esponenziale, così come quella trigonometrica, è comoda per fare prodotti, quozienti, coniugati, potenze, radici.

Potenza n-esima di un numero complesso z^n ($n \in \mathbb{N}$)

$$z = (a+bi) \quad z^n = (a+bi)^n = \text{binomio di Newton} \dots$$

Questo si lavora con la forma cartesiana...

In forma trigonometrica $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z \cdot z = (\text{moltiplico i } \rho, \text{ sommo i } \theta) = \rho^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = \rho^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$

In generale

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Formula per
potenza
n-esima

Ufficialmente si dimostra per induzione su n (farlo come esercizio sull'induzione: $z^{n+1} = z \cdot z^n = \dots$)

Stessa cosa in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Osservazione Prendo $z = \cos \theta + i \sin \theta$ (quindi $\rho = 1$)

Calcolo z^2 in 2 modi diversi

1° modo: uso la formula $z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$

2° modo: faccio il quadrato

$$\begin{aligned} z^2 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + i^2 \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Le 2 scritture sono uguali perché $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$

Provo la stessa cosa con il cubo

1° modo: $z^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$

2° modo: faccio il cubo $z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$

$$\begin{aligned} &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \underbrace{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta}_{\cos(3\theta)} + i \underbrace{(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}_{\sin(3\theta)} \end{aligned}$$

Esercizio 1 Calcolare i^{20}

Le potenze di i si ripetono con periodo 4. Quindi i^{20} è come fare $i^4 = 1$.

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$

$$i^7 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

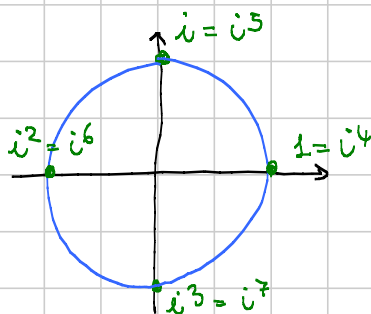
$$i^8 = 1$$

$$i^5 = i \cdot i^4 = i$$

$$i^9 = i$$

Geometricamente:

il modulo resta sempre 1, l'argomento cresce di 90° ad ogni potenza, quindi dopo 4 passaggi si ripete.



$$i^{2011} = i^3 \cdot \underbrace{i^{2008}}_{=1 \text{ perché l'esponente è multiplo di 4}} = i^3 = -i$$

Come si scrive i in forma esponenziale $\rho=1, \theta=\frac{\pi}{2}$

$$i = \rho e^{i\theta} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad i^{20} = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 20} = e^{i \cdot 10\pi}$$

Un angolo di 10π è equivalente ad un angolo di 0, quindi

$$e^{i \cdot 10\pi} = e^{i \cdot 0} = 1.$$

Esercizio 2 Scrivere i numeri complessi 3 e -5 in forma esp.

$$3 = 3 \cdot e^{0i} = 3 \cdot e^{2\pi i} = 3e^{-200\pi i}$$

$\uparrow$
 $\rho=3, \theta=0$ $\uparrow$
angolo di 0 e
angolo di 2π sono
equivalenti

$$-5 = 5 \cdot e^{\pi i} = 5 \cdot e^{-\pi i} \quad \text{Nota bene} \quad \overline{5 \cdot e^{\pi i}} = 5 \cdot e^{-\pi i}$$

$\uparrow$
 $\rho=5, \theta=\pi$

Esercizio 3 $z = \bar{z} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{asse } x$

Esercizio 4

$(1+i)^{20}$

Passo in forma esponenziale

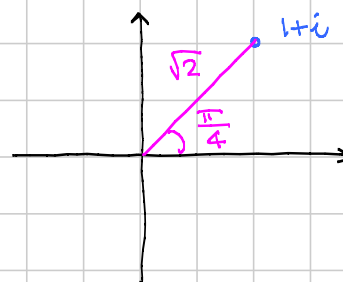
$$1+i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$(1+i)^{20} = \left[\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \right]^{20}$$

$$= (\sqrt{2})^{20} e^{5\pi i}$$

$$= 2^{10} \cdot e^{5\pi i}$$

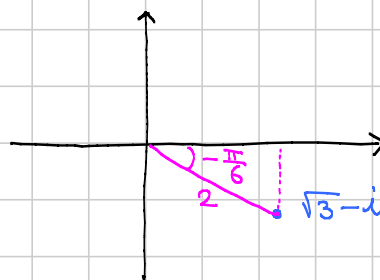
$$= 2^{10} \cdot e^{\pi i} = -2^{10} = -1024$$

Esercizio 5

$(\sqrt{3}-i)^{-20}$

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

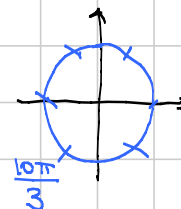


$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i} \quad \text{elevo alla } -20:$$

$$(\sqrt{3}-i)^{-20} = 2^{-20} \cdot e^{+\frac{\pi}{6} \cdot 20 i} = \frac{1}{2^{20}} \cdot e^{\frac{10}{3}\pi i}$$



In alternativa $\frac{10\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$

$$(\sqrt{3}-i)^{-20} = \frac{1}{2^{20}} e^{\frac{4}{3}\pi i} = \frac{1}{2^{20}} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{20}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= -\frac{1}{2^{21}} (1 + \sqrt{3}i)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 083

Titolo nota

12/01/2011

NUMERI COMPLESSI: radici n-esime

$$z = a + bi$$

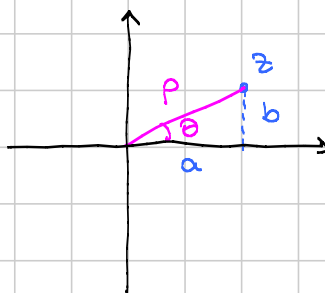
cartesiana

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

trigonometrica

$$z = \rho e^{i\theta}$$

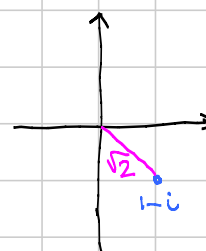
esponenziale

Esempio di potenza $(1-i)^9$

Passo in forma esponenziale

$$1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\frac{\pi}{4}$$



$$(1-i)^9 = \left[\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right]^9$$

$$= (\sqrt{2})^9 e^{-\frac{9\pi}{4}i} = 16\sqrt{2} e^{-\frac{9\pi}{4}i}$$

$$= 16 \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} = 16 (1-i)$$

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{9\pi}{4} \sim -\frac{\pi}{4}$$

Radici n-esime di un numero complesso

Dato $w_0 \in \mathbb{C}$ e dato un intero $n \geq 2$, si dicono radici n-esime di w_0 tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w_0$$

Fatto generale: $\rightarrow$ se $w_0 = 0$, l'unica soluzione è $z = 0$

$$[\text{infatti } |z^n| = |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0]$$

$\rightarrow$ se $w_0 \neq 0$, allora l'equazione ha sempre n -radici complesse distinte, che rappresentate nel piano di Gauss sono i vertici di un n -angolo regolare con centro nell'origine.

Come si calcolano le radici n -esime? Lavorando in forma esponenziale.

Scrivo

$$w_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \quad (\rho_0 \text{ e } \theta_0 \text{ sono dati})$$

Scrivo

$$z = \rho e^{i\theta}, \text{ con } \rho \text{ e } \theta \text{ incognite.}$$

Impongo

$$z^n = w_0, \text{ cioè } \rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$$

Uguaglio modulo e argomento:

$$\rho^n = \rho_0$$

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

affinché 2 numeri complessi siano uguali basta che gli argomenti differiscano per un multiplo di 2π

Ricavo ρ e θ :

$$\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Achtung! Non confondere MAI le radici n -esime di un numero complesso con la radice n -esima di un numero reale.

Le radici n -esime di un numero complesso esistono sempre e sono n numeri complessi (tranne nel caso $w_0 = 0$)

La radice n -esima di un numero reale è sempre unica (quando esiste: c'è il problema per n pari e argomento < 0).

Quando scrivo $\sqrt[n]{\rho_0}$ intendo la radice n -esima reale (UNICA!) del numero reale positivo ρ_0 .

Osservazione: Alla variabile k posso sostituire un qualunque intero positivo o negativo o nullo. Tuttavia i valori si ripetono dopo n , cioè sostituendo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ho tutti i valori possibili di θ , quindi alla fine le soluzioni sono "solo" n .

Esempio 1 Calcolare le radici cubiche di $8i$, cioè risolvere

$$z^3 = 8i$$

Scrivo $8i$ in forma esponenziale $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$. Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{3i\theta} = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Devo risolvere

$$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (\text{vecchia radice cubica sui reali})$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

Sostituisco $k=0,1,2$:

$$k=0$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$k=1$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

Se andassi avanti a sostituire $k=3$ $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ e ritrovo $\frac{\pi}{6}$

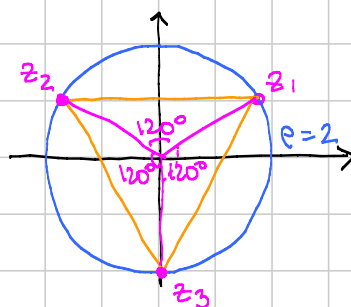
In conclusione le 3 radici cubiche di $8i$ sono

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2i$$

$$\text{Oss: } (-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = -8 \cdot (-i) = 8i$$



Scrivo in maniera cartesiana z_1 e z_2

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = \dots = -\sqrt{3} + i$$

Oss. Il poligono è regolare perché passando da un θ al successivo aggiungo $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

Esempio 2 Calcolare le radici cubiche di -8 , cioè $z^3 = -8$

$$-8 = 8e^{\pi i} \quad z^3 = -8 \quad \rho^3 e^{3i\theta} = 8e^{\pi i}$$

$$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2; \quad 3\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k}{3}\pi$$

Sostituisco $k = 0, 1, 2$

$$k=0 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$k=1 \quad \theta = \pi$$

$$z_1 = 2e^{\pi i}$$

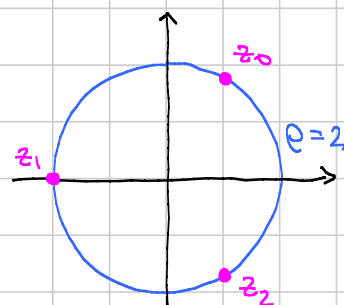
$$k=2 \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$z_1 = 2e^{\pi i} = -2 \quad (\text{v.B. } (-2)^3 = -8)$$

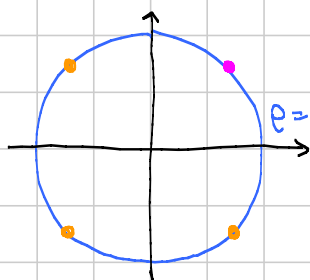
$$z_2 = \bar{z}_0 = 1 - i\sqrt{3}$$



Esempio 3 Radici quarte di -1 , cioè risolvere $z^4 = -1$

Il modulo di -1 è 1 . Quindi tutte le radici quarte di -1 avranno $\rho = 1$.

Il θ sarà $\frac{1}{4}$ del θ di -1 , quindi $\frac{\pi}{4}$



Così ho trovato una radice. Le altre devono formare un quadrato. Quindi le 4 radici sono date da

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i)$$

4 possibilità per i segni

(Esercizio: rifarlo facendo i conti).

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 084

Titolo nota

12/01/2011

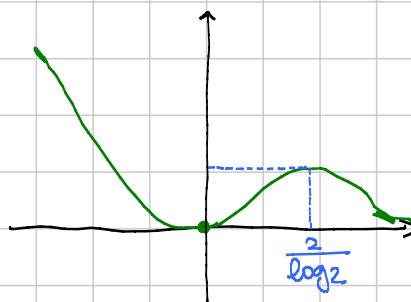
Esercizio 1 Calcolare $\inf/\sup/\max/\min$ di

$$\{x^2 2^{-x} : x > 0\}$$

Mando y: studio $f(x) = x^2 2^{-x}$ per $x > 0$

$$f(0) = 0 \quad f(x) > 0 \text{ per } x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$,
quindi $x=0$ è un punto di minimo
locale (e pure globale).

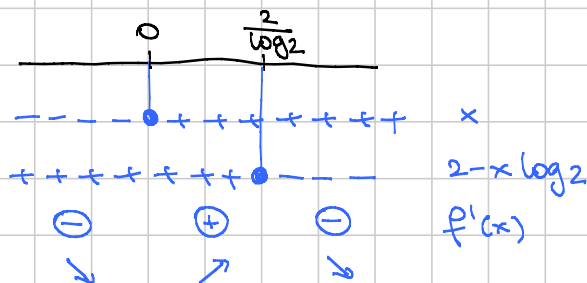
Sulla base di queste info ci aspettiamo che $f'(x)$ si annulli per $x=0$
e per un $x > 0$,

$$f'(x) = 2x 2^{-x} - x^2 2^{-x} \log 2 = 2^{-x} (2x - x^2 \log 2)$$

$$= x 2^{-x} (2 - x \log 2)$$

Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$
 $x = \frac{2}{\log 2}$

Se voglio il segno di $f'(x)$ studio la disuguaglianza con i prodotti



Quindi $\sup = \max = \frac{4}{e^2 \log^2 2}$

$\inf = 0$ min N.E.

Calcolo

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right) = \frac{4}{\log^2 2} \cdot 2^{-\frac{2}{\log 2}}$$

$$= \frac{4}{e^2 \log^2 2}$$

Se fosse stato $\{x^2 2^{-x} : x \geq 0\}$ allora $\inf = \min = 0$.

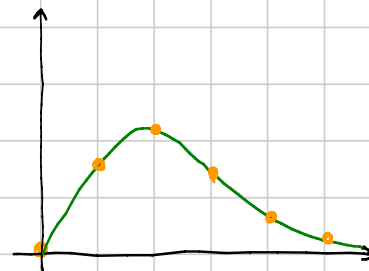
Esempio 2 $\{n^2 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

Sempre mondo y , ma considero solo i punti del grafico con ascissa $\in \mathbb{N}$.

$\inf = \min = 0$ raggiunto per $n=0$.

Per calcolare il max, bisogna trovare l'intervallo in cui è contenuto il p.to di max sui reali.

In questo caso basta provare, perché la funzione prima cresce e poi definitivamente decresce.



$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad f(2) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad f(3) = 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

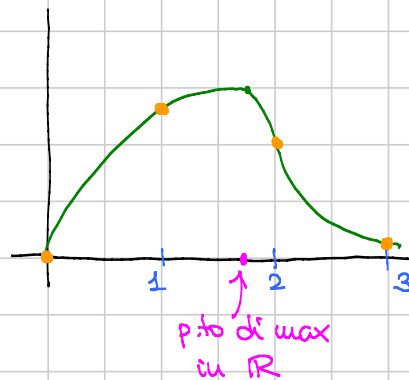
$$f(4) = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1 \text{ e da qui in poi decresce.}$$

$$\text{Quindi } \max = \sup = \frac{9}{8}. \quad \text{Il tutto senza calcolare } \frac{4}{e^2 \log^2 2}$$

Leggenda metropolitana. Il max su $\mathbb{N}$ viene raggiunto nel valore $n \in \mathbb{N}$ più vicino al p.to di max su $x \geq 0$.

Questo è falso !!!

Nel disegno accanto il valore + vicino al p.to di max è $n=2$, ma il max su $\mathbb{N}$ viene raggiunto per $n=1$.



Procedimento corretto: per il max se la giocano sempre il valore di n precedente e quello successivo al p.to di max sui reali,

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}} dx$ converge?

Brutale: x^2 contrasta la convergenza (rende l'integrandu grande)
 $2^{-\sqrt{x}}$ la favorisce (trascina a 0)

Punto sull'esponenziale e applico un confronto asintotico con
 $g(x) = \frac{1}{x^{23}}$. Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}} \cdot x^{23} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{25}}{2^{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{25 \log x - \sqrt{x} \log 2} = [e^{-\infty}] = 0$$

perché all'esponente $25 \log x - \sqrt{x} \log 2 = \sqrt{x} \left(25 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \log 2 \right) = \dots$

Siamo nel caso limite del confronto asintotico.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \text{ vicino al pbm} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \text{ vicino...}$$

$\int g(x) dx$ con pbm. all'infinito converge $\Rightarrow \int f(x) dx$ con pbm.
all'infinito converge.

Esempio 4 $\sum \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$

Criterio della radice: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \rightarrow \frac{1}{2^0} = 1 \Rightarrow \text{Beh.}$

Rapporto: $\frac{(n+1)^2}{2^{\sqrt{n+1}}} \cdot \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \cdot \frac{2^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}}{2} = 1 \Rightarrow \text{Beh.}$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \left[\frac{-1}{\infty} \right] = 0$$

Conetto: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{23}}$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 085

Titolo nota

13/01/2011

POLINOMI E NUMERI COMPLESSI

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Gli a_i sono i coeff. del polinomio. In generale possiamo anche considerare $a_i \in \mathbb{C}$.

Ogni polinomio può essere pensato come funzione di $x \in \mathbb{R}$ o anche $x \in \mathbb{C}$.

Un numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice del polinomio se

$$P(\alpha) = 0$$

Teorema di Ruffini Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $P(x)$, allora $P(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$, cioè esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x)$$

Divisione tra polinomi (precorso) Dati 2 polinomi $A(x)$ e $B(x)$, esistono sempre 2 polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$ quoziente $\leftarrow$ resto

e $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(B(x))$.

Dim. di Ruffini data la divisione. Faccio la divisione tra

$A(x) = P(x)$ e $B(x) = x - \alpha$. Ottengo che

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + R(x)$$

con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(x - \alpha) = 1$. Quindi $\text{grado}(R(x)) = 0$, cioè $R(x)$ è una costante r .

Quindi $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r$

Sostituendo $x = \alpha$ ottengo che

$$\underset{0}{P(\alpha)} = (\underset{0}{\alpha - \alpha}) \underset{0}{Q(\alpha)} + 1$$

quindi $1=0$, quindi il ~~resto~~ è 0, quindi $P(x)$ è divisibile per $Q(x)$.

Fatto 1 Un polinomio di grado n può avere al max n radici

Dim. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le prime n -radici. Allora

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) - Q(x)$$

e $Q(x)$ deve essere per forza una costante altrimenti il grado a dx supera il grado a sx. Quindi

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \cdot c$$

Quindi se $P(\alpha) = 0$, α deve per forza essere uno tra $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Moltiplicità di una radice Sia α una radice di $P(x)$. Si definisce moltiplicità di α il più grande intero m tale che $P(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$.

In altri termini, m è l'esponente con cui il fattore $(x - \alpha)$ compare nella scomposizione di $P(x)$.

Quando si dice il fatto 1, si intende che una radice di molteplicità m conta come m radici.

FATTO 2 Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio di grado n ha esattamente n radici se contate con molteplicità (si intende radici complesse)

Conseguenza: ogni polinomio si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado a coeff. complessi

$$P(x) = c (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (x-\alpha_n)$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici complesse (eventualmente ripetute a seconda della molteplicità) e c è una costante (il coeff. di x^n).

Oss. Il punto fondamentale della dir. è far vedere che ogni polinomio di grado ≥ 1 a coeff. complessi ha almeno una radice.

Se so fare questo si procede per induzione.

Prendo $P(x)$ di grado n . Questo ha almeno una radice α_1 .

Ruffini: $P(x) = (x-\alpha_1) Q(x)$ con $Q(x)$ di grado $n-1$

Ora $Q(x)$ ha almeno una radice α_2 .

Ruffini: $P(x) = (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot R(x)$ con $R(x)$ di grado $n-2$.

