

A.A. 2010/2011
Analisi Matematica I

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Insiemi - Notazioni, unione, intersezione, differenza, cardinalità, insieme delle parti	4
Lezione 002. Prodotto cartesiano di insiemi, funzioni tra insiemi, grafico di una funzione, iniettività e surgettività	7
Lezione 003. Interpretazione di iniettività e surgettività in termini di grafici ed equazioni, immagine e controimmagine	11
Lezione 004. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone. Monotonia e disequazioni. Legami tra monotonia ed iniettività	15
Lezione 005. Funzioni elementari: potenze ed esponenziali e relative inverse. Prime operazioni sui grafici	19
Lezione 006. Principio di induzione	23
Lezione 007. Esempi di dimostrazioni per induzione, definizione di fattoriale, disuguaglianza di Bernoulli	27
Lezione 008. Definizione assiomatica dei numeri reali, assioma di continuità. Maggioranti, minoranti, massimo, minimo di sottoinsiemi	31
Lezione 009. Estremo superiore ed inferiore: definizione, caratterizzazione, esempi . .	35
Lezione 010. Funzioni trigonometriche e relative funzioni inverse	39
Lezione 011. Successioni e relativi limiti: definizioni	43
Lezione 012. Primi teoremi sulle successioni (unicità del limite e permanenza del segno). Limiti di potenze di n . Teoremi di confronto ed algebrici	47
Lezione 013. Esempi di limiti di successioni calcolati usando i primi strumenti	51
Lezione 014. Coefficienti binomiali e loro significato combinatorio. Binomio di Newton e triangolo di Tartaglia	55
Lezione 015. Esercizi vari su funzioni, loro grafico e proprietà di simmetria	59
Lezione 016. Criteri del rapporto, della radice, del rapporto-radice. Esempi di limiti di radici n -esime	63

Lezione 017. Esempi di applicazione dei criteri del rapporto, della radice, del rapporto-radice. Confronti tra ordini di infinito	67
Lezione 018. Limiti di funzioni: definizioni	71
Lezione 019. Cambio di variabili nei limiti. Criterio funzioni successioni. Limiti notevoli.	75
Lezione 020. Esempi di calcolo di limiti di funzioni e successioni usando i limiti notevoli	79
Lezione 021. Dimostrazione dei principali limiti notevoli, uso di cambi di variabile per spostare limiti a 0 o a $+\infty$	82
Lezione 022. Sottosuccessioni. Non esistenza di limiti usando opportune successioni e sottosuccessioni	86
Lezione 023. Esempi di limiti calcolati utilizzando le tecniche viste finora	90
Lezione 024. Teorema delle successioni monotone. Il numero e (monotonia e limitatezza della successione che lo definisce)	94
Lezione 025. Esercizi vari sui limiti di funzioni e successioni (metodi ante o piccolo) .	98
Lezione 026. Definizione di o piccolo e sue proprietà algebriche. Sviluppi	102
Lezione 027. Esempi di utilizzo di sviluppi e o piccolo per il calcolo di limiti	106
Lezione 028. Definizione di derivata (come limite del rapporto incrementale ed in termini di o piccolo). Derivata di alcune funzioni elementari	110
Lezione 029. Derivata di somme, prodotti, quozienti, composizioni. Derivate delle restanti funzioni elementari	114
Lezione 030. Derivata della funzione inversa. Esempi di calcolo di derivate.	118
Lezione 031. Enunciato del teorema di De L'Hopital. Esempi di come applicarlo e come non applicarlo	122
Lezione 032. Formula di Taylor (con resto di Peano) con centro nell'origine. Dimostrazione degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari.	126
Lezione 033. Sviluppi della somma, del prodotto, della composizione. Primi esempi di limiti calcolati con la formula di Taylor	130
Lezione 034. Funzioni iperboliche	134
Lezione 035. Sviluppi di Taylor di composizioni. Esempi di utilizzo degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti.	138
Lezione 036. Formula di Taylor con centro in un punto diverso dall'origine. Idea della dimostrazione della formula di Taylor	142