E così via per n passaggi

— o — o —

Esempio 1 $P(x) = x^2 + 1$ Sui reali non si scompone

Tuttavia $P(x)$ ha 2 radici complesse

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

↑ 2 radici complesse

Factorizzazione complessa

$$(x^2 + 1) = (x - i)(x + i)$$

— o — o —

Esempio 2 $P(x) = x^4 - 1$

$$= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Sui reali siamo al capolinea. Sui complessi si procede come sopra

$$= (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1) \quad \text{Radici: } x = \pm 1, x = \pm i$$

— o — o —

Esempio 3 $P(x) = x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Sui reali è finita. Sui complessi risolvo $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Scomposizione

$$(x^3 + 8) = (x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$$

In alternativa (fine!) si potevano trovare le radici

risolvendo $x^3 = -8$ come ricerca di radici cubiche.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 086

Titolo nota

13/01/2011

FATTORIZZAZIONE SUI REALI

Sia $P(x)$ un polinomio a coeff. reali. Vale il seguente fatto:

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dim. Supponiamo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$$

$$= \overline{a_n} (\bar{z})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{z})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0}$$

$$= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0$$

$$= P(\bar{z}).$$

(coniugato somma =
somma coniugati)

(coniugato prodotto =
prodotto coniugati)

($\bar{a_i} = a_i$ perché i coeff.
sono reali)

— o — o —

Conseguenza 1: se $P(x)$ è un pol. a coeff. reali e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una sua radice, allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice

$$\text{Dim. } P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

↑
coeff.
reali

↑
 α è
radice.

— o — o —

Le radici con parte immaginaria $\neq 0$ di un polinomio a coeff. reali arrivano sempre "a coppie", cioè se ce n'è una, c'è anche la coniugata.

Conseguenza 2: se α è una radice di $P(x)$ a coeff. reali di molteplicità m , allora anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità m .

"Dim." $P(x) = (x-\alpha) Q_1(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) Q_2(x)$

Se α ha molteplicità ≥ 2 , vuol dire che $Q_2(\alpha) = 0$, ma allora anche $Q_2(\bar{\alpha}) = 0$, e così via.

Osservazione Cosa succede accoppiando i fattori $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ nella fattorizzazione?

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) &= x^2 - \bar{\alpha}x - \alpha x + \alpha\bar{\alpha} \\ &= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2\end{aligned}$$

NB. $z = a+bi$, allora $z+\bar{z} = a+bi + a-bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$

Moltiplicando i due fattori $(x-\alpha)$ e $(x-\bar{\alpha})$, che contengono numeri complessi, si ottiene un fattore di 2° grado che ha coeff. reali.

Fattorizzazione reale Sia $P(x)$ un polinomio a coeff. reali.

Lo fattorizzo sui complessi come prodotto di n fattori di 1° grado

$$P(x) = c(x-d_1)(x-d_2)\dots(x-d_n)$$

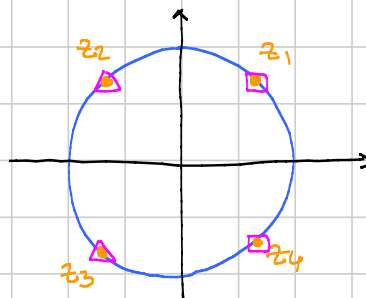
Alcuni di questi fattori sono già reali (quelli corrispondenti a radici reali). Gli altri compaiono a coppie $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$.

Moltiplicando i 2 fattori di ogni coppia si ottiene un polinomio di 2° grado a coeff. REALI.

Così ogni polinomio a coeff. reali si scrive sempre come prodotto di fattori di 1° o 2° grado a coeff. reali. Per farlo si passa attraverso la fattorizzazione come prodotto di fattori di 1° grado a coeff. complessi.

Esempio 1 $x^4 + 1$. Fattorizzo sui complessi. Per trovare le radici complesse risolvo $x^4 + 1 = 0$, cioè $x^4 = -1$, cioè trovo le 4 radici quante complesse di -1 .

$$z^4 = -1 \quad z_{1,2,3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i)$$



Fattorizzazione sui complessi:

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x - z_1)(x - z_4)}_{\text{conjugate pair}} \underbrace{(x - z_2)(x - z_3)}_{\text{conjugate pair}}$$

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 \quad \text{Lo applico con}$$

$$\alpha = z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x - z_1)(x - z_4) = x^2 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} x + 1 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x - z_1)(x - z_3) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$$

Così abbiamo ottenuto la fattorizzazione reale

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Alternativa preconsistiva: $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$

$$= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

Le radici complesse di $x^4 - 1$ si trovano risolvendo $x^4 = 1$

La radice quanta di 1 in $\mathbb{R}$ è unica ed è 1.

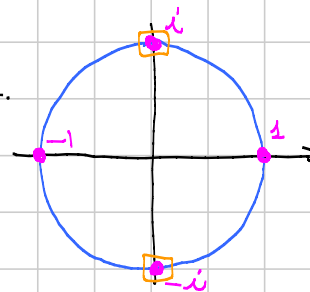
Sui complessi ci sono 4 radici quante, di cui 2 reali,

Per trovarle basta osservare che ± 1 è una radice e le restanti devono completare un quadrato.

Le radici reali ± 1 producono i 2 fattori $(x + 1)(x - 1)$.

Le radici $\pm i$ producono $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$

— 0 — 0 —



Esempio 3 Fattorizzare $x^4 + x^2 + 1$.

Radici reali non ce ne sono perché è somma di quadrati.

Cerco radici complesse: $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Pongo $y = x^2$

$$y^2 + y + 1 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Ora devo risolvere

$$x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

In tutti e 2 i casi si ha $\rho = 1$. Per θ si ha

$$1^\circ \text{ caso: } 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$$

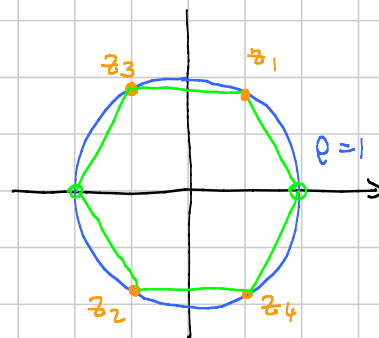
$$2^\circ \text{ caso: } 2\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\theta_3 = \frac{2\pi}{3} \quad \theta_4 = \frac{5\pi}{3}$$

Le radici complesse sono come in figura e sono a 2 a 2 coniugate. In forma cartesiana sarebbero

$$\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



Accoppiando i fattori ottengo la scomposizione

$$\text{reale} \quad (x-z_1)(x-z_4)(x-z_2)(x-z_3) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Oss.1 Non essendo $x^4 = \text{numero}$, non sono disposte a quadrato !!!

Oss.2 Sono quattro vertici di un esagono !!!

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

radici seste di ±1 esagono ↑ radici ±1 ↑ le altre 4 radici

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

radici reali

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 087

Titolo nota

15/01/2011

Numeri complessi : esponenziale complesso

Funzione esponenziale : e^z . Sia $z = x + iy$ (forma cartesiana).

Allora

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Definizione di esp. complesso

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos \operatorname{Im}(z)$$

$$\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin \operatorname{Im}(z)$$

Interpretazione con le serie della formula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots, \text{ quindi}$$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{1}{2} (i\theta)^2 + \frac{1}{3!} (i\theta)^3 + \frac{1}{4!} (i\theta)^4 + \frac{1}{5!} (i\theta)^5 + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{3!} i\theta^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \frac{1}{5!} i\theta^5 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots\right)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

La formula per l'esponenziale complesso, con esponente immaginario puro, è coerente con lo sviluppo in serie della funzione e^x .

Si potrebbe dimostrare che anche con esponente $z \in \mathbb{C}$ qualunque la serie converge a $e^x (\cos y + i \sin y)$.

Proprietà dell'esponenziale complesso

È iniettivo? NO! È periodico di periodo $2\pi i$ (immaginario!).

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^z \\ &\quad \updownarrow \\ &= e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

È surgettivo? NO! Infatti non prende il valore 0.

$$e^z = \boxed{e^x} (\cos y + i \sin y)$$

↓
modulo di e^z : questo è sempre > 0 e mai nullo,
quindi e^z non può essere 0.

Fatto: per ogni numero complesso $w \neq 0$, esiste uno $z \in \mathbb{C}$ tale che
 $e^z = w$

Conseguenza: l'immagine di e^z , vista come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Detto in altro modo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è surgettiva.

Dim. Sia $w = a+ib = \rho e^{i\theta}$. Sia $z = x+iy$. Devo risolvere

$$e^z = w, \text{ cioè } e^x \cdot e^{iy} = \rho \cdot e^{i\theta}, \text{ quindi}$$

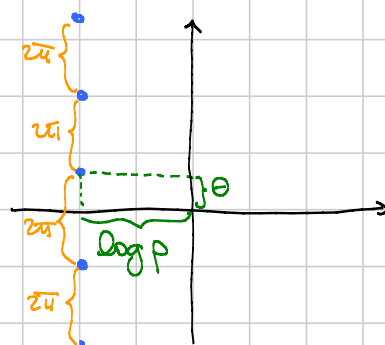
$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{log classico di un numero reale } \rho > 0 \\ \text{perché } w \neq 0 \end{array}$$

↑
 $k \in \mathbb{Z}$

— 0 — 0 —

Dato $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$, esistono infiniti
 $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = w$.

Nel piano di Gauss le soluzioni sono
sfalsate verticalmente di multipli di 2π .



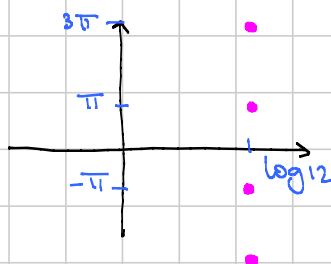
Logaritmo complesso. Possiamo pensare alle soluzioni di $e^z = w$ come gli "infiniti logaritmi complessi" di w .

Esempio 1 Risolvere $e^z = -12$. Scrivo $z = x + iy$. Scrivo $-12 = 12 e^{\pi i}$. Uguaglio

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = 12 e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 12 \\ y = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$x = \log 12$$

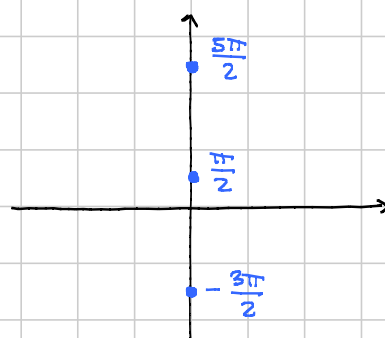
$$y = \pi + 2k\pi$$



Esempio 2 Risolvere $e^z = i$ ($z = \log i$) $z = x + iy$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}, \quad i = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}. \quad \text{Uguaglio: } e^x \cdot e^{iy} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$



— o — o —

Seni e coseni iperbolici di un numero complesso

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Sia ora $z = x + iy$. Allora

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^x \cdot e^{iy} + e^{-x} \cdot e^{-iy}}{2} = \frac{1}{2} (e^x \cos y + i e^x \sin y + e^{-x} \cos(-y) + i e^{-x} \sin(-y)) \\ &= \frac{1}{2} \cos y (e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2} i \sin y (e^x - e^{-x}) \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y$$

Stesso discorso con $\sinh z$

$$\sinh z = \frac{e^x \cdot e^{iy} - e^{-x} \cdot e^{-iy}}{2} = \frac{1}{2} \cos y (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} i \sin y (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sin y$$

Usando queste formule si vede che

$$\cosh(iy) = \cosh 0 \cdot \cos y + i \sinh 0 \cdot \sin y = \cos y$$

$$\sinh(iy) = \sinh 0 \cdot \cos y + i \cosh 0 \cdot \sin y = i \sin y$$

In un certo senso le funzioni iperboliche coincidono con le funzioni trigonometriche classiche a meno di una rotazione nel piano di Gauss.

Osservazione finale Le funzioni $\cosh$ e $\sinh$ sono periodiche, ed il loro periodo è $2\pi i$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 088

Titolo nota

15/01/2011

Seno e coseno di un numero complesso

Caso immaginario puro

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$$

Sommando:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

Sottraendo:

$$\sin\theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Le 2 formule (per ora) sono valide per θ reale, e permettono di esprimere $\sin\theta$ e $\cos\theta$ in funzione dell'esponenziale complesso.

Più in generale si definisce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Nel caso in cui z è un numero reale, le definizioni coincidono con $\cos$ e $\sin$ classici.

Oss. $\cos z$ e $\sin z$ sono funzioni periodiche di periodo 2π (reale).

Infatti

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) \end{aligned}$$

periodo dell'exp. compl.

e stessa cosa per $\sin z$.

— o — o —

Senso e coseno di numeri immaginari puri. Sia $z = ib$, con $b \in \mathbb{R}$

$$\cos(ib) = \frac{e^{i \cdot ib} + e^{-i \cdot ib}}{2} = \frac{e^{-b} + e^b}{2} = \cosh b$$

$$\sin(ib) = \frac{e^{i \cdot ib} - e^{-i \cdot ib}}{2i} = \frac{e^{-b} - e^b}{2i} = -\frac{1}{i} \sinh b = i \sinh b$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \cos(ib) &= \cosh b \\ \sin(ib) &= i \sinh b \end{aligned}$$

Fatto importante $\sin z$ e $\cos z$, viste come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sono surgettive.

Esempio 1 Voglio risolvere $\cos z = 2011$

Uso la formula: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2011$, $e^{iz} + e^{-iz} = 4022$

Pongo $w = e^{iz}$ e ottengo $w + \frac{1}{w} = 4022$; $w^2 - 4022w + 1 = 0$

$w_{1,2} = 2011 \pm \sqrt{2011^2 - 1}$. Ho trovato 2 soluzioni per w (e questo non dipende dal particolare numero 2011. Se l'eq. fosse stata $\cos z = A$, avrei avuto $w_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$, questo anche se $A \in \mathbb{C}$. Ora devo tornare in z risolvendo

$$e^{iz} = 2011 + \sqrt{2011^2 - 1}$$

$$e^{-iz} = 2011 - \sqrt{2011^2 - 1}$$

Queste equazioni si possono risolvere perché l'esponenziale prende tutti i valori $\neq 0$ (basta notare che w non può essere $= 0$).
(Finire i conti per esercizio e vedere che coincidono con il 2° proc.)

Alternativa: uso la formula $\cos b = \cos(ib) = 2011$

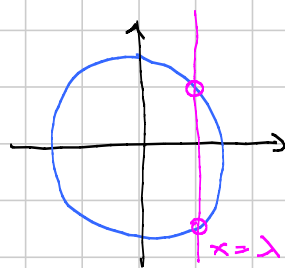
Ora questa ha soluzione

$$ib = \operatorname{Sett} \cosh(2011) \Rightarrow b = \frac{1}{i} \operatorname{Sett} \cosh(2011)$$

$$ib = -\operatorname{Sett} \cosh(2011) \Rightarrow b = -\frac{1}{i} \operatorname{Sett} \cosh(2011)$$

Quindi l'equazione $\cos z = 2011$ ha almeno 2 radici immaginarie pure. Ad entrambe posso poi aggiungere multipli di 2π .

Oss. Anche sui reali si ottengono in generale 2 famiglie infinite di soluzioni
 $\cos x = \lambda$



— o — o —

Esempio 2 Risolvere $\sin z = i$

Con le formule: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i$; $e^{iz} - e^{-iz} = 2i^2 = -2$

Pongo $w = e^{iz}$ e ho $w - \frac{1}{w} = -2$, cioè $w^2 + 2w - 1 = 0$
 da cui

$$w_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Ora devo risolvere

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

Risolvero la 1^a:

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

Scrivo $z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y} \cdot e^{ix} = \boxed{-1 + \sqrt{2}} = (-1 + \sqrt{2}) \cdot e^{i0}$$

numero reale positivo $\Rightarrow \theta = 0$

quindi

$$\begin{cases} e^{-y} = -1 + \sqrt{2} \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\log(\sqrt{2}-1) \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

1^a famiglia di soluzioni

Risolvero la 2^a:

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

Scrivo $z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y} \cdot e^{ix} = \boxed{-1 - \sqrt{2}} = (1 + \sqrt{2}) e^{i\pi}$$

numero reale negativo $\Rightarrow \theta = \pi$

$$\begin{cases} e^{-y} = 1 + \sqrt{2} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

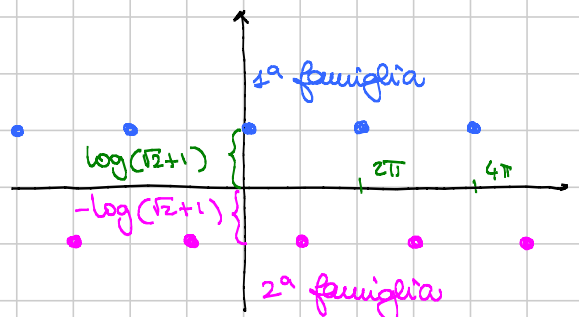
$$\begin{cases} y = -\log(\sqrt{2}+1) \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

2^a famiglia di soluzioni

Rappresento le 2 famiglie di soluzioni nel piano di Gauss.

Oss. $-\log(\sqrt{2}-1) = \log \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \log \frac{1}{\sqrt{2}-1} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \log(\sqrt{2}+1) > 0$

Soluzioni dell'equazione
 $\sin z = i$,



Domanda: ci sono soluzioni
immaginarie pure?

Sì: la soluzione $z = i \cdot \log(\sqrt{2}+1)$
— 0 — 0 —

Esempio 3 Risolvere $z^4 = |\bar{z}|$

lavoro in forma esponenziale. Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$ e cerco $\rho \in \mathbb{R}$.

$$z^4 = \rho^4 e^{4i\theta}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}, \quad |\bar{z}| = \rho \quad \text{Uguaglio:}$$

$$\rho^4 e^{4i\theta} = \rho = \rho e^{i0}$$

Otengo il sistema

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^4 - \rho = 0 \\ \theta = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \rho(\rho^3 - 1) = 0 \quad \rho = 0 \text{ oppure } \rho = 1$$

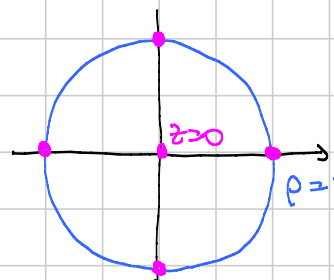
Con $\rho = 0$ ottengo la soluzione $z = 0$

Con $\rho = 1$ ottengo 4 soluzioni per $k = 0, 1, 2, 3$

In conclusione ho 5 soluzioni

$$z = 0, \pm 1, \pm i$$

(la verifica costa 30 secondi).



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 089

Titolo nota

15/01/2011

Esercizio 1 Calcolare z e w sapendo che

$$\begin{cases} z + 2iw = \sqrt{5} \\ \bar{z}w = 1 \\ \operatorname{Re}(w^2) = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Quando solo le prime 2 equazioni: calcolo w dalla 1^a, sostituisco nella 2^a, e vedo che succede

$$2iw = \sqrt{5} - z \Rightarrow w = \frac{\sqrt{5} - z}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\sqrt{5}i - zi}{-2}$$

Sostituisco nella 2^a: $\bar{z} \frac{i z - i \sqrt{5}}{2} = 1$, cioè $\bar{z} \cdot (iz - i\sqrt{5}) = 2$

$$i z \bar{z} - i \bar{z} \sqrt{5} = 2, \quad i |z|^2 - i \bar{z} \sqrt{5} = 2$$

Divido per i :

$$|z|^2 - \bar{z} \sqrt{5} = \frac{2}{i} = -2i; \quad |z|^2 - \bar{z} \sqrt{5} = -2i$$

Bovino: forma cartesiana $z = a + bi$

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{|z|^2} - \underbrace{(a - bi)}_{\bar{z}} \sqrt{5} = -2i; \quad a^2 + b^2 - a\sqrt{5} + i b\sqrt{5} = -2i$$

Uguaglio parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{cases} b\sqrt{5} = -2 \\ a^2 + b^2 - a\sqrt{5} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{uguaglianza parte immaginaria} \\ \text{" " reale} \end{array}$$

$$b = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}, \quad 2^{\text{a}} \text{ equazione: } a^2 + \frac{4}{5} - a\sqrt{5} = 0$$

$$a^2 - a\sqrt{5} + \frac{4}{5} = 0 \quad a_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5 - \frac{16}{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{\frac{9}{5}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \pm \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \nearrow \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \searrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Quindi ho trovato 2 soluzioni:

$$z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}i$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}i$$

Noto z , calcolo i corrispondenti w e controllo se $\operatorname{Re}(w^2) = -\frac{3}{5}$. Andrà bene per una sola soluzione.

leggermente più astuto : $|z|^2 - \sqrt{5} \bar{z} = -2i$

Pensiamo alla parte immaginaria a dx e sy.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(-2i) &= -2; \quad \operatorname{Im}(|z|^2 - \sqrt{5} \bar{z}) = \operatorname{Im}(-\sqrt{5} \bar{z}) = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad |z|^2 \text{ non contribuisce} \\ &\quad \text{alla parte immaginaria} \\ &= -\sqrt{5} \operatorname{Im}(\bar{z}) = \sqrt{5} \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

Uguagliando

$$\sqrt{5} \operatorname{Im}(z) = -2 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Esercizio 2 Trovare i (anzi il) numero complesso z t.c.

$$\arg(z) = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad z^{-63} = -i$$

$$z^{-63} = -i$$

Bovino : $z = \rho e^{i\theta}$; $\underbrace{\rho^{-63} e^{-63i\theta}}_{z^{-63}} = \underbrace{1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}}_{-i}$

Uguagliando : $\begin{cases} \rho^{-63} = 1 \\ -63\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{3\pi}{2 \cdot 63} + 2k \frac{\pi}{63} \end{cases}$

*essendo $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario
è uguale mettere
+ o -*

$$\rho = 1 \quad \theta = -\frac{\pi}{42} + 2k \frac{\pi}{63}$$

Domanda : esiste un valore di k
per cui $\theta = \frac{5\pi}{6}$?

$$-\frac{\pi}{42} + 2k \frac{\pi}{63} = \frac{5\pi}{6} \quad ; \quad -\frac{1}{2 \cdot 21} + \frac{2k}{3 \cdot 21} = \frac{5}{2 \cdot 3} \quad \text{Moltiplico per } 2 \cdot 3 \cdot 21$$

$$-3 + 4k = 5 \cdot 21 = 105 \Rightarrow 4k = 108 \Rightarrow k = 27 \quad (\text{esiste!})$$

$$z = \rho e^{i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i).$$

Esercizio 3 $x^2 + ix + 6 = 0$ Risolvere

Formula risolutiva! $x_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 24}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-i \pm 5i}{2}$

$$x = 2i \quad x = -3i$$

Più raffinato: cerco 2 numeri complessi x_1, x_2 tali che
 somma = $-i$ Prodotto = 6

In effetti le 2 radici trovate soddisfano.

Esercizio 4 $x^3 - x + 2i = 0$. Si vede a occhio che $x = i$ è sol.

Percorso $\Rightarrow$ il polinomio è divisibile per $x - i$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x + 2i \\ -x^3 + ix^2 & \\ \hline ix^2 - x + 2i & \\ -ix^2 - x & \\ \hline -2x + 2i & \\ 2x - 2i & \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{l} x - i \\ x^2 + ix - 2 \end{array}$$

Quindi $x^3 - x + 2i = (x - i)(x^2 + ix - 2)$

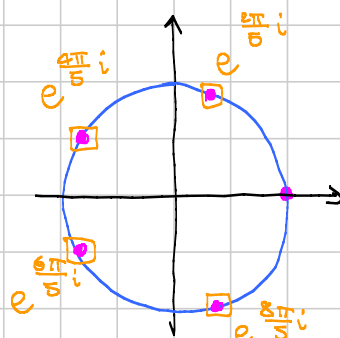
$x = i$ è una soluzione. Le altre 2 si trovano risolvendo $x^2 + ix - 2 = 0$

Da qui si risolve come prima...

Esercizio 5 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ Ricorda

$$\boxed{x^5 - 1} = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Il polinomio a sx ha 5 radici, che sono le radici quinte di 1, che sono $x = 1$ e quelle che completano il pentagono
 le stesse 5 radici sono radici a destra.
 Ora $x = 1$ annulla il termine $x = 1$. Le altre 4 annullano il fattore di 4° grado.



Se volessi fattorizzare il polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ come prodotto di 2 pol. di 2° grado a coeff. reali, darei accoppiare i fattori provenienti da coppie di radici coniugate

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$$

$$\text{Se } \alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i} \quad \leadsto \quad x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1$$

$$\text{Se } \alpha = e^{\frac{4\pi}{5}i} \quad \leadsto \quad x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} x + 1$$

$$\text{Quindi: } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \underbrace{(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1)}_{=0} \underbrace{(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} x + 1)}_{=0}$$

Esercizio 6 $|z| z^2 + \bar{z} = 0$

Poco astuto

$$\begin{aligned} |z| z^2 &= -\bar{z} = -1 \cdot \bar{z} & z &= \rho e^{i\theta} \\ \rho \cdot \rho^2 e^{2i\theta} &= 1 \cdot e^{i\pi} \rho e^{-i\theta} \\ \rho^3 e^{2i\theta} &= \rho e^{i\pi - i\theta} \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 2\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{si risolve}$$

Più astuto Moltiplico per $\bar{z}^2$: $|z| z^2 \bar{z}^2 + \bar{z}^3 = 0$

$$|z| (z\bar{z})^2 + \bar{z}^3 = 0$$

$$|z|^3 + \bar{z}^3 = 0$$

e da qui si passa in forma esponenziale come prima.

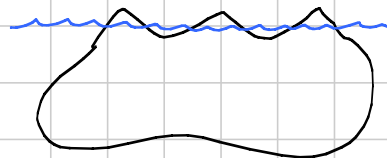
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 090

Titolo nota

18/01/2011

Equazioni differenziali

Equazione differenziale: equazione che lega una funzione $u(t)$ e un po' di sue derivate

Esempi

$$u'(t) = \sin u(t)$$

$$u''(t) + \overset{\text{non autonoma}}{\oplus} u'(t) + e^{u(t)} = 0$$

$$u'''(t) = 5$$

Si dice ordine di un'eq. differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione. Negli esempi: 1, 2, 3.

Un'eq. diff. si dice autonoma se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate. Negli esempi: SI, NO, SI

Notazione rapida: omettere tutte le t che sono argomento di $u, u', u'', \dots$

Negli esempi:

$$u' = \sin u$$

$$u'' + t u' + e^u = 0$$

$$u''' = 5$$

Un'eq. diff. è autonoma se e solo se in notazione rapida non compare nessuna t .

In forma generale un'eq. diff. di ordine k si scrive nella forma

$$\Phi(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = 0$$

se non autonoma

$$\Phi(u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = 0$$

se autonoma

Un'eq. diff. si dice in forma normale se la derivata di ordine più alto è stata "ricavata" rispetto al resto

$$u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Esempi

$$u'' = u' + \sin u$$

FORMA NORMALE

$$[u']^3 + t \cos u = 0 \rightsquigarrow u' = -\sqrt[3]{t \cos u} \quad \text{FORMA NORMALE}$$

$$[u']^{30} - e^t \cos u = 0$$

Non si può ricavare in modo univoco:
non si può mettere in forma normale.

Equazioni diff. del 1° ordine a variabili separabili: sono eq. diff. del 1° ordine in forma normale in cui il 2° membro è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

1° dei 3 casi che saranno trattati

Esempi

$$u' = e^t \cdot \arctan u$$

$$u' + tu = u \rightsquigarrow u' = u(1-t) = \underbrace{(1-t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{u}_{g(u)}$$

$$u' = u^2 \rightsquigarrow u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^2}_{g(u)}$$

Oss. Tutte le equazioni del 1° ordine autonome in forma normale rientrano tra quelle a variabili separabili.
Sono infatti della forma

$$u' = g(u)$$

$$u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot g(u)$$

Eq. diff. di ordine k lineari, omogenee e non omogenee.

Un'eq. diff. di ordine k si dice lineare se si presenta nella forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

o analogamente

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$$

Gli $a_i(t)$ sono funzioni della sola t date, così come la $f(t)$.

In altre parole, il 1° membro è una somma di u e di tutte le sue derivate moltiplicate per opportuni coeff. dipendenti solo da t , il 2° membro dipende solo da t .

Le funzioni $a_i(t)$ si dicono coefficienti dell'equazione

Brutalmente: dipendenza "pulita" da u e dalle sue derivate.

L'equazione lineare si dice omogenea se $f(t) = 0$, si dice non omogenea se $f(t) \neq 0$.

Esempi

$$u' + t^2 u = 0$$

Lineare

$$u' + t u^2 = 0$$

Non lineare per colpa di u^2

$$u' + \cos t \cdot u = 0$$

Lineare

$$u' + \cos(tu) = 0$$

Non lineare perché u è contenuta dentro un coseno

Osservazione Un'eq. diff. lineare si può mettere in forma normale se $\Leftrightarrow$ si può dividere per $a_k(t) \Leftrightarrow a_k(t) \neq 0$ per ogni t .

Esercizio Scrivere un'eq. diff. lineare, autonoma, non omogenea.

$$u'' + 3u' + 5u = \boxed{27}$$

La $f(t)$ deve essere diversa da 0 e non dipendere da t , quindi costante $\neq 0$

Caso speciale: equazioni differenziali lineari del 1° ordine già pronte per la forma normale

$$u' + a(t)u = b(t)$$

2° dei 3 casi che saranno trattati

Altro caso speciale: eq. diff. lineari di ordine k a coeff. costanti, omogenee e non omogenee.

$$a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

3° dei 3 casi che tratteremo

o con le sommatorie:

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = f(t)$$

dove gli a_i sono NUMERI (non dipendono da t).
— o — o —

Risolvere un'equazione diff. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ definita in un insieme (intervallo) (a, b) o semiretta o tutto $\mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione per ogni $t \in (a, b)$.

Osservazione: La zona di definizione di $u(t)$ è tra le incognite del problema.

Esempi $u' + \text{cost.} \cdot u = \text{cost.}$

$$u' = \text{cost.} (1-u)$$

1° ordine, non autonoma, si mette facilmente in forma normale, lineare non omogenea ma non a coeff. costanti, e si può mettere a variabili separabili (rientra nel 1° e 2° caso)

$$u' = \mp u$$

1° ordine, autonoma, forma normale, rientra tra quelle a variabili separabili, lineare omogenea a coeff. costanti

(rientra in tutti e 3 i casi speciali)

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 091

Titolo nota

18/01/2011

PROBLEMA DI CAUCHY Equazione diff. + dati iniziali

In generale un'eq. diff. ha infinite soluzioni.

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

Nota bene $u(t) = e^t + c$ NON è soluzione per $c \neq 0$
(sostituendo ottengo: $\overset{\uparrow}{u'} e^t = \underbrace{e^t + c}_u$: NO!)

Un'altra soluzione (anzi una famiglia infinita di soluzioni) è
 $u(t) = ce^t$. Verifica: $\overset{\uparrow}{u'} ce^t = \overset{\uparrow}{u} ce^t$

In questo caso l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Esempio 2 $u'' = -u$ Una sol. è $u(t) = \sin t$. Un'altra è $u(t) = \cos t$
Infinite soluzioni sono $u(t) = a \sin t$.

Ancora più infinite sono $u(t) = a \sin t + b \cos t$
Ho una famiglia infinita dipendente da 2 parametri.

In generale se l'eq. diff. è di ordine k uno si aspetta una famiglia infinita di soluzioni dipendenti da k parametri.

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$
Verifica:

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$$

$u(t) = \frac{c}{t}$ è soluzione? No, a meno che non sia $c=0$ oppure $c=1$.

Verifica:

$$u'(t) = -\frac{c}{t^2} \quad -[u(t)]^2 = -\frac{c^2}{t^2}$$

Le 2 cose coincidono se e solo se $c = c^2$, cioè se e solo se $c \in \{0, 1\}$.

In questo caso infinite soluzioni sono date dalla formula
 $u(t) = \frac{1}{t+c}$ Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2$

Oss. In questo l'insieme di definizione di $u(t)$ dipende da c ($t \neq -c$) e non è prevedibile a priori guardando l'equazione.

Analogia con le successioni per ricorrenza: un'eq. diff. è una "legge di evoluzione" che descrive come cambia nel tempo una certa quantità $u(t)$. La soluzione diventa unica se fisso una "condizione iniziale". Brutalmente: eq. diff. $\leadsto$ tempo continuo $t \in \mathbb{R}$
 succ. ric. $\leadsto$ tempo discreto $t \in \mathbb{N}$.

Problema di Cauchy: eq. diff. (di solito in forma normale) + condizione/i iniziale/i.

Per equazioni del 1° ordine $\begin{cases} u' = f(t, u) & \text{Eq. diff.} \\ u(t_0) = u_0 & \text{Cond. iniziale} \end{cases}$
 due numeri dati

Procedura: $\rightarrow$ l'eq. ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro
 $\rightarrow$ imponendo la condizione iniziale determino univocamente il valore del parametro e quindi ho una soluzione unica.

Per equazioni del 2° ordine $\begin{cases} u'' = f(t, u, u') & \text{Eq. diff.} \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$ } due condizioni iniziali

Si intende che t_0, u_0, u_1 sono numeri dati, il t_0 DEVE essere lo stesso sopra e sotto, e devono essere prescritte u e u' in t_0 .

Operativamente: la soluzione generale dell'eq. diff. dipende da 2 parametri, che spero di determinare univocamente imponendo le 2 condizioni iniziali.

Per equazioni di ordine k

$$\begin{cases} u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases}} \right\} k \text{ condizioni iniziali}$$

L'importante è che t_0 sia lo stesso ovunque, e che in t_0 siano date u e le sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima.

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' + tu = e^t \\ u(1) = 7 \\ u'(1) = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{stessa equazione} \\ u(1) = 7 \\ u'(2) = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{No problema} \\ \text{di Cauchy} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \text{stessa equazione} \\ u(1) = 7 \\ u(5) = 8 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \text{stessa equazione} \\ u(1) = 7 \\ u(5) = 8 \end{cases}} \right\} \text{No problema di Cauchy}$$

TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in forma normale:

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Se f è continua, allora il problema ammette almeno una soluzione definita almeno in un intervallo (a, b) contenente l'istante iniziale t_0 .

TEOREMA DI UNICITÀ Consideriamo un problema di Cauchy come sopra.

Se f è un po' meglio (ad esempio se f è derivabile rispetto alle variabili da cui dipende), allora la soluzione è UNICA.

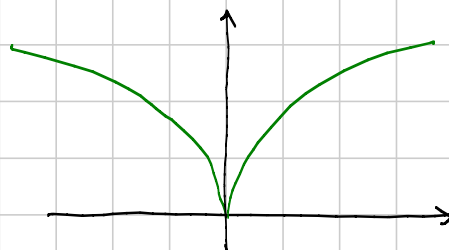
Oss. Valgono sempre i soliti metateoremi che dicono che qualunque funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è

- continua dove non ci sono problemi burocratici
- derivabile " " " " " e le singole componenti non hanno problemi di derivabilità.

Esempio di non unicità. Considero il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Oss. La funzione $g(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$ è continua ma non derivabile in $u=0$, e nell'esempio si parte proprio da $u=0$.



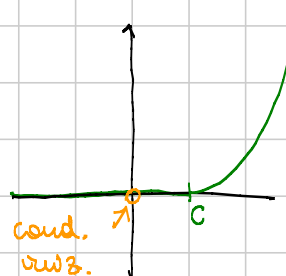
Una soluzione del problema è $u(t) = t^3$. Verifica:
 $u'(t) = 3t^2 = 3|u(t)|^{2/3}$

Un'altra soluzione del problema è la funzione $u(t) \equiv 0$. Verifica:
 $u'(t) = 0 = 3|u(t)|^{2/3}$

Quindi ci sono 2 soluzioni dell'equazione diff. che verificano la condizione iniziale (nota bene: valgono le ipotesi del teorema di esistenza, ma non del teo. di unicità).

In realtà ci sono addirittura infinite soluzioni, date da un mix delle due precedenti:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$



Verificare che per ogni $c \geq 0$ questa formula fornisce una soluzione.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 092

Titolo nota

18/01/2011

Vita e morte della soluzioneOperativamente: $\rightarrow$ viene dato un problema di Cauchy $\rightarrow$ guardando la sola eq. diff. si trova la soluzione generale, dipendente da tanti parametri quanto è l'ordine dell'equazione $\rightarrow$ guardando le sole cond. iniziali si determinano i valori dei parametri e si trova LA (unica) sol. del problema di Cauchy $\rightarrow$ si studia la funzione ottenuta: intervallo mass. mole di esistenza, tempo di vita, eventuali

BLOW-UP o BREAK-DOWN.

Nella fase 2 entrano in gioco le tecniche di risoluzione, diverse a seconda dei 3 casi che saranno trattati.

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$

L'equazione è autonoma del 1° ordine, quindi a variabili separabili.

La procedura risolutiva produce la famiglia di soluzioni

$$u(t) = \frac{1}{c-t} \quad \left(\text{o analogamente } u(t) = -\frac{1}{c+t} : \text{ sono la stessa cosa!} \right)$$

Determino c usando la condizione iniziale: impongo $u(0) = 5$

$$u(0) = \frac{1}{c} = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{5}. \text{ Quindi LA soluzione del problema di Cauchy è}$$

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{5} - t} = \frac{5}{1-5t}$$

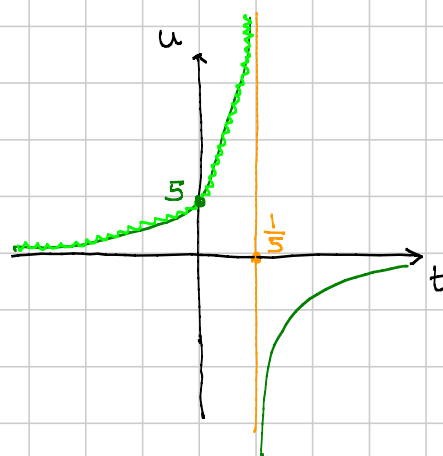
Consiglio: verificare la soluzione.

Eq. Diff. $u'(t) = 5 \left(-\frac{1}{(1-5t)^2} \right) \cdot (-5) = \frac{25}{(1-5t)^2} = [u(t)]^2$ ok

Cond. iniz. $u(0) = \frac{5}{1} = 5$ ok.

Vado a studiare la soluzione $u(t) = \frac{5}{1-5t}$

Intervallo massimale di esistenza: è per definizione il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.



L'insieme di definizione di $u(t)$ è $t \neq \frac{1}{5}$ ed è fatto di 2 pezzi: $(-\infty, \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{5}, +\infty)$. L'intervallo massimale di esistenza è $(-\infty, \frac{1}{5})$.

Tempo di vita (nel futuro) = sup dell'intervallo massimale di esistenza

Nell'esempio è $T = \frac{1}{5}$ (in inglese LIFE SPAM)

In altre parole: della soluzione intera solo il ramo di grafico che passa per la condizione iniziale.

Interpretazione "mondo reale": l'eq. diff. è un modello di un fenomeno fisico, in $t = \frac{1}{5}$ è successo qualcosa e il modello perde di validità.

Calcolato il tempo di vita ci sono 2 possibilità:

- $T = +\infty$: in questo caso si dice che il problema di Cauchy ha esistenza globale nel futuro (esiste per sempre dal tempo iniziale in poi)
- $T < +\infty$: in questo caso si dice che la soluzione "muore" al tempo T e si va a vedere il tipo di problema. Si ha

BLOW-UP se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm\infty$ (nell'esempio la soluzione ha blow-up per $t = \frac{1}{5}$)

BREAK-DOWN se non c'è blow-up, ma $u(t)$ esce dalla zona in cui è definito il secondo membro dell'equazione. Di solito accade (ma non necessariamente) che $\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm\infty$ (il break down è un blow-up della derivata).
(Per farsi un'idea, se al secondo membro c'è un termine del tipo $\sqrt{u}$ o $\log u$, si ha break-down quando u diventa uguale a 0)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = -5 \end{cases}$ Sol. generale: $u(t) = \frac{1}{c-t}$

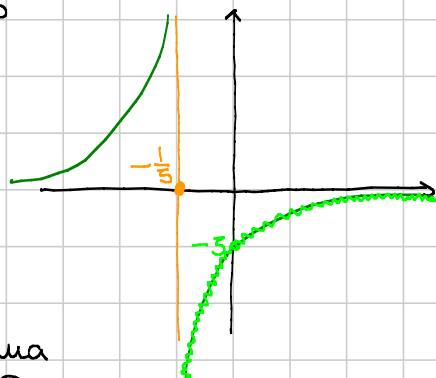
Calcolo c : $u(0) = \frac{1}{c} = -5 \Rightarrow c = -\frac{1}{5}$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{5}-t} = -\frac{5}{1+5t}$

Verifica eq. diff. + cond. iniziale: FARE !!

Studio: definita per $t \neq -\frac{1}{5}$, quindi l'intervallo massimale di esistenza è $(-\frac{1}{5}, +\infty)$ ed il tempo di vita è $T = +\infty$, quindi si ha esistenza globale nel futuro

Volendo, potremmo dire che nel passato si ha blow-up per $t = -\frac{1}{5}$



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Facendo come prima trovo $\frac{1}{c} = 0$ (?!)

Il problema DEVE avere soluzione unica (è tutto tranquillo!). È banalmente $u(t) \equiv 0$, con esistenza globale nel passato e nel futuro)

Esempio 4 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{2u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$ La soluzione generale è...

$$u(t) = \sqrt{c-t}$$

Calcolo c : $u(0) = \sqrt{c} = 7 \Rightarrow c = 49.$

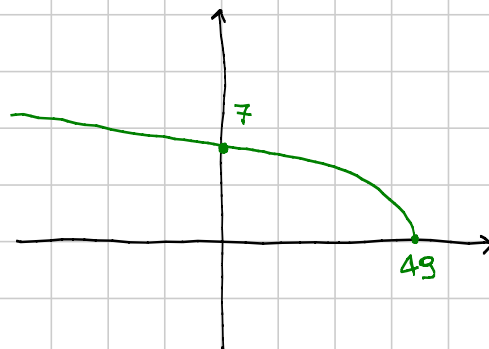
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$u(t) = \sqrt{49-t}$$

Verifica: FARE!

Studio: definita per $49-t \geq 0$, cioè $t \leq 49$, quindi intervallo massimale di esistenza = $(-\infty, 49)$ e tempo di vita = 49

In $T = 49$ non c'è blow-up, ma c'è break-down perchè $u(t) \rightarrow 0$ e quando $u(t) = 0$ c'è un problema di definizione nel 2° membro dell'equazione.



Guardo la derivata: $\lim_{t \rightarrow 49^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 49^-} \frac{-1}{2\sqrt{49-t}} = -\infty$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 093

Titolo nota

19/01/2011

Eq. Diff. a variabili separabili

$$u' = f(t)g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Procedura: ① Separare

② Integrare

③ Ricavare

④ Determinare c

⑤ Verifica! (sia dell'eq., sia del dato iniziale)

⑥ Studio della soluzione

} soluzione generale dell'eq. diff.

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^{2t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

① Separare Scrivo u' come $\frac{du}{dt}$: $\frac{du}{dt} = u^2 \cdot e^{2t}$ Tutte le u a sx, tutte le t a dx : $\frac{du}{u^2} = e^{2t} \cdot dt$ ② Integrare : a sx rispetto ad u , a dx rispetto a t :

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^{2t} dt \quad ; \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2} e^{2t} + C \quad \leftarrow \text{parametro libero}$$

③ Ricavare : u in funzione di t : $+\frac{1}{u} = -\frac{1}{2} e^{2t} + C$ mettere +c o -c è la stessa cosa

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{2} e^{2t} + C} = \frac{2}{C - e^{2t}}$$

$$u(t) = \frac{2}{C - e^{2t}}$$

soluzione generale dell'eq. diff.

Con i primi 3 passaggi si arriva alla soluzione generale più di

→ sapere fare le primitive

→ sapere ricavare u in funzione di t .

④ Determinare c imponendo il dato iniziale $u(0) = 5$

$$u(0) = \frac{2}{c-1} = 5 \Leftrightarrow 2 = 5c - 5 \Leftrightarrow c = \frac{7}{5}$$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(t) = \frac{2}{\frac{7}{5} - e^{2t}} = \frac{10}{7 - 5e^{2t}}$

⑤ Verifica: condizione iniziale $u(0) = \frac{10}{7-5} = 5$ ok.

$$\begin{aligned} \text{Eq. Diff. : } u'(t) &= -\frac{10}{(7-5e^{2t})^2} (-10e^{2t}) = \frac{10^2}{(7-5e^{2t})^2} \cdot e^{2t} \\ &= [u(t)]^2 \cdot e^{2t}. \end{aligned}$$

⑥ Studio della soluzione: $u(t)$ è definita quando $5e^{2t} \neq 7$,
 $e^{2t} \neq \frac{7}{5}$ $t \neq \frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$. La zona di definizione è quindi
 fatta da 2 pezzi.

Intervallo massimale di esistenza = pezzo che contiene il tempo iniziale

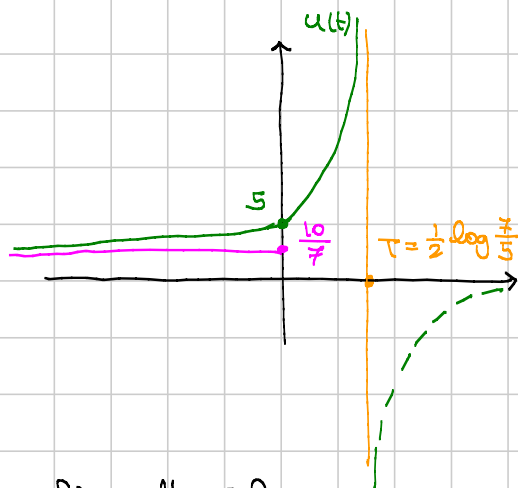
$$t=0 = (-\infty, \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{7}{5}}_{>0})$$

$$\text{Tempo di vita} = \frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$$

La soluzione ha blow-up per

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{7}{5} \text{ in quanto}$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{10}{7-5e^{2t}} = \left[\frac{10}{0^+} \right] = +\infty$$



Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = -3 \end{cases}$ Come prima fino alla sol. gen.
 $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$

④ Determino c: $u(0) = \frac{2}{c-1} = -3 \Leftrightarrow 2 = -3c + 3 \Leftrightarrow 3c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

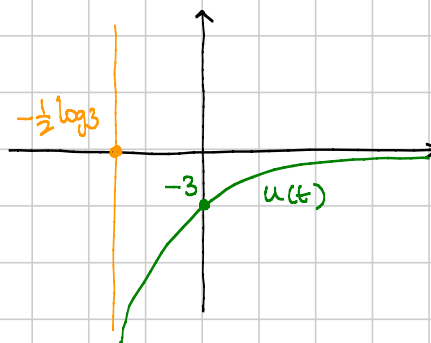
$$\text{Sol. pbm. Cauchy: } u(t) = \frac{2}{\frac{1}{3} - e^{2t}} = \frac{6}{1 - 3e^{2t}}$$

⑤ Verifica! ⑥ Studio: zona di definizione $1 - 3e^{2t} \neq 0$
 $3e^{2t} \neq 1 \Leftrightarrow e^{2t} \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow t \neq \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \log 3$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\frac{1}{2} \log 3, +\infty)$

Si ha quindi esistenza globale nel futuro.

Nel passato la soluzione ha blow-up per $t = -\frac{1}{2} \log 3$



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Come prima fino a $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$

④ Determinare c: $u(0) = \frac{2}{c-1} = 0$ che è impossibile!

Tuttavia il teo. di esistenza ed unicità ci dice che deve esserci una soluzione unica. In questo caso la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv 0$ (definita globalmente)

Esempio 4 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Per quali valori di α la soluzione ha esistenza globale nel futuro?

Come sempre fino a $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$. Ora determino c in funzione di α

$$u(0) = \frac{2}{c-1} = \alpha \Leftrightarrow 2 = \alpha c - \alpha \Leftrightarrow \alpha c = \alpha + 2 \Leftrightarrow c = \frac{\alpha + 2}{\alpha}$$

$$\text{Soluzione p.b.m. Cauchy: } u(t) = \frac{2}{\frac{\alpha+2}{\alpha} - e^{2t}} = \frac{2\alpha}{\alpha+2 - \alpha e^{2t}} = \frac{2\alpha}{2 + \alpha(1 - e^{2t})}$$

Oss. Funziona anche per $\alpha = 0$.

Questa è definita per $2 + \alpha(1 - e^{2t}) \neq 0$ $2 + \alpha - \alpha e^{2t} \neq 0$

$$e^{2t} \neq \frac{2+d}{d} \quad 2t \neq \log \frac{2+d}{d} \quad t \neq \frac{1}{2} \log \frac{2+d}{d}$$

La soluzione è globale $\Leftrightarrow$ l'asintoto verticale è per t negativi

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log \frac{2+d}{d} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{2+d}{d} < 1 \text{ e da qui in poi è una disequazione...}$$

— o — o —

Idea del perché funziona la procedura. So che una soluzione esiste per il teorema generale. La soluzione verifica $u'(t) = f(t) \cdot g(u(t))$. Divido per $g(u(t))$. Ottengo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \quad \forall t \in \text{zona di def. iniz. di } u.$$

Integro a dx e sinistra nell'intervallo $[t_0, b]$

$$\int_{t_0}^b \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^b f(s) ds$$

↓

" $F(t) - F(t_0)$ dove F è primitiva di f .

pongo $y = u(s)$, quindi $dy = u'(s) ds$.

Quando $s = t_0$ ho che $y = u(t_0) = u_0$ dato iniziale

" $s = t$ ho che $y = u(t)$.

Quindi il 1° integrale diventa

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(y)} dy = F(t) - F(t_0)$$

Chiamo $\tilde{G}$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e ottengo

$$\tilde{G}(u(t)) - \tilde{G}(u_0) = F(t) - F(t_0) \text{ e infine}$$

$$\tilde{G}(u(t)) = F(t) + \underbrace{\tilde{G}(u_0) - F(t_0)}_C$$

$\uparrow$ primitiva di $\frac{1}{g}$ $\uparrow$ primitiva di f

Oss. Quando abbiamo diviso senza denum. $\neq 0$ (caso sol. costante)

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 094

Titolo nota

19/01/2011

Eq. Diff. a variabili separabili

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^3 e^{2t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$ ① Separare: $\frac{du}{dt} = u^3 \cdot e^{2t}$

$$\frac{du}{u^3} = e^{2t} dt$$

② Integrare $\int \frac{du}{u^3} = \int e^{2t} dt$; $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{2} e^{2t} + c$

③ Ricavare $\frac{1}{u^2} = -e^{2t} + c$ $\leftarrow$ sarebbe $-2c$, ma è lo stesso

$$u^2 = \frac{1}{c - e^{2t}} \quad u(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{c - e^{2t}}}$$

In questi casi prendo il segno + o il segno - in modo da ottenere la condizione iniziale, in questo caso con il segno +.

$u(t) = \sqrt{\frac{1}{c - e^{2t}}}$ soluzione generale che va bene per dati iniziali positivi

④ Determinare c: $u(0) = \sqrt{\frac{1}{c-1}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{c-1} = 25 \Leftrightarrow$

$$c-1 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow c = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

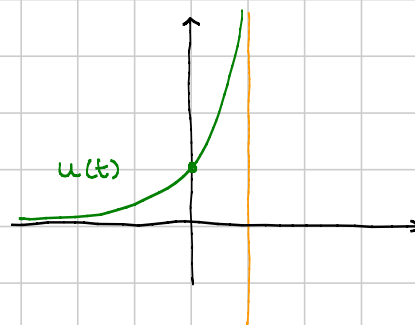
Sol. problema di Cauchy: $u(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{26}{25} - e^{2t}}} = \frac{5}{\sqrt{26 - 25e^{2t}}}$

⑤ Verifica: fare ⑥ Studio: problemi per $25e^{2t} = 26$

$$\Leftrightarrow e^{2t} = \frac{26}{25} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \log \frac{26}{25} > 0$$

Quindi la soluzione ha blow-up (il denominatore si annulla) per

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{26}{25}$$



Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ L'eq. diff. è autonoma, e da posso vedere come variabili separabili

① Separare: $\frac{du}{dt} = u \log u$; $\frac{du}{u \log u} = dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u \log u} = \int dt$; $\log |\log u| = t + c$

③ Ricavare: $\log |\log u| = t + c \Rightarrow |\log u| = e^{t+c}$
 $\log u = e^{t+c} \Rightarrow u = e^{e^{t+c}}$
 ↑ sempre positivo, quindi nessun problema di valore assoluto

Problema di percorso: quando risolvo $|A| = 3$ ottengo $A = \pm 3$

Quindi quando risolvo $|\log u| = e^{t+c}$ ottengo

$\log u = \pm e^{t+c}$ e quindi la soluzione è

$$u(t) = e^{\pm e^{t+c}}$$

dove il segno va scelto guardando la condizione iniziale.

④ Determinare c $u(0) = e^{\pm e^c} = \frac{1}{2}$, quindi $\pm e^c = \log \frac{1}{2} = -\log 2$

Quindi devo scegliere il segno -

$$-e^c = -\log 2 \Leftrightarrow e^c = \log 2$$

Soluzione problema di Cauchy: $u(t) = e^{-e^{t+c}} = e^{-e^t \cdot e^c} = e^{-\log 2 \cdot e^t} = e^{-\log 2 \cdot e^t}$

Questa è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u t^2 \\ u(0) = -6 \end{cases}$ ① Separare: $\frac{du}{dt} = u \cdot t^2$; $\frac{du}{u} = t^2 dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt$

$$\log |u| = \frac{1}{3} t^3 + c$$

③ Ricavare : $\frac{1}{3}t^3 + c$ $|u| = e$ $u(t) = \pm e$

④ Determino c : $u(0) = \pm e^c = -6$
 Quiuoli scelgo il segno - e ottengo $-e^c = -6$, $e^c = 6$
 e volendo $c = \log 6$.

Soluzione del problema di Cauchy

$$u(t) = -e^{\frac{1}{3}t^3 + \log 6} = -e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot e^{\log 6} = -6e^{\frac{1}{3}t^3}$$

Scorciatoia : sono arrivato alla formula generale

$$u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c} = \pm \boxed{e^c} \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

↓
sarebbe una costante > 0 , ma potendo scegliere
il segno $\pm$ è una costante qualunque ($\neq 0$)

$$= k e^{\frac{1}{3}t^3}$$

↑
costante qualunque

Così ottengo come soluzione generale $u(t) = k e^{\frac{1}{3}t^3}$. Quando vado a ricavare k trovo $u(0) = k = -6$ senza passare dai logaritmi.

Osservazione La scrittura $u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c}$ non permette di ottenere la condizione iniziale $u(0) = 0$, che è invece facilmente ottenibile con la scrittura $u(t) = k e^{\frac{1}{3}t^3}$ (basta $k=0$)

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\begin{cases} u' = \arctan t \cdot \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$ ① Separare

$$\frac{du}{dt} = \arctan t \cdot \log u$$

$\frac{du}{\log u} = \arctan t \, dt$ ② Integrare $\int \frac{du}{\log u}$ e non si sa fare...

Però la soluzione è $u(t) = 1$ (la cosa importante è che $\log 1 = 0$)

Fatto generale: quando ho l'equazione $\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

ho che la soluzione è costante $\Leftrightarrow g(u_0) = 0$.

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u^4 \sin t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Domanda: per quali α ho esistenza glob. nel futuro.

$$\frac{du}{dt} = u^4 \sin t; \quad \frac{du}{u^4} = \sin t \, dt; \quad \int \frac{du}{u^4} = \int \sin t \, dt$$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = -\cos t + C; \quad \frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \cos t + C; \quad \frac{1}{u^3} = 3 \cos t + C$$

$$u^3 = \frac{1}{3 \cos t + C}$$

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 \cos t + C}} \quad \text{sol. generale}$$

$$\text{Calcolo } c \text{ in funzione di } \alpha: u(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3+C}} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{3+C} = \alpha^3$$

$$\Leftrightarrow 3+C = \frac{1}{\alpha^3} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\alpha^3} - 3$$

Tornando alla sol. generale, si ha esistenza globale $\Leftrightarrow$ il denominatore è sempre $\neq 0$. Il denominatore si annulla quando $3 \cos t + C = 0$, cioè $\cos t = -\frac{C}{3}$. Se voglio che non si annulli, deve essere

$$-\frac{C}{3} > 1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{C}{3} < -1, \quad \text{cioè} \quad C < -3 \quad \text{oppure} \quad C > 3$$

Questo in α vuol dire che

$$\frac{1}{\alpha^3} - 3 < -3 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\alpha^3} - 3 > 3$$

$$\frac{1}{\alpha^3} < 0 \quad \quad \quad \frac{1}{\alpha^3} > 6$$

$$\alpha < 0 \quad \quad \quad \alpha^3 > \frac{1}{6} \quad \alpha > \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

— 0 — 0 —

.....
Titolo nota

20/01/2011

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^n \underbrace{a_i(t)}_{\substack{\text{coeff. dell'equazione} \\ \text{(funzioni di } t\text{)}}} u^{(i)} = f(t)$$

l'equazione è omogenea se $f(t) \equiv 0$

① Date 2 soluzioni u e v di un'eq. omogenea, allora $w = u + v$ è ancora una soluzione della stessa equazione.

Dim: essendo u soluzione abbiamo che $\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = 0$

" " " " " $\sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = 0$

Ora considero la w. Chiaramente $w^{(i)} = u^{(i)} + v^{(i)}$, quindi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} = \sum_{i=0}^k a_i(t) (u^{(i)} + v^{(i)}) = \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} + \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = 0$$

III) essenziale che l'equazione sia lineare e omogenea

② Data una soluzione u e data una costante $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $w = \alpha u$ è ancora una soluzione.

Dim.: basta osservare che $w^{(i)} = \alpha u^{(i)}$, quindi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} = \sum_{i=0}^k a_i(t) \alpha u^{(i)} = \alpha \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = 0$$

È fondamentale la linearità.

Altro modo di dire ① + ②: L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare è uno spazio vettoriale.

Conseguenza di ① + ②. Se abbiamo $u_1, u_2, \dots, u_n$ che sono soluzioni e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che sono numeri, allora

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad (\text{combinazione lineare})$$

è a sua volta una soluzione della stessa equazione.

③ Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione k pari all'ordine dell'equazione, cioè la soluzione generale è della forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

sol. gen. eq.
diff. OMOGENEA

dove $c_1, \dots, c_k$ sono costanti arbitrarie (k parametri liberi) e $u_1(t), \dots, u_k(t)$ sono soluzioni speciali (cioè gli elementi di una base)

Operativamente: per trovare la soluzione generale di un'eq. diff. lineare omogenea basta trovare le sol. speciali $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Idea del perché funziona Sia $u_1(t)$ la soluzione del problema di Cauchy. Sia $u_2(t)$ la soluzione di

$$\begin{cases} \text{Equazione} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Equazione} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

In generale considero $u_i(t)$ come la soluzione dell'equazione con dato iniziale $0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } i\text{-esima}}}{1}, 0, \dots, 0$

Una volta che conosco $u_1(t), \dots, u_k(t)$ so risolvere il problema per ogni scelta dei dati iniziali

Equazione $\left\{ \begin{array}{l} u(0) = \alpha_1 \\ u'(0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = \alpha_k \end{array} \right.$ la soluzione sarà

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots + \alpha_k u_k(t).$$

Infatti risolve l'equazione e quando calcolo le derivate in $t=0$ si annullano tutti gli addendi tranne 1.

Questo dice che bastano k soluzioni speciali per avere la sol. generale.

Come ottenere una base. C'è un algoritmo che funziona nel caso di coeff. costanti

Equazioni di ordine 2 $au'' + bu' + cu = 0$

Polinomio caratteristico: $ax^2 + bx + c = 0$ Calcolo le radici

Caso $\Delta > 0$ Ci sono 2 radici reali distinte: λ, μ

La base è del tipo $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

↑ ↑
costanti reali arbitrarie

Caso $\Delta = 0$ C'è una radice reale λ di molteplicità 2. Una base è $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$, quindi la sol. generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}.$$

Osservazione le funzioni $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ sono lin. indipendenti perché il fattore moltiplicativo dipende da t e non è un numero.

Caso $\Delta < 0$ Ci sono 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una possibile base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Quindi la soluzione generale è della forma

$$u(t) = a e^{\alpha t} \cos(\beta t) + b e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -4, 1$

$\rightarrow$ base: e^{-4t}, e^t

$\rightarrow$ Sol. generale $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Esempio 2 $u'' + 4u' + 4u = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$
 $\rightarrow x = -2$ è radice di molteplicità 2
 $\rightarrow$ Base: $e^{-2t}, t e^{-2t}$
 $\rightarrow$ Sol. generale: $u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$

Esempio 3 $u'' + 6u' + 13u = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i$$

Base: $e^{-3t} \cos(2t), e^{-3t} \sin(2t)$

Sol. generale: $u(t) = a e^{-3t} \cos(2t) + b e^{-3t} \sin(2t)$

Esempio 4 $u'' + 5u' = 0 \rightsquigarrow x^2 + 5x = 0 \quad x(x+5) = 0$

Radici: $x=0$ e $x=-5$

Base: $e^{0t} = 1, e^{-5t}$

Sol. generale $u(t) = a + b e^{-5t}$

Esempio 5 $u'' - 9u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 9 = 0, x^2 = 9, x = \pm 3$

Base: e^{3t}, e^{-3t} Sol. generale: $u(t) = a e^{3t} + b e^{-3t}$

Esempio 6 $u'' + 9u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 9 = 0, x^2 = -9, x = \pm 3i$

Complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha=0$ e $\beta=3$

Base: $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^{0t}} \cos(3t), \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^{0t}} \sin(3t)$

Sol. generale: $u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t).$
 $\quad \quad \quad \text{---} \text{---} \text{---}$

.....
Titolo nota

20/01/2011

Sostituisco: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, quindi

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0; \quad e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Idea per il caso in cui le radici sono $\alpha \pm i\beta$. Vorrei scrivere

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

da cui è ragionevole aspettarsi oggetti del tipo

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$
$$e^{at} \cos(bt), t e^{at} \cos(bt), \dots, t^{m-1} e^{at} \cos(bt)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t), t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

CASO NON OMOGENEO

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t) \leftarrow \text{diversa da } 0$$

Fatto fondamentale: Se u e v sono due soluzioni dell'equazione NON omogenea, allora la loro differenza $w = u - v$ è una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente

Dim.: u soluzione vuol dire $\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$

v soluzione vuol dire $\sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = f(t)$

$$\begin{aligned} \text{Allora } \sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} &= \sum_{i=0}^k a_i(t) (u^{(i)} - v^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} - \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

Conseguenza operativa. La formula generale per la soluzione di un'eq. non omogenea è del tipo

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\text{soluzione generale dell'eq. omogenea}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione QUALUNQUE dell'equazione NON OMOG.}}$$

Significato della formula. Per trovare TUTTE le soluzioni di una equazione non omogenea basta saper trovare
 → tutte le soluzioni della corrispondente eq. omogenea
 → una soluzione qualunque della non omogenea.

Dim.: Sia $\bar{u}(t)$ una soluzione avuta in qualche modo
 Sia $u(t)$ un'altra soluzione. Allora
 $u(t) - \bar{u}(t)$ è soluzione dell'eq. omogenea, quindi si scrive
 come comb. lineare di $u_1(t), \dots, u_k(t)$

— o — o —

Quindi l'unico obiettivo è trovare una soluzione, in qualunque modo, dell'eq. non omogenea.

Due metodi: $\rightarrow$ metodo di variazione delle costanti: molti calcoli da fare, ma standard, e funziona sempre (ottimo per un computer)

$\rightarrow$ provare a indovinare (comodo quando funziona)

Esempio 1 $u'' - 5u' + 6u = e^{4t}$. Vediamo la corrispondente omog.:

$$u'' - 5u' + 6u = 0 \leadsto x^2 - 5x + 6 = 0 \leadsto \text{Radici: } x=2 \text{ e } x=3$$

$$\leadsto \text{base: } e^{2t}, e^{3t} \leadsto \text{sol. gen. eq. omogenea: } u(t) = ae^{2t} + be^{3t}.$$

Devo trovare una soluzione della non omogenea. La cerco del tipo $u(t) = \lambda e^{4t}$ con un coefficiente λ incognito. Calcolo le derivate: $u'(t) = 4\lambda e^{4t}$, $u'' = 16\lambda e^{4t}$. Sostituisco:

$$\underbrace{16\lambda e^{4t}}_{u''} - \underbrace{20\lambda e^{4t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda e^{4t}}_{+6u} = e^{4t}$$

Semplificando ottengo $2\lambda = 1$, cioè $\lambda = \frac{1}{2}$. Sol. speciale: $u(t) = \frac{1}{2}e^{4t}$

Soluzione generale equazione non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{ae^{2t} + be^{3t}}_{\text{sol. eq. omog.}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{4t}}_{\text{sol. speciale}}$$

Se abbiamo delle condizioni iniziali, possiamo determinare a e b .

Ad esempio se abbiamo $u(0) = 2$, $u'(0) = 7$, calcolo

$$u'(t) = 2ae^{2t} + 3be^{3t} + 2e^{4t} \quad \text{e impongo}$$

$$\begin{cases} a + b + \frac{1}{2} = 2 \\ 2a + 3b + 2 = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} u(0) = 2 \\ u'(0) = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema lineare in 2 variabili} \\ \text{che si risolve facilmente.} \end{array}$$

— o — o —

Esempio 2 $u'' - 5u' + 6u = e^{2t}$ la parte omog. è come prima

Cerco una sol. speciale del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$.

Calcolo le derivate: $u'(t) = 2\lambda e^{2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$

Sostituisco:

$$4\lambda e^{2t} - 10\lambda e^{2t} + 6\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

$$0 = e^{2t}$$

$$u'' - 5u' + 6u$$

GUAI!!

Bella scoperta! e^{2t} è sol. dell'omogenea, quindi sostituendo viene per forza 0.

Nuovo tentativo: provo con una t davanti: $u(t) = \lambda t e^{2t}$

Calcolo: $u'(t) = \lambda e^{2t} + 2\lambda t e^{2t}$, $u''(t) = 2\lambda e^{2t} + 2\lambda e^{2t} + 4\lambda t e^{2t}$

Sostituisco:

$$\underbrace{4\lambda e^{2t} + 4\lambda t e^{2t}}_{u''} - \underbrace{5\lambda e^{2t} - 10\lambda t e^{2t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda t e^{2t}}_{+6u} = e^{2t}$$

$$-\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = -1$$

Sol. generale: $u(t) = a e^{2t} + b e^{3t} - \underbrace{t e^{2t}}_{\text{sol. speciale}}$

Osservazione: i termini con la t sono uguali a t moltiplicato i termini del tentativo precedente perché arrivavo dal derivare l'esponenziale. Se se ne andavano prima, se ne vanno anche ora.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 097

Titolo nota

22/01/2011

Eq. Diff. Lineari non omogenee $\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$

Sol. generale: $u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\text{sol. gen. eq. omog.}} + \underbrace{\tilde{u}(t)}_{\text{sol. qualunque eq. non omog.}}$

1° caso Se i coeff. a_i sono costanti e $f(t) = e^{\alpha t}$, allora conviene cercare una solus. particolare del tipo $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$, dove α è lo stesso α della $f(t)$ data e λ è un coeff. incognito. Questo tentativo funziona TRANNE quando α è una radice del polinomio caratteristico associato all'eq. omogenea. In questo caso, se m è la molteplicità della radice α , il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$

2° caso Coeff. a_i costanti e $f(t) = \text{polinomio}$. Il tentativo è un polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti

Esempio $u'' + 3u' - 4u = t^2$

Omogenea: $u'' + 3u' - 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (x+4)(x-1) = 0$

$\rightsquigarrow$ radici: $x = -4$ e $x = 1 \rightsquigarrow$ base: e^{-4t}, e^t

$\rightsquigarrow$ sol. gen. eq. omog.: $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Ora cerco una sol. dell'eq. NON omogenea del tipo $u(t) = at^2 + bt + c$, dove a, b, c sono coeff. da determinare.

Calcolo le derivate: $u'(t) = 2at + b$, $u''(t) = 2a$. Sostituisco:

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{6at + 3b}_{+3u'} - \underbrace{4at^2 - 4bt - 4c}_{-4u} = t^2$$

Uguaglio i coefficienti:

$$\begin{cases} -4a = 1 & (\text{coeff. } t^2) & a = -\frac{1}{4} \\ 6a - 4b = 0 & (\text{coeff. } t) & b = \frac{3}{2}a = -\frac{3}{8} \\ 2a + 3b - 4c = 0 & (\text{termine noto}) & c = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = -\frac{1}{8} - \frac{3}{32} = -\frac{7}{32} \end{cases}$$

In conclusione una soluzione dell'eq. non omogenea è

$$u(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{7}{32}$$

Quindi tutte le soluzioni dell'eq. non omogenea (sol. gen.) sono date dalla formula

$$u(t) = \underbrace{a e^{-4t}}_{=0} + \underbrace{b e^t}_{=0} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{7}{32}$$

Questo modo di procedere funziona se non ci sono polinomi (anche costanti) tra le soluzioni dell'eq. omogenea, cioè se e solo se 0 non è radice del polinomio caratteristico.

Come prima, se 0 è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico, il tentativo va moltiplicato per t^m .

Esempio $u^{IV} + 3u'' = t^2$

Omogenea: $u^{IV} + 3u'' = 0 \leadsto x^4 + 3x^2 = 0$, $x^2(x^2 + 3) = 0$

$\leadsto$ radici: $x=0$ (mult. 2), $x = \pm \sqrt{3}i$

$\leadsto$ base: $1, t, \cos(\sqrt{3}t), \sin(\sqrt{3}t)$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a + bt + c \cos(\sqrt{3}t) + d \sin(\sqrt{3}t)$

Cerco soluzione dell'eq. non omogenea. La cerco del tipo

$$u(t) = \underbrace{t^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{perché 0 è} \\ \text{radice di mult. 2}}} \underbrace{(at^2 + bt + c)}_{\substack{\downarrow \\ \text{generico polinomio di grado 2} \\ \text{perché } f(t) \text{ è di 2° grado}}}$$

quindi $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Derivo e sostituisco

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b, \quad u^{IV}(t) = 24a$$

$$\underbrace{24a}_{u^{IV}} + \underbrace{36at^2 + 18bt + 6c}_{3u''} = t^2$$

$$\begin{cases} 36a = 1 & (\text{coeff. } t^2) \\ 18b = 0 & (\text{coeff. } t) \\ 24a + 6c = 0 & (\text{term. noto}) \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{36} \quad b = 0 \quad c = -4a = -\frac{1}{9}$$

Sol. gen. eq. non omog.:

$$u(t) = a + bt + c \cos(\sqrt{3}t) + d \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{36} t^4 - \frac{1}{9} t^2$$

Sempre fare la verifica!!!!

Oss. Si poteva provare anche un generico polinomio di grado 4
 $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Si trovavano a, b, c come sopra, ma nessuna condizione su d ed e . Infatti quelli sono parametri liberi.

— o — o —

3° caso Coeff. ai costanti e $f(t)$ di tipo trigonometrico

Esempio $u'' + 3u' - 4u = \cos(3t)$ Omog: $u(t) = ae^{-4t} + be^t$

Cerco soluzioni della non omogenea di tipo

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$$

Calcolo le derivate!

$$u'(t) = -3a \sin(3t) + 3b \cos(3t), \quad u''(t) = -3a \cos(3t) - 3b \sin(3t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-3a \cos(3t) - 3b \sin(3t)}_{u''(t)} + \underbrace{3a \sin(3t) + 3b \cos(3t)}_{+3u'(t)} - \underbrace{4a \cos(3t) - 4b \sin(3t)}_{-4u(t)} = \cos(3t)$$

$$\begin{cases} -3a + 3b - 4a = 1 & (\text{coeff. cos}) \\ -3b - 3a - 4b = 0 & (\text{coeff. sin}) \end{cases} \quad \begin{cases} -13a + 3b = 1 \\ -3a - 13b = 0 \end{cases}$$

e da qui si conclude

— o — o —

In generale: se il secondo membro contiene termini del tipo $\sin(\omega t)$ oppure $\cos(\omega t)$, il tentativo da fare è

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

(sempre tentativo doppio, con a e b incogniti)

Non funziona quando le stesse cose sono già sol. dell'eq. omogenea, cioè quando $x = \pm \alpha i$ è radice del polinomio caratteristico.

Se $x = \pm \alpha i$ sono radici di mult. m , allora il tentativo da fare va moltiplicato per t^m .

CASI MISTI Se $f(t) = p(t)e^{\alpha t}$, $p(t)\cos(\alpha t)$, $p\sin(\alpha t)$ con $p(t)$ polinomio (e ovviamente gli αi sono costanti), allora il tentativo da fare è

$$u(t) = q(t)e^{\alpha t} \quad \text{oppure} \quad \cos / \sin$$

dove $q(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $p(t)$.

Se $f(t) =$ somma di un po' di tutto, allora basta risolvere con un pezzo per volta e poi sommare tutto.

Motivo:

$$\text{se} \quad \sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = f(t) \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^k a_i v^{(i)} = g(t)$$

e pongo $w = u + v$, allora

$$\sum_{i=0}^k a_i w^{(i)} = f(t) + g(t)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 098

Titolo nota

22/01/2011

Eq. Diff. Lineari non omogenee: metodo di variazione delle costanti

Esempio $u'' + 3u' - 4u = t$ Tentativo: $u(t) = at + b$
e viene in fretta.

Alternativa: metodo di variazione delle costanti. Considero la sol. gen. dell' eq. omogenea

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^t$$

C'è un "tentativo universale" della forma

$$u(t) = a(t) e^{-4t} + b(t) e^t$$

Così ho fatto "variare le costanti" cioè le ho sostituite con funzioni della variabile t . Lo scopo è trovare funzioni $a(t)$ e $b(t)$ in modo che $u(t)$ sia soluzione dell' eq. non omogenea. Derivo e sostituisco

$$u'(t) = a'(t) e^{-4t} - 4a(t) e^{-4t} + b'(t) e^t + b(t) e^t$$

Impongo che la parte con a' e b' si annulli, cioè

$$a'(t) e^{-4t} + b'(t) e^t = 0 \quad 1^a \text{ equazione}$$

Calcolo $u''(t)$ derivando solo i restanti 2 termini

$$u''(t) = -4a'(t) e^{-4t} + 16a(t) e^{-4t} + b'(t) e^t + b(t) e^t$$

Ora sostituisco $u''(t)$, $u'(t)$ e $u(t)$ nell' equazione diff. iniziale:

$$\begin{aligned}
 & -4a'(t)e^{-4t} + 16a(t)e^{-4t} + b'(t)e^t + b(t)e^t \\
 & -12a(t)e^{-4t} + 3b(t)e^t \\
 & -4a(t)e^{-4t} - 4b(t)e^t \\
 & = t
 \end{aligned}$$

u''
 $+ 3u'$
 $- 4u$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ se ne devono andare. Resta solo roba con $a'(t)$ e $b'(t)$.

$$-4a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = t \quad \text{2ª equazione.}$$

Oss. I termini con $a(t)$ e $b(t)$ provengono dall'aver derivato e^{-4t} ed e^t , rispettivamente, quindi sono del tipo $a(t) \cdot$ quello che si ottiene mettendo e^{-4t} nell'eq. $= a(t) \cdot 0 = 0$

Mettendo insieme la 1ª equazione e la 2ª equazione otteniamo un sistema che pensiamo nelle incognite $a'(t)$ e $b'(t)$

$$\begin{cases}
 a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = 0 \\
 -4a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = t
 \end{cases}$$

Idea per concludere: risolvo il sistema per trovare $a'(t)$ e $b'(t)$, poi integrando calcolo $a(t)$ e $b(t)$, che infine sostituisco nella formula per $u(t)$.

Risoluzione sistema: ricavo $b'(t)$ dalla 1ª equazione $b'(t) = -a'(t)e^{-5t}$
 Sostituisco nella 2ª equazione:

$$-4a'(t)e^{-4t} - a'(t)e^{-4t} = t \quad \leadsto -5a'(t)e^{-4t} = t$$

$$\rightarrow a'(t) = -\frac{1}{5}te^{4t} \quad \rightarrow b'(t) = -a'(t)e^{-5t} = \frac{1}{5}te^{-t}$$

Faccio le primitive:

$$\begin{aligned}
 \int te^{4t} dt &= t \cdot \frac{1}{4}e^{4t} - \int 1 \cdot \frac{1}{4}e^{4t} dt \\
 &= \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t}
 \end{aligned}$$

Quindi $a(t) = -\frac{1}{20} t e^{4t} + \frac{1}{80} e^{4t}$

$$\int t e^{-t} dt = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt = -t e^{-t} + \int e^{-t} dt = -t e^{-t} - e^{-t}$$

$$b(t) = -\frac{1}{5} t e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-t}$$

Sostituzione finale: $u(t) = a(t) e^{-4t} + b(t) e^t$

$$= -\frac{1}{20} t + \frac{1}{80} - \frac{1}{5} t - \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1+4}{20} t + \frac{1-16}{80} = -\frac{1}{4} t - \frac{3}{16}$$

soluzione particolare

Soluzione generale equazione non omogenea:

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^t - \frac{1}{4} t - \frac{3}{16}$$

con a e b costanti

Stesso esercizio con il tentativo $u'' + 3u' - 4u = t$ $u(t) = at + b$

$u'(t) = a$ $u''(t) = 0$. Sostituisco

$$3a - 4at - 4b = t \quad \begin{cases} -4a = 1 & (\text{coeff. } t) \\ 3a - 4b = 0 & (\text{termine noto}) \end{cases}$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{4} \quad b = \frac{3}{4} a = -\frac{3}{16}$$

Metodo di variazione delle costanti:

- scrivo sol. gen. dell' eq. omogenea
- faccio un tentativo facendo variare le costanti
- calcolo u' e impongo che i termini con a' e b' siano 0 (1ª equazione)
- calcolo u'' tenendo conto solo dei restanti termini
- sostituisco u'' , u' , u nell' equazione: i pezzi con a e b se ne vanno e quello che resta è la 2ª equazione in a' e b'
- metto a sistema le 2 equazioni e calcolo $a'(t)$ e $b'(t)$
- trovo $a(t)$ e $b(t)$ facendo le primitive
- sostituisco nella formula per $u(t)$

Tutta la teoria vista finora si applica anche ad equazioni di ordine 1 (ovviamente lineari)

Esempio 1 $u' = 7u$ Volendo è a variabili separabili
Ma è anche lineare e omogenea

$$u' - 7u = 0 \rightsquigarrow \text{Polinomio: } x - 7 = 0 \rightsquigarrow \text{Radici: } x = 7 \\ \rightsquigarrow \text{Base: } e^{7t} \rightsquigarrow \text{Sol. generale: } u(t) = ae^{7t}$$

Esempio 2 $u' = -u + t^2 + e^{-t}$. La vedo come lineare $u' + u = t^2 + e^{-t}$
Omogenea: $u' + u = 0 \rightsquigarrow x + 1 = 0 \rightsquigarrow x = -1 \rightsquigarrow e^{-t}$
Sol. gen. eq. omog.: $u(t) = ae^{-t}$

Tentativo per la non omogenea: $u(t) = at^2 + bt + c + d \cdot t e^{-t}$
tentativo per t^2 sewe perchè e^{-t} è sol. eq. omog.

Derivo e sostituisco: $u'(t) = 2at + b + de^{-t} - dt e^{-t}$

$$\underbrace{2at + b + de^{-t} - dt e^{-t}}_{u'} + \underbrace{at^2 + bt + c + dt e^{-t}}_{+u} = t^2 + e^{-t}$$

$a = 1$	coeff. t^2	$a = 1$
$2a + b = 0$	coeff. t	$b = -2$
$b + c = 0$	termine noto	$c = 2$
$d = 1$	coeff. e^{-t}	$d = 1$

Sol. gen. eq. non omogenea:

$$u(t) = ae^{-t} + t^2 - 2t + 2 + te^{-t}$$

Osservazione $u'' + u = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$
 $\rightarrow u(t) = a \cos t + b \sin t$

$$u'' - u = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow u(t) = ae^t + be^{-t}$$

Ma anche $u(t) = a \cosh t + b \sinh t$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 099

Titolo nota

22/01/2011

Eq. Diff. Lineari 1° ordine, anche a coeff. non costanti
(se è a coeff. costanti, è il caso precedente con $k=1$)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Due metodi equivalenti: → Fattore integrante
→ Variazione delle costanti

Fattore integrante Considero una primitiva $A(t)$ della $a(t)$, cioè
 $A'(t) = a(t)$.

Moltiplico l'equazione per

$$e^{A(t)} = \text{fattore integrante}$$

$$u'(t)e^{A(t)} + a(t)u(t)e^{A(t)} = b(t)e^{A(t)}$$

$$[u(t)e^{A(t)}]' = b(t)e^{A(t)}$$

Ora basta fare la primitiva per avere che

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt + c$$

Non resta che ricavare $u(t)$ per avere la soluzione generale:

$$u(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)} dt$$

Formula per soluzione generale eq. 1° ordine Lineare

Si riesce a risolvere sempre per di

- sapere fare la primitiva di $a(t)$,
- sapere fare la primitiva di $b(t)e^{A(t)}$.

Esempio 1 $u' + tu = t^3$

Oss. Non è a coeff. costanti, non è a variabili separabili, quindi non rientra in altre tipologie

$a(t) = t$ $A(t) = \frac{1}{2}t^2$ Fattore integrante: $e^{\frac{1}{2}t^2}$. Moltiplico:

$$u' e^{\frac{1}{2}t^2} + t u e^{\frac{1}{2}t^2} = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[u e^{\frac{1}{2}t^2} \right]' = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow u e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} dt = (*)$$

Provo la sostituzione $y = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow dy = t dt$

$$\begin{aligned} \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} dt &= \int t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} t dt = 2 \int y e^y dy = 2 \{ y e^y - \int e^y dy \} \\ &= 2 y e^y - 2 e^y \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}t^2 - 1 \right) e^{\frac{1}{2}t^2} \\ &= t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

Tornando a (*) abbiamo che

$$u e^{\frac{1}{2}t^2} = t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{\frac{1}{2}t^2} + c, \text{ da cui}$$

$$u(t) = c e^{-\frac{1}{2}t^2} + t^2 - 2$$

Soluzione generale equazione non omogenea.

2° metodo: teoria generale + tentativo o variazioni costanti.

Devo risolvere

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Per la teoria generale la soluzione sarà del tipo

$$u(t) = c u_1(t) + \bar{u}(t)$$

dove $u_1(t)$ è sol. dell'omogenea e $\bar{u}(t)$ è sol. qualunque della non omog.

Risolvero l'equazione omogenea $u' + a(t)u = 0$. Questa è a variabili separabili e come tale la tratto

$$u' = -a(t)u ; \quad \frac{du}{dt} = -a(t)u ; \quad \frac{du}{u} = -a(t)dt ;$$

$$\log |u| = -A(t) + c \quad \rightarrow \quad |u| = e^{-A(t)+c} \quad \rightarrow \quad u(t) = \pm e^{-A(t)+c}$$

cioè

$$u(t) = \pm e^c \cdot e^{-A(t)} = k e^{-A(t)} \quad \text{Soluzione generale equazione omogenea.}$$

Per trovare la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ ho 2 opzioni:

→ tentativo

→ variazione delle costanti: la soluzione dell'omog. era $u(t) = k e^{-A(t)}$, quindi il tentativo da fare è

$$u(t) = k(t) e^{-A(t)}$$

Derivo:

$$u'(t) = k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'equazione e trovo

$$\underbrace{k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}}_{u'(t)} + \underbrace{a(t) k(t) e^{-A(t)}}_{+ a'(t) u} = b(t)$$

da cui

$$k(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$$

Quindi la soluzione particolare è $u(t) = k(t) e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$ e infine la soluzione generale è

$$u(t) = \underbrace{k e^{-A(t)}}_{\text{viene fuori dall'omogenea}} + \underbrace{e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt}_{\text{soluzione speciale ottenuta con variazione delle costanti.}}$$

— o — o —

Esempio 1 bis $u' + tu = t^3$. L'eq. omogenea ha come soluzione

$$u(t) = k e^{-\frac{1}{2}t^2} = k e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 100

Titolo nota

25/01/2011

CRITERIO SERIE $\leftrightarrow$ INTEGRALI "Gli integrali aiutano le serie"Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale

- $f(x)$ è debolmente decrescente
- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$

È chiaro che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum \text{area rettangoli "sotto"}$$



Ma area $(R_i) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{f(i)}$, quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$

Considerando invece i rettangoli "sopra" $R'_1, R'_2, \dots$ otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum \text{Area rett. "sopra"} = \sum_{i=1}^{\infty} f(i-1) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \quad \text{Confronto serie-integrali}$$

Piccola variante: se abbiamo $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $M \in \mathbb{N}$ e come prima f è deb. decrescente e ≥ 0 , otteniamo

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} f(i) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=M}^{\infty} f(i)$$

Le due serie a destra e sinistra hanno lo stesso comportamento perché differiscono per un solo termine. Conseguenza:

L'integrale improprio converge $\Leftrightarrow$ la serie converge.

Dim. se la serie converge, allora per la disug. di dx converge l'integrale
 se la serie fa $+\infty$, allora per la disug. di sx l'integrale fa $+\infty$.

— o — o —

Esempio classico di utilizzo: dimostrare il comportamento della serie armoniche generalizzata.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^a}$, definita in $[1, +\infty)$.

Si tratta di una funzione deb. decr. e ≥ 0 , quindi per il criterio

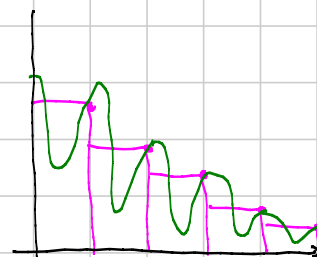
$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^a} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ converge}$$

Ora sappiamo che l'integrale converge $\Leftrightarrow a > 1$ (dimostrato usando la definizione), quindi lo stesso vale per la serie.

Esempio analogo è la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$
(stessa cosa con $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$).

Domanda: dove è servita l'ipotesi che f è decrescente?

Nel confrontare la funzione con i rettangoli.



"Le serie aiutano gli integrali"

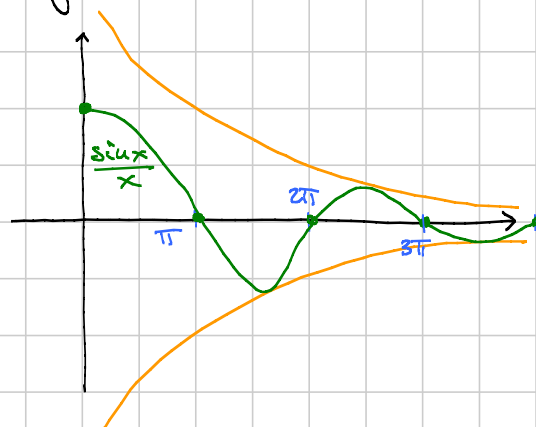
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge (si dimostra con la definizione + integrali
ne per parti)

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \leadsto$ "metodo dei triangolini"

$\frac{\sin x}{x}$, escluso $x=0$, si annulla
 $\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Il suo segno coincide con il segno di $\sin x$. Infine

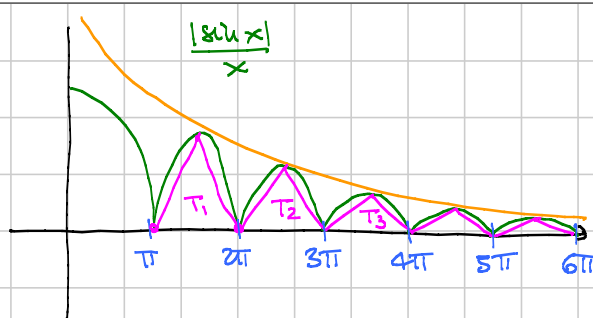
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \text{serie area delle "colline"}$$

$\geq$ serie area
"triangolini"

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$



Base $T_n = \pi$ perché è la lung. dell'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$

Altezza $T_n =$ valore della funzione nel punto medio della base, cioè in $n\pi + \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{|\pm 1|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \pi \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

base altezza

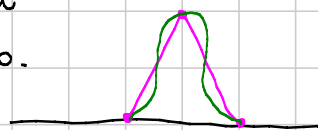
La serie diverge (è sostanzialmente armonica) quindi l'integrale improprio diverge. Quindi questo è un esempio in cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty \quad (\text{la somma delle aree delle colline diverge})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge} \quad (\text{la somma delle aree delle colline prese a segno alterno converge})$$

— 0 —

Osservazione 1 Abbiamo barato dicendo che il triangolino sta sotto la collina. Non abbiamo mai escluso la situazione a fianco.



Osservazione 2 Il vertice del triangolino NON è nel p.to di max della funzione.

Calcolo la derivata: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$

Nel vertice del triangolino, cioè $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ si ha che $\cos x = 0$ e $\sin x = \pm 1$, quindi la derivata non si annulla.

Il punto di max è in realtà un po' prima.

Un motivo è che a parità di valori di $\sin x$, conviene sempre avere un denominatore + piccolo.



— o — o —

Osservazione 3 Il confronto serie-integrali permette di stimare l'errore che si ha troncando una serie ad un certo p.to.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$. Questa converge. Voglio sapere più o meno quanto fa la somma. Calcolo (al computer)

$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^{10}}$. Che errore sto commettendo? Ovviamente

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} \leq \underbrace{\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^{10}} dx}_{\text{e questo lo so calcolare, ottenendo così una stima dell'alto dell'errore commesso}}$$

e questo lo so calcolare, ottenendo così una stima dell'alto dell'errore commesso

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 101

Titolo nota

25/01/2011

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

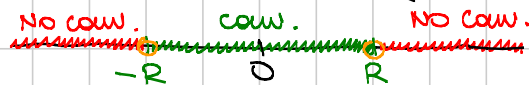
dove i c_n sono numeri reali assegnati, detti coefficienti.
Detto brutalmente: è "un polinomio di grado infinito".

Domande: $\rightarrow$ per quali valori della x converge
 $\rightarrow$ per i valori di x per cui converge, calcolare la somma.

Teorema 1 (Raggio di convergenza). Esiste $R \in [0, +\infty]$ (può essere $+\infty$) tale che

- per ogni $|x| < R$ la serie converge,
- per ogni $|x| > R$ la serie non converge e anzi non verifica nemmeno la condizione necessaria,
- per $|x| = R$ dipende caso per caso, anche indipendentemente: in $+R$ e $-R$ possono succedere cose diverse.

Interpretazioni Quando $R \in (0, +\infty)$ (estremi esclusi) la situazione è



quindi la zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine con o senza estremi a seconda dei casi

Quando $R = +\infty$, vuol dire che la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$, perché siamo sempre nel 1° caso.

Quando $R = 0$ la serie converge solo per $x = 0$ (tutte le serie di potenze convergono per $x = 0$ al valore c_0).

Teorema 2 (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che esista

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty] \text{ (estremi inclusi)}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (con l'accordo che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$)Osservazione Quando il limite non esiste, R esiste comunque per via del teorema 1, ma non si calcola con questa formula.Dim. considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Provo a studiarla con l'assoluta convergenza.

Studio quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questa la studio con il criterio della radice, per cui calcolo

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L|x|$$

Ci sono quindi 2 (o meglio 3) casi

- Se $L|x| < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, abbiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < +\infty$, quindi per assoluta convergenza converge pure la serie di partenza.
- Se $L|x| = 1$, cioè se $|x| = \frac{1}{L}$, allora BOK.

- Se $L|x| > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, abbiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = +\infty$, quindi BOK... apparentemente. In realtà, per il criterio della radice applicato ai limiti, abbiamo anche che $|c_n| \cdot |x|^n = |c_n x^n| \rightarrow +\infty$, ma allora non è possibile che $c_n x^n \rightarrow 0$ (se tendesse a zero, lo farebbe pure con il valore assoluto). Ma allora sulla serie iniziale manca la condizione necessaria, quindi non può convergere.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$. Serie di potenze con $c_n = \frac{2^n}{n}$.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$$

Quindi $R = \frac{1}{2}$. Restano da studiare a mano i casi $x = \pm \frac{1}{2}$.

Per $x = \frac{1}{2}$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Per $x = -\frac{1}{2}$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

e questa converge per Leibnitz.

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} = 3$

Quindi $R = \frac{1}{3}$. Verifico a parte $x = \pm \frac{1}{3}$.

Per $x = \frac{1}{3}$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge.

Per $x = -\frac{1}{3}$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge (Leibnitz o assol. conv.)

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^{2n}$. Non ci sono le potenze d'ispari, quindi è come se tutti i c_n con n dispari fossero nulli.

Se vado a calcolare $\sqrt[n]{|c_n|}$, questo non ha limite (comp. diverso sui pari e sui dispari). Tuttavia:

pongo $y = x^2$ e diventa sost. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} y^n$. Sappiamo da prima che questa converge $\Leftrightarrow$

$y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, quindi quella originale conv. $\Leftrightarrow x^2 \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, quindi

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \quad \text{(ho risolto } -\frac{1}{3} \leq x^2 \leq \frac{1}{3} \text{)}.$$

SERIE DI TAYLOR

Si dice serie di Taylor una serie di potenze la cui somme parziali sono i polinomi di Taylor di una data funzione

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Teorema 3 Consideriamo la serie di Taylor di una funzione decante (e qualunque cosa ottenuta a partire dalle funzioni elementari senza problemi burocratici) è decante.

Allora per tutti gli x per cui la serie converge (e solo per questi x), la somma della serie è proprio la funzione di partenza.

Esempio Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$. Questa è il caso $x=8$ della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che è la serie di Taylor di e^x .

Per quali x converge? Calcolo $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$L=0$, quindi $R=+\infty$, quindi la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per il teorema 3 la somma è la funzione di partenza, cioè e^x .

Quindi la somma della serie di partenza è e^8 .

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 102

Titolo nota

25/01/2011

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Serie di potenze con $c_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Studio i casi $x = \pm 1$ separatamente. In entrambi i casi manca la condizione necessaria, quindi non converge.

Conclusione: converge $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

Per vedere a cosa converge ci sono 2 possibilità:

1 - osservare che è una geometrica, quindi converge a $\frac{1}{1-x}$

2 - osservare che è la serie di Taylor della funzione

$f(x) = (1-x)^{-1}$ e quindi, DOVE CONVERGE, converge alla funzione $f(x)$ stessa.

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Dove converge? $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$

Studio a parte: $x = 1 \Rightarrow$ armonica che diverge

$x = -1 \Rightarrow$ converge per Leibnitz

Quindi la serie converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$.

A cosa converge? Spero che sia una serie di Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Ricorda molto $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Quindi la serie data è

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \text{serie data}$$

Conseguenza: la serie data, dove converge, converge a $-\log(1-x)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in \boxed{[-1, 1)} \quad \begin{array}{c} \text{ZONA DI CONVERGENZA} \\ \uparrow \end{array}$$

Caso speciale: $x = -1$ e ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$

$$x = \frac{1}{2} \text{ e ottengo } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \log 2$$

Osservazione Lo stesso esercizio si può vedere a partire da calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Procedimento

- vederla come caso $x = \frac{1}{2}$ della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- studiare la zona di convergenza
- vedere la serie come una serie di Taylor in modo da calcolarne la somma
- sostituire $x = \frac{1}{2}$ nella formula trovata.

Esempio 3 Calcolare $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

In formule, calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Intanto conv. per Leibnitz

Sembra molto la serie di Taylor di $\arctan x$ calcolata per $x = 1$. Dove converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \stackrel{y=x^2}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$$

Nella variabile y ho una serie di potenze con $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, quindi

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Restano i casi $y = 1 \leadsto$ converge per Leibnitz

$y = -1 \leadsto$ diverge perché se ne va il $(-1)^n$.

Conclusione: la serie in y converge $\Leftrightarrow y \in (-1, 1]$, quindi la serie in x converge per $x^2 \in (-1, 1]$, quindi sicuramente per $x \in (-1, 1)$.

C'è poi da ristudiare il bordo che è ok per $x = 1$.

Quindi la serie di Taylor di $\arctan x$ converge anche per $x = 1$, quindi la somma iniziale è

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots$

Dove converge? $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$.

Provando $x = \pm 1$ manca sempre la cond. nec., quindi non converge.

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

A cosa converge? Metto in evidenza una x :

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots &= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \stackrel{\text{LOSCO}}{=} x(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^1 \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^1 \\ &= x \left[\frac{1}{1-x} \right]^1 = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Conclusione: $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

Losco: è vero che la derivata della somma è la somma delle derivate solo se la somma è finita.

In generale non è vero per le serie, ma è vero per la serie di potenze.

Teorema 4 (Scambio serie $\leftrightarrow$ derivata) La derivata di una serie di potenze è la serie delle derivate. In simboli

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1} \quad \forall x \text{ per cui entrambe conv.}$$

Inoltre le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza (ma il comportamento per $x = \pm R$ può essere diverso).

Oss. letto al contrario: la primitiva di una serie di potenze è la serie delle primitive.

Esempio 5 Calcolare $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. È il caso $x = \frac{1}{2}$ di $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 x^n$

Raccolgo una x : $x \sum_{n=3}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=3}^{\infty} [n x^n]' = \text{(teo. scambio)}$

$$= x \left[\sum_{n=3}^{\infty} n x^n \right]' = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} n x^n - \underbrace{0 - x - 2x^2}_{\text{tolgo termini con } n=0,1,2} \right]'$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} x \left[\frac{x}{(1-x)^2} - x - 2x^2 \right]' = x \left[\frac{(1-x)^2 + 2(1-x) \cdot x}{(1-x)^4} - 1 - 4x \right]$$

Esempio 4

Aggiunto dopo video

$$= x \left(\frac{x \oplus 1}{(1-x)^3} - 1 - 4x \right) = \text{conto.}$$

Ora è facile vedere che il raggio di convergenza della serie di partenza è $R=1$, quindi posso sostituire $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 - 1 - 2 \right) = \frac{1}{2} (12 - 1 - 2) = \frac{9}{2} \quad \text{Cometto dopo video}$$

$$\frac{9}{2^3} + \frac{16}{2^4} + \frac{25}{2^5} + \frac{36}{2^6} + \dots = \frac{1}{2}$$

Ops: c'è evidentemente un errore di conto da qualche parte (già il primo termine è maggiore di 1...): ricontrollare !!!

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 103

Titolo nota

26/01/2011

Varianti del teorema di Weierstrass

Weierstrass classico Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esistono
 $\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$
 $\min \{ \quad \quad \quad \}$

↑
intervallo con estremi compresi

1ª variante Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e PERIODICA. Allora esistono
 $\max / \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

Dim. Sia T un periodo di $f(x)$. Ovviamente $T > 0$. Sia

$$M = \max \{ f(x) : x \in [0, T] \}$$

Questo esiste per il Weierstrass classico.

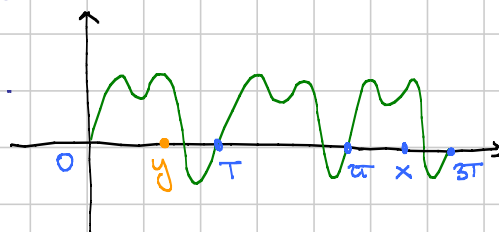
Dico che $M = \max$ su tutto $\mathbb{R}$. Infatti prendo un $x \in \mathbb{R}$ qualunque. Per la periodicità $\exists y \in [0, T]$ t.c. $f(y) = f(x)$
 (esercizio: trovare una formula che fornisce y in funzione di x).

Ma allora

$$f(x) = f(y) \leq M.$$

D'altra parte esiste almeno un p.to

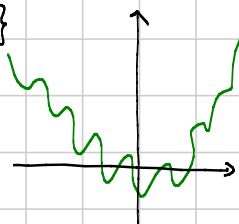
$$x_0 \in [0, T] \text{ dove } f(x_0) = M.$$



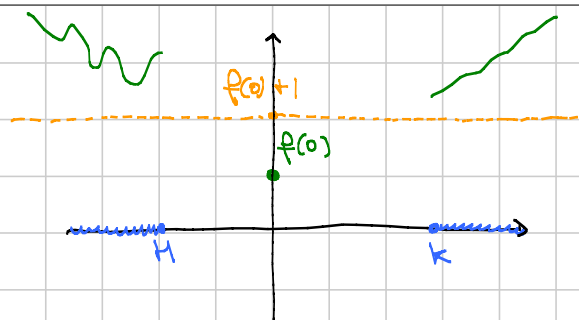
2ª variante Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$



Dim. Considero $f(0)$. Poiché
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, vuol



dire che $\exists k > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \forall x \geq k$$

Analogamente $\exists H < 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \forall x \leq H.$$

Idea: la battaglia per il minimo si gioca in $[H, k]$. Pongo allora

$$m = \min \{ f(x) : x \in [H, k] \},$$

e questo esiste per W. classico. Dico che

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Devo dimostrare 2 cose:

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = m$.

La (ii) è molto facile: poiché m è minimo in $[H, k]$, per forza esiste un $x_0 \in [H, k]$ in cui $f(x_0) = m$.

Per la (i) distinguo 3 casi

• se $x \in [H, k]$, allora $f(x) \geq m$ perché m è il min. in $[H, k]$

• se $x > k$, allora $f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$
def. di k banalità perché $f(x) \geq m$ per ogni pto $x \in [H, k]$ e $0 \in [H, k]$.

• se $x < H$, allora è uguale: $f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$.

def. di H
 — o — o —

Analogo con il max: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

allora per forza esiste $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

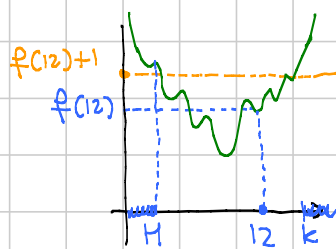
— o — o —

Esercizio: dimostrare la versione con il max

3^a variante Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{f(x) : x > 0\}$



Dim. Considero $f(12)$. Per definizione di limite

esiste $k > 12$ tale che $f(x) \geq f(12) + 1 \quad \forall x \geq k$

esiste $H \in (0, 12)$ tale che $f(x) \geq f(12) + 1 \quad \forall x \in (0, H)$.

Esiste per W. classico $m = \min \{f(x) : x \in [H, k]\}$ e dico che è minimo anche in $(0, +\infty)$. La cosa da dim. è che $f(x) \geq m$ per ogni $x > 0$.

- Se $x \in [H, k]$, allora è la def. di min in $[H, k]$.

- Se $x > k$, allora $f(x) \geq f(12) + 1 \geq f(12) \geq m$

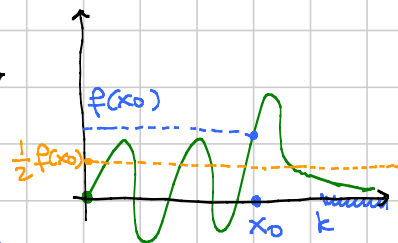
$\uparrow$ def. di k $\uparrow$ Banach $\uparrow$ 12 sta in $[H, k]$, quindi
 ha già giocato la
 partita per il minimo.

- Se $x \in (0, H)$ è uguale.

4^a variante Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$f(0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Allora esiste $\max \{f(x) : x \geq 0\}$
 (e anche il min, a dire la verità)



Dim. Intanto $\exists x_0 > 0$ tale che $f(x_0) > 0$

(tendendo a 0^+ si ha che $f(x)$ è > 0 per ogni x grande abbastanza).

Considero ora $\frac{1}{2} f(x_0)$. Sempre grazie al limite abbiamo che $\exists k > 0$ tale che $f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \geq k$

Considero infine

$$M = \max \{f(x) : x \in [0, k]\}$$

e dico che M è max su tutto $[0, +\infty)$.

Devo verificare 2 cose

(i) $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_1) = M$ (basta prendere un p.to di max in $[0, k]$)

(ii) $\forall x \geq 0$ si ha $f(x) \leq M$. Ci sono 2 casi

- se $x \in [0, k]$, allora $f(x) \leq M$ per definizione di max in $[0, k]$;
- se $x > k$, allora

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \leq f(x_0) \leq M$$

$\uparrow$ def. di k $\uparrow$ banalità $\nwarrow$ $x_0 \in [0, k]$, quindi $f(x_0) \leq M$.
 perché $f(x) > 0$

— o — o —

Esercizio Dimostrare che c'è anche il minimo (idea: o il minimo è zero, allora..., o esiste un p.to in cui $f(x) < 0$ e si ripete lo stesso discorso di prima)

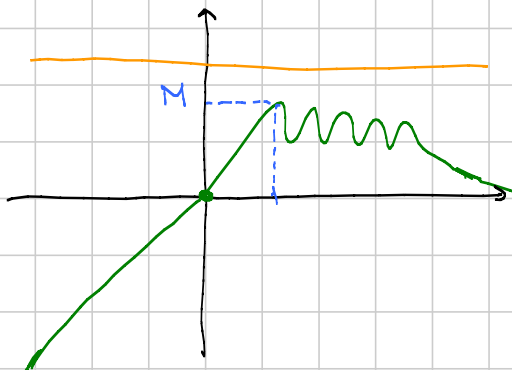
— o — o —

Esempio $x^3 \arctan(e^{-x}) = \lambda$. Dimostrare che esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione non ha soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \left[-\infty \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} \frac{\arctan(e^{-x})}{e^{-x}} = 0^+$$

Inoltre $f(x) \leq 0$ per ogni $x \leq 0$.



Per una variante di W. esiste $M = \max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Ora basta prendere $\lambda > M$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 104

Titolo nota

26/01/2011

Esercizio 1 Studiare il numero di soluzioni dell'equazione

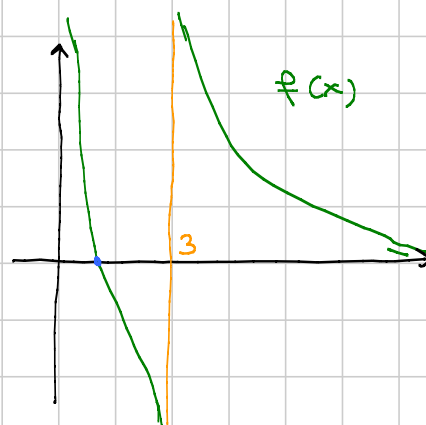
$$f(x) = \frac{\log x}{x-3} = \lambda$$

Studio della funzione $f(x)$.Definita e continua per $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$

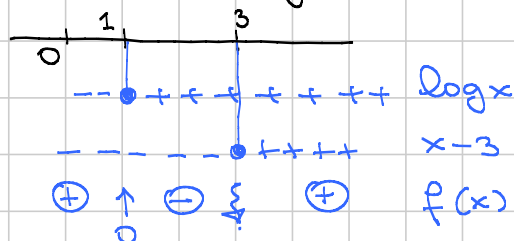
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{logaritmi perdono delle potenze})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[\frac{\log 3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left[\frac{\log 3}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty}{-3} \right] = +\infty$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



$$\text{Studio il segno di } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-3) - \log x}{(x-3)^2} = \frac{1 - \frac{3}{x} - \log x}{(x-3)^2}$$

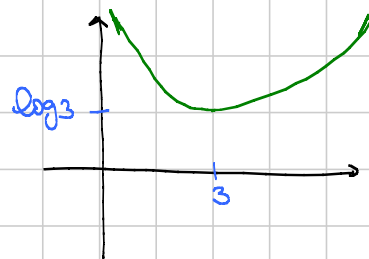
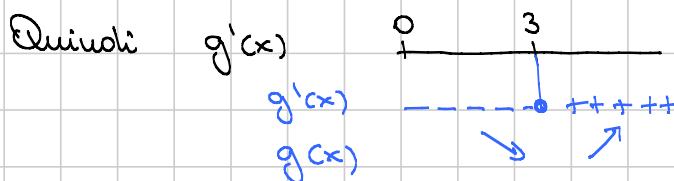
Il denomin. è sempre > 0 dove $f(x)$ è definita. Quindi il segno di $f'(x)$ dipende dal segno del numeratore.

Pongo $g(x) = \log x + \frac{3}{x} - 1$ e studio questa funzione

Definita e continua per $x > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [-\infty + \infty - 1] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\boxed{x \log x} + 3 - x}{x} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

Calcolo $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2}$



Il segno di $g(x)$ dipende da $g(3) = \log 3 - 1 > 0$.

Quindi $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Di conseguenza $f'(x) < 0$ ovunque definita, il che conferma il grafico di $f(x)$ tracciato.

Quindi:

$\lambda \leq 0$	$\leadsto$ 1 soluzione
$\lambda > 0$	$\leadsto$ 2 soluzioni

Achtung! Abbiamo dim. che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Posso dedurre che $f(x) < f(y)$ per ogni scelta di x e y nell'insieme di definizione con $x > y$.

No!! Lo posso dire solo separatamente in $(0, 3)$ e in $(3, +\infty)$.

I teoremi di monotonia richiedono che $f(x)$ sia definita in tutto l'intervallo $[x, y]$ per poter confrontare $f(x)$ e $f(y)$.

Esercizio 2 $f(x) = x \log(x+4)$

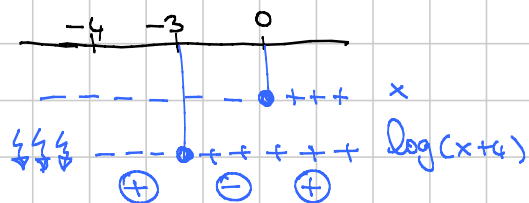
(a) inf / sup / max / min in $(-4, -3)$

Studio $f(x)$

Definita e continua per $x+4 > 0$, cioè $x > -4$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = [-4 \cdot (-\infty)] = +\infty$$

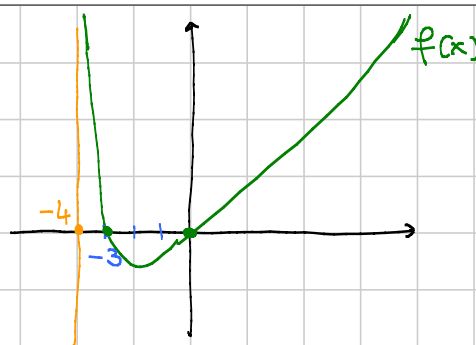
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } \log(x+4) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 1 \Leftrightarrow x = -3$$



$$f'(x) = \log(4+x) + \frac{x}{4+x}$$

La disequazione non è elementare.

Però a noi interessa solo il grafico per $x \in (-4, -3)$. In questo intervallo ho che



$$f'(x) = \underbrace{\log(4+x)}_{\text{neg.}} + \underbrace{\frac{x}{4+x}}_{\text{neg.}} < 0 \text{ per ogni } x \in (-4, -3)$$

Quindi di sicuro il tratto per $x \in (-4, -3)$ è monotono decrescente. Quindi $\sup = +\infty$, $\max$ N.E., $\inf = 0$, $\min$ N.E.

(b) Studiare concavità e convessità. Bisogna studiare il segno di

$$f''(x) = \frac{1}{4+x} + \frac{4+\cancel{x}-\cancel{x}}{(4+x)^2} = \frac{4+x+4}{(4+x)^2} = \frac{x+8}{(4+x)^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ ovunque è definita $f(x) \Rightarrow$ convessa.

(c) Studiare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, il numero di soluzioni di $f(x) = n$. Verrebbe da dire che le soluzioni sono 2 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per verificarlo servono 3 cose

- il fatto che c'è una soluzione unica in $(-4, -3]$
- " " " non ci sono soluzioni in $(-3, 0)$ perché $f(x)$ è negativa lì
- " " " che c'è una soluzione unica in $[0, +\infty)$.

Occorre il segno di $f'(x)$ per $x \geq 0$, ma questo è positivo perché somma di 2 termini positivi.

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 105

Titolo nota

27/01/2011

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5+3}} dx$ Converge banalmente

L'unico problema è a $+\infty$. L'integranda è ≥ 0 (posso usare vari criteri). Confronto asintotico con $\frac{1}{x^{5/2}}$ (suggerito dal brutale)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5+3}} \cdot x^{5/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\arctan x^2}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{x^5}{x^5+3}}}_1 = \frac{\pi}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

I due integrali impropri con problema a $+\infty$ hanno lo stesso comportamento. Quello di $g(x)$ converge ($\frac{5}{2} > 1$) $\Rightarrow$ quello dato converge.

Esercizio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} dx$ Ora ci sono p.b. a 0 e a $+\infty$.
A $+\infty$ converge come prima.

Brutale: $\frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} \underset{\text{per } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \text{converge}$

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x^2}{x^2} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

solito cambio $y=x^2$

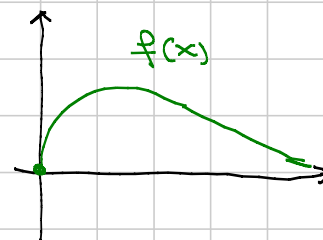
Quindi l'integrale dato con problema a 0 si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con problema a 0, quindi converge.

Esercizio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^3}} dx$ A $+\infty$ converge perché $\frac{3}{2} > 1$
(rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$)

Brutale:

$$\frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^3}} \underset{\text{per } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{x} \rightarrow 0$$

Questo dice che il problema in 0 non c'è perché l'integranda è limitata



Esercizio 4 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ Integranda ≥ 0 , unico problema a $+\infty$

Provo confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{22}}$ (qualsunque espon. > 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{22}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{22}}{e^{\sqrt{x}}} \quad \text{Per concludere il lim.}$$

$$\text{1° modo} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{22 \log x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x} \left(22 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - 1 \right)} = [e^{-\infty}] = 0$$

2° modo cambio di variabili $\sqrt{x} = y$, cioè $x = y^2$. Diventa

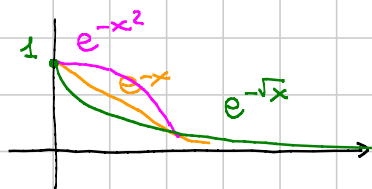
$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{44}}{e^y} = 0 \quad (\text{esponenziale batte potenza})$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ siamo in un caso limite

$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \text{ vicino al problema, quindi } f(x) \leq g(x) \right]$

$\int g(x) dx$ con pbm. a $+\infty$ converge ($22 > 1$) $\Rightarrow \int f(x) dx$ converge

$$e^{-\sqrt{x}} \sim 1 - \sqrt{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



Esercizio 5 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+3) \log x} dx$ Integranda $f(x) \geq 0$
Problemi a $x=1$ e a $+\infty$

A $+\infty$ converge e si può dimostrare in almeno 2 modi.

1° modo : confronto asintotico con $\frac{1}{x^2}$. Viene il caso limite dalla parte giusta (avrebbe bene anche con $\frac{1}{x^{3/2}}$ se uno prova con $g(x) = \frac{1}{x}$ ottiene che è $\leq$ di un integrale che diverge $\Rightarrow$ BOK
se uno prova con $g(x) = \frac{1}{x^{5/2}}$ ottiene che è $\geq$ di un integrale che converge $\Rightarrow$ BOK.

vera $\forall x \geq 3$

2° modo : confronto secco $\frac{1}{(x^2+3) \log x} \leq \frac{1}{x^2 - 1} \quad \int \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \dots$

Esaminiamo il problema in $x=1$, cioè $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+3) \log x} dx$

Con il cambio $y = x-1$ diventa $\int_0^1 \frac{1}{((y+1)^2+3) \log(1+y)} dy$

Brutale: $f(y) \sim \frac{1}{4 \log(1+y)} \sim \frac{1}{4y} \Rightarrow \text{DIVERGE}$
 $\log(1+y) \sim y$

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{((y+1)^2+3)} \cdot \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\neq 0}{\neq +\infty} \Rightarrow \text{stesso comport.}$$

Esercizio 6 $\int_1^2 \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} dx$ Il colpevole dell'essere l'int. improprio è il $\log x$.

Faccio un primo confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{\log x}} = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} \cdot \sqrt{\log x} = \frac{\arctan 1}{7} = \frac{\pi}{28} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi basta studiare $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\log x}} dx$. Ora facciamo il cambio di variabili $x-1=y$.

Diventa $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}} dy$ Brutale: $\frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}} \sim \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \text{converge.}$

Faccio il confronto asintotico con $R(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{y}{\log(1+y)}} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Esercizio 7 $\int_3^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} dx$ converge!

Basta un confronto secco: $\frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} \leq \frac{35}{1 \cdot x^3}$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 106

Titolo nota

27/01/2011

Esercizio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-8}} dx$ Problemi in $x=2$ e a $+\infty$.
Integranda $f(x) \geq 0$

L'integrale con problema a $+\infty$ converge per confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$.

Esaminiamo il problema in $x=2$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-8}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

↑
colpevole

Rigorosamente: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$:

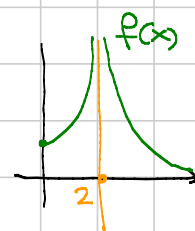
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^3-8}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato con problema in $x=2$ si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ con problema in $x=2$, quindi converge (diventa $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con il cambio di variabili oppure è in tabellina)

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow) \alpha < 1$$

Esercizio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^3-8|}} dx = \int_0^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}$

conver. conver.



L'integrale tra 0 e 2, con problema in $x=2$, si tratta esattamente come prima, con confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{8-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \neq 0 \neq +\infty$$

Ora si usa

$$\int_{b-1}^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow) \alpha < 1$$

Esercizio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^3-7|}} dx$ Il punto in cui ci sono i problemi è ora $\sqrt[3]{7}$, ma l'idea è esattamente la stessa. Quindi si comporta come $\frac{1}{\sqrt{|x-c|}}$, dove $c = \sqrt[3]{7}$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7+x^5-17}} dx$

Intanto c'è il problema a $+\infty$. L'integrale con questo problema converge perché si confronta con $\frac{1}{x^{7/3}}$ e $\frac{7}{3} > 1$.

Ci sono problemi dovuti ad annullamento del denominatore?

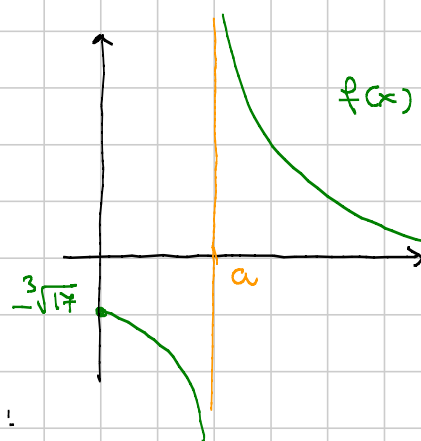
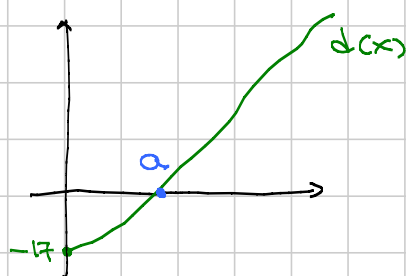
Sì: posto $d(x) = x^7 + x^5 - 17$ ho che $d(0) = -17$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty$.

Essendo $d(x)$ continuo, per una delle varianti del teo. di esistenza degli zeri esiste un p.to $a > 0$ tale che $d(a) = 0$.

Questo p.to a è unico perché $d(x)$ è iniettiva perché è strettamente crescente essendo somma di strettamente crescenti. Volendo:

$$d'(x) = 7x^6 + 5x^4 \geq 0 \text{ sempre e } = 0 \text{ solo in } x=0.$$

Sappiamo che esiste un unico p.to $a > 0$ in cui si annulla il denominatore.



L'integrale dato va quindi spezzato in 3:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^a + \int_a^{a+3} + \int_{a+3}^{+\infty}$$

converge

Problema: non so chi è a .

Idea: faccio il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$

Studiando l'integrale in $[a, a+3]$ devo fare il

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt[3]{x-a}}{x^7 + x^5 - 17} \quad \text{Basta fare il limite sotto la radice cubica}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{x^7 + x^5 - 17} \stackrel{[\frac{0}{0} \text{ Hop}]}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{7x^6 + 5x^4} = \frac{1}{7a^6 + 5a^4} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$ con problema in a , quindi converge.

Per l'integrale in $[0, 3]$ basta confrontare con $\frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}$

L'integrale globale converge.

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \arctan x \cdot e^{-x} dx$ converge perché
 $0 \leq \arctan x \cdot e^{-x} \leq \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}$
 e $\int e^{-x} dx$ con lim. a $+\infty$ converge (dim. con la definizione)

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx$

Problema: non so fare la primitiva di $\arctan x \cdot e^{-x}$. La chiamo $F(x)$.

Allora il limite diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (F(\frac{1}{n}) - F(0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\frac{1}{n}) - F(0)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\stackrel{\frac{1}{n} = x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x^2} \stackrel{[\frac{0}{0} \text{ Hop}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{2x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{derivata primitiva} \\ = \text{integrande} \end{array}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$
 ho che $x \rightarrow 0^+$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x \cdot e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx}_{a_n}$ Banalmente converge

Faccio il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$ e devo fare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ converge.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{1/n^2} \sin x \cdot \log(1+x^2) e^{3+x^3} dx \right]^\alpha$

converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{8}$

Brutale: $f(x) \sim x^3$ per $x \rightarrow 0$, quindi è un po' come fare

$$\int_0^{1/n^2} x^3 \sim \left[x^4 \right]_0^{1/n^2} \sim \frac{1}{n^8}$$

Metto α e trovo $\frac{1}{n^{8\alpha}}$. Converge $\Leftrightarrow 8\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{8}$

Rigoroso: confronto asintotico tra l'integrale e $\frac{1}{n^8}$ usando Hôpital.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 107

Titolo nota

29/01/2011

Esempio Consideriamo l'equazione differenziale

$$u' = u - \arctan t \quad u(0) = \alpha$$

Domanda: esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è limitata per $t \geq 0$?

Si tratta di equazione lineare del 1° ordine a coeff. costanti non omogenea:

$$u' - u = -\arctan t$$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = ce^t$

Non si riesce a trovare esplicitamente una sol. dell'eq. non omog.

Scriviamo la formula generale con gli integrali

$$u' + a(t)u = b(t) \quad a(t) = -1 \quad b(t) = -\arctan t$$

$$A(t) = -t \quad \text{Fatt. integr. } e^{-t}$$

$$u'e^{-t} - u e^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$[u e^{-t}]' = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$u e^{-t} = -\int \arctan t \cdot e^{-t} dt + c$$

$$u(t) = -e^t \int \arctan t \cdot e^{-t} dt + ce^t$$

Sol. gen. eq. non omogenea

Idea: pongo $F(t) = \int \arctan t \cdot e^{-t} dt$ e posso riscrivere la solus. come

$$u(t) = -e^t F(t) + ce^t = e^t (c - F(t))$$

Posso supporre anche di aver scelto $F(t)$ in modo che sia $F(0) = 0$.

Trovo c in funzione di α :

$$u(0) = e^0 (c - F(0)) = c = \alpha$$

Sol. problema di Cauchy è

$$u(t) = e^t (\alpha - F(t))$$

Come faccio a sapere se $u(t)$ è limitata per $t \geq 0$?

Se il limite è $\pm\infty$, allora non è limitata, se il limite $\in \mathbb{R}$ allora è limitata

Proposizione: sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora f è limitata, cioè

esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che $A \leq f(x) \leq B \quad \forall x \geq 0$.

Dim.: Applico la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ (con $\varepsilon = 32$ sarebbe uguale).

Allora $\exists k \in \mathbb{R} \quad t.c.$

$$l-1 \leq f(x) \leq l+1 \quad \text{per ogni } x \geq k.$$

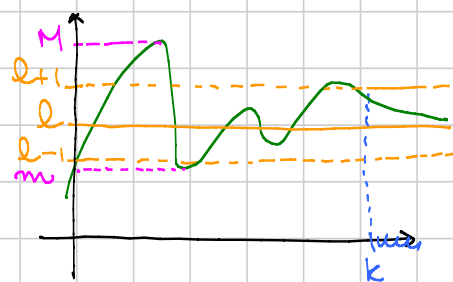
D'altra parte per w , esistono

$$M = \max \{ f(x) : x \in [0, k] \}$$

$$m = \min \{ f(x) : x \in [0, k] \}$$

Quindi, posto $B = \max \{ M, l+1 \}$ $A = \min \{ m, l-1 \}$
abbiamo proprio che

$$A \leq f(x) \leq B \quad \text{per ogni } x \geq 0$$



Oss. È essenziale che sia f definita e continua anche in $x=0$
(altrimenti ho il controesempio $f(x) = \frac{1}{x}$).

Analogo: se una successione tende ad un limite finito $l \in \mathbb{R}$,
allora a_n è limitata

Dim. Definitivamente abbiamo che $l-1 \leq a_n \leq l+1$. Prima
c'è solo un numero finito di termini.

Achtung! Non è vero che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ implica che esiste
 $\max \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$.

Ad esempio: $a_n = \arctan n$

Dobbiamo studiare il limite di $e^t(\alpha - F(t))$, dove $F(t)$ è la primitiva di $\arctan t \cdot e^{-t}$ che ha $F(0) = 0$.
A cosa tende $F(t)$? Tende a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \arctan t \, dt \quad \text{e questo converge perché } e^{-t} \cdot \arctan t \leq e^{-t} \frac{\pi}{2}$$

Sia α_0 il valore a cui converge l'integrale. Allora abbiamo 3 casi

- Se $\alpha > \alpha_0$, allora $u(t) = e^t(\alpha - F(t)) \rightarrow [+ \infty \text{ pos}] = +\infty$
- Se $\alpha < \alpha_0$, allora $u(t) = e^t(\alpha - F(t)) \rightarrow [+ \infty \text{ neg}] = -\infty$
- Se $\alpha = \alpha_0$, allora il limite è una forma indeterminata, che tratto con Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t(\alpha - F(t)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - F(t)}{e^{-t}} \stackrel{[\frac{0}{0} \text{ Hôp}]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-F'(t)}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} \cdot \arctan t}{e^{-t}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione è limitata.

Questo è un esempio di valore SOGLIA:

→ sopra α_0 la soluzione $\rightarrow +\infty$

→ sotto α_0 la soluzione $\rightarrow -\infty$

→ per α_0 la soluzione $\rightarrow \frac{\pi}{2}$, quindi è limitata.

Altra domanda: prendiamo $\alpha > \alpha_0$, quindi $u(t) \rightarrow +\infty$.

Come tende a $+\infty$? Ci tende esponenzialmente perché

$$\frac{u(t)}{e^t} = \alpha - F(t) \rightarrow \alpha - \alpha_0 > 0$$

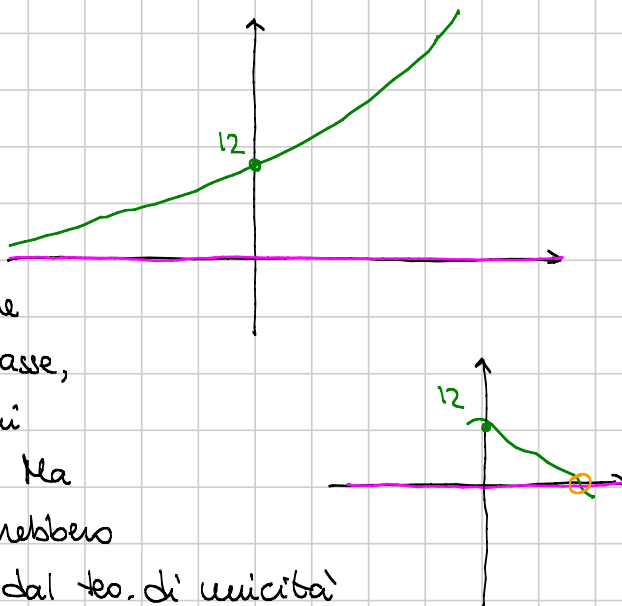
Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u(n)}$? Questa converge perché

$$\frac{1}{u(n)} \sim \frac{1}{e^n} \quad (\text{confronto asintotico}).$$

Esempio $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 12 \end{cases}$ Esplicitamente non si risolve

Oss.1 La funzione $u(t) \equiv 0$ risolve l'equazione

Oss.2 La soluzione che parte da 12 non può diventare negativa. Se lo diventasse, ci sarebbe un p.to in cui tocca l'altra soluzione. Ma allora per quel p.to passerebbero 2 soluzioni, cosa vietata dal teo. di unicità



Oss.3 Essendo $u(t) > 0$ sempre, sarà per forza monotona crescente perché $u' = \arctan u > 0$

Oss.4 Non può esserci blow-up perché $u' \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi cresce moderatamente.

Oss.5 Si ha che $u(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ perché per ogni $t \geq 0$ si ha che $u'(t) = \arctan u(t) \geq \arctan 12$
 perché $u(t) \geq 12$

Oss.6 Si potrebbe dimostrare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

Oss.7 $u(t) \rightarrow +\infty$ linearmente. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow$ $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\uparrow$ perché $u(t) \rightarrow +\infty$
 $\frac{\infty}{\infty}$ — 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 108

Titolo nota

29/01/2011

Esercizio 1 $a_{n+1} = \sqrt[n]{10+a_n}$ $a_1 = 2011$

Non autonoma. Idea: vince la radice n -esima e la succ. tende a 1.

PIANO Limitatezza + Carabinieri

(i) $1 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nota bene: $a_2 = 10 + a_1 = 2021$)

(ii) $a_n \rightarrow 1$.

Dim. (i) $a_n \geq 1$ induzione semplicissima

$a_n \leq 10.000$ induzione $[n=1]$ $2011 \leq 10.000$ ovvio

$[n \Rightarrow n+1]$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

Dim.:

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{10+a_n} \leq \sqrt[n]{10.010} \leq \sqrt{10.010} \leq 10.000$$

$\uparrow$ uso ipotesi + monotonia di radice n -esima
 $\nwarrow$ vero per $n \geq 2$

Poiché nel passaggio induttivo è servita l'ipotesi $n \geq 2$, devo verificare $n=2$ come ulteriore passo base:

$a_2 = 2021 \leq 10.000$.

Dim. (ii) Grazie al p.to (i) so che $1 \leq a_n \leq 10.000$, quindi

$11 \leq 10+a_n \leq 10.010$, quindi

$$\sqrt[n]{11} \leq \sqrt[n]{10+a_n} = a_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.010}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Ho così dimostrato che $a_{n+1} \rightarrow 1$, quindi anche $a_n \rightarrow 1$ (shift degli indici).

— o — o —

Esercizio 2

$$a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \quad a_1 = 0$$

Non autonoma. Domande: determinare il limite
determinare se è monotona e come

Esperimenti: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 10.5, a_4 = 10\sqrt{10.5} + \frac{1}{3}$

Moltiplicare per 10 $\rightarrow$ crescere
Fare la radice $\rightarrow$ diminuire.

Altro esperimento: se fosse $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$
potrei fare il disegno e con partenza
piccola positiva avrei che $a_n \rightarrow 100$
(in realtà anche con partenza enorme)



Idea: $a_n \rightarrow 100$ anche nel caso non autonoma.
Supponiamo di sapere che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Chi è l ?

$$\begin{array}{c} a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ l = 10\sqrt{l} + 0 \end{array}$$

$$l = 10\sqrt{l} \Rightarrow l = 100$$

- PIANO**
- (i) $1 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 2$
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (segue da (i) e (ii))
 - (iv) $l = 100$ (Già dimostrato)

Dim (i) $a_n \geq 1$ inclusione facile

$a_n \leq 10.000$ inclusione $n=2$ $a_2 = 1 \leq 10.000$ ok.

$n \Rightarrow n+1$ ipotesi: $a_n \leq 10.000$ tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$\begin{array}{l} \text{Dim. } a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \leq 10\sqrt{10.000} + \frac{1}{n} \leq 10 \cdot 100 + 1 \leq 10.000 \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \text{uso Hp +} \quad \quad \text{uso } \frac{1}{n} \leq 1 \\ \quad \quad \text{monotonia di } \sqrt{x} \end{array}$$

Dim (ii) Considero 2 casi

- Se $a_n \leq 100$ sempre, allora

$$a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \geq 10\sqrt{a_n} \geq a_n$$

$\uparrow$ trascino $\frac{1}{n}$ $\uparrow$ disequazione
 $10\sqrt{x} \geq x$ ha come sol.
 $x \in [0, 100]$

Ho così dimostrato che se sta sempre sotto 100, allora a_n è monotona crescente e questo basta per l'esistenza del limite

- Se non è monotona crescente, allora esiste un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$. A quel p.to decresce sempre, cioè $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$. Infatti lo dimo per induzione: $n = n_0$ ovvio

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim.

$$a_{n+2} = 10\sqrt{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n+1} \leq 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

$\uparrow$ uso Hp. e monotonia

Così ho dimostrato che $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Riassumendo: ho dimostrato che

- o è sempre crescente ($\Rightarrow$ p.to (iii) ok)
 - o c'è un n_0 t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$ e da quel p.to in poi è sempre decrescente ($\Rightarrow$ p.to (iii) ok).
- o — o —

Escludo che a_n possa essere sempre crescente.

Oss.1 Se fosse sempre crescente, sarebbe $a_n \leq 100$ sempre

Oss.2 Se sta sotto 100, allora $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \geq a_n + \frac{1}{n}$

$\uparrow$ $10\sqrt{x} \geq x \dots$

Oss.3 Dall'osservazione 2 si ha che

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{n} \geq a_{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \geq a_{n-2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Quindi $a_n \geq$ somme parziali di una serie armonica, quindi diverge, quindi è assurdo che stia sotto 100.

Esercizio 3 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

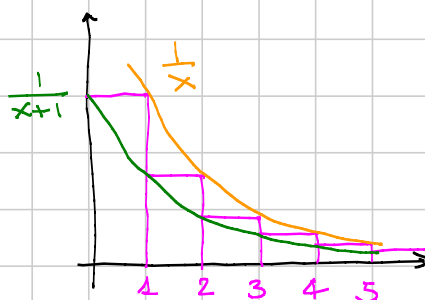
Allora $S_n \rightarrow +\infty$ (serie armonica diverge). Come?
Come $\log n$. Motivazione brutale $\log x$ è la primitiva di $\frac{1}{x}$.

Più rigoroso: confronto serie integrali

$$\int_0^n \frac{dx}{x+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

cioè

$$\log(n+1) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}_{S_n} \leq 1 + \log n$$



Questo dimostra che S_n diverge come un logaritmo.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 109 ☺

Titolo nota

29/01/2011

Ogrande Ripartiamo da o piccolo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \text{ se}$$

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Ogrande

Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se

$$f(x) = g(x) w(x) \quad \text{con } w(x) \text{ limitata in un intorno di } x_0$$

asintoticamente equiv.

Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se ... con $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$ Esempi Brutalmente: $O(x^3)$ raccoglie tutte le potenze di x con esponente > 3 $O(x^3)$ raccoglie tutte le potenze di x con esponente ≥ 3

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^5) \quad \text{potenze con esponente } \geq 5$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^5) \quad \text{FALSA}$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^3) \quad \text{VERA ma buffa perché } O(x^3) \text{ assorbe anche } x^3$$

Oss. Quando posso dividere, dire che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

il che equivale a dire che $f(x)$ e $g(x)$ sono perfettamente equivalenti. Ad esempio $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$.

Definizione Se $f(x) \sim \alpha x^a$ per $x \rightarrow 0$ si dice che $f(x)$ è un infinitesimo (si pensa $a > 0$) di ordine a e ha parte principale αx^a

Esempio $f(x) = e^{2x} - 1 - 2\arctan x$.

Determinare ordine di infinitesimo e parte principale.
Sostanzialmente si tratta di determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor

$$f(x) = \cancel{1} + \cancel{2x} + \frac{4x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{2x} + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2)$$

Posso dire in modo equivalente che $f(x) \sim 2x^2$ per $x \rightarrow 0$.

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{2x^2} = 1$$

Esempio $f(x)$ come sopra. Come si comporta $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$

È chiaro che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ condizione nec.

verificata $\Rightarrow$ la serie potrebbe convergere.

Brutale: $f(x) \sim 2x^2 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) \sim \frac{2}{n^2} \Rightarrow$ la serie converge

Rigoroso: $f(x) \sim 2x^2 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) \sim \frac{2}{n^2}$
 $\uparrow$ equiv. asint. $\uparrow$ equiv. asint.

Confronto asintotico con $b_n = \frac{2}{n^2}$ produce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2} = 1 \neq 0 \neq \pm \infty \Rightarrow \text{stesso comport. ...}$$

— 0 — 0 —

Esempio $\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 \sim \boxed{\frac{+1}{120}x^5}$ Primo termine che resta quando sviluppo con Taylor.

Esercizio $a_{n+1} = \int_0^{a_n} e^{-t^2} dt$ $a_0 = 2011$

È autonoma!!! Questa è $a_{n+1} = F(a_n)$ dove

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ è la primitiva di e^{-t^2} che si annulla in $x=0$.

Cosa possiamo dire di $F(x)$? $F(0) = 0$

$F(x)$ è monotona perché

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0 \text{ sempre}$$

Quindi è crescente.

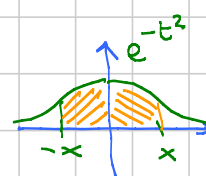
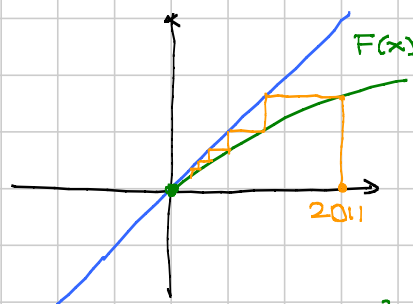
$F(x)$ è dispari perché

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

e^{-t^2} è pari

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt = x$$

$e^{-t^2} \leq 1$



Si può dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ mediante piano classico con la monotonia

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Determinare il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{na_n 2^n}_{cw} x^n$

Devo fare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na_n 2^n}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice e calcolo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) a_{n+1} 2^{n+1}}{n a_n 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \right] \cdot 2 \cdot \left[\frac{F(a_n)}{a_n} \right]$$

Resta da calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(an)}{an} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1$$

$\uparrow$
 $x=an$

$\uparrow$
 $[\frac{0}{0}: \text{H\^op}]$

Conclusione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{rapporto} = 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{|c_n|} = 2 \Rightarrow \text{raggio di conv.} = \frac{1}{2}.$$

— 0 — 0 —