Lezione 037. Esempi di utilizzo dei polinomi di Taylor per il calcolo di limiti e di valori di derivate	146
Lezione 038. Serie: definizione mediante somme parziali. Proprietà algebriche. Condizione necessaria. Serie telescopiche	150
Lezione 039. Serie geometriche. Serie a termini di segno costante. Criteri della radice, del rapporto e del confronto. Dimostrazione del criterio del confronto	154
Lezione 040. Serie: criterio del confronto asintotico (caso standard). Serie armoniche generalizzate. Esempi di applicazione dei criteri.	158
Lezione 041. Serie: dimostrazione del criterio della radice e del confronto asintotico. Casi limite nel confronto asintotico. Esempi	162
Lezione 042. Criterio di Leibnitz (serie a segno alternato). Criterio dell'assoluta convergenza (serie a termini di segno qualunque). Esempi di studio della convergenza di serie a segno variabile	166
Lezione 043. Esercizi di ricapitolazione sulle serie (anche parametriche)	170
Lezione 044. Esercizi di ricapitolazione sulle serie (anche parametriche)	174
Lezione 045. Teorema di esistenza degli zeri e sue applicazioni (esistenza dei valori intermedi, esistenza di soluzioni di equazioni, surgettività di funzioni)	178
Lezione 046. Teorema di Weierstrass. Ricerca dei punti di massimo/minimo: punti stazionari interni, singolari interni, bordo	182
Lezione 047. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange	186
Lezione 048. Dimostrazione del caso $0/0$ del teorema di De L'Hopital. Legami tra segno della derivata in un intervallo e monotonia nell'intervallo stesso	190
Lezione 049. Studio locale di funzioni. Criterio delle derivate successive	194
Lezione 050. Studio globale di funzioni: primi esempi. Asintoti orizzontali e verticali	197
Lezione 051. Esempi di utilizzo dello studio globale di funzioni per la risoluzione di (dis)equazioni	201
Lezione 052. Disuguaglianze classiche. Concavità, convessità e segno della derivata seconda	205

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 001

Titolo nota

26/10/2010

Insiemi Come si presenta un insieme?

① Per elenco $A = \{1, 7, 10, a, \frac{1}{2}\}$
 ↑
 nome dell'insieme

② Per proprietà $B = \{\text{studenti Biomedica I anno Pisa}\}$

Nota bene: $A = \{1, 7, 8, z, k, 8\}$ è lo stesso che dire
 $A = \{1, 7, z, 8, k\}$

Nelle presentazioni per elenco

- non conta l'ordine di presentazione
- eventuali elementi ripetuti contano una volta sola.

Notazioni $a \in A$ "a è un elemento di A" (anche $A \ni a$)
 ↑ ↑
 elemento insieme
 $a \notin A$ (anche $A \not\ni a$)
 ↑
 non appartiene

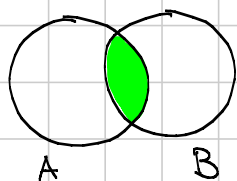
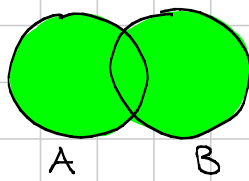
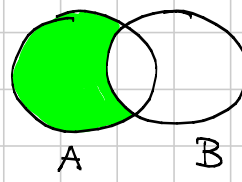
Sottoinsiemi $A \subseteq B$ "l'insieme A è contenuto nell'insieme B"
 ↑ ↑
 insieme insieme (A e B possono anche essere uguali)
 $B \supseteq A$

$A \subset B$: simbolo pericoloso perché usato con significati diversi, quindi meglio non usarlo mai

$A \subsetneq B$ "l'insieme A è contenuto (ma diverso) in B"

Insieme vuoto $\emptyset$ insieme che non ha nessun elemento

Esempio $A = \{k, 7, 9\}$ $7 \in A$ $8 \notin A$ $9 \subseteq A$ NO!
 $\emptyset \subseteq A$ OK $9 \in A$ elemento $\{9\} \subseteq A$ insieme $\emptyset \in A$ NO!

Operazioni tra insiemi $A \cap B$  $A \cup B$  $A \setminus B$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

↑ devono essere vere tutte e 2

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

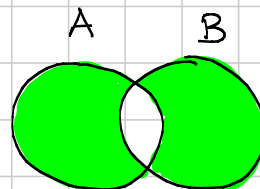
↑ deve essere vera ALMENO una delle due

VEL: "oppure" inteso come uno, l'altro, o tutti e 2

AUT: "oppure" inteso come uno, l'altro, ma non tutti e due.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Esempio $\{x : x \in A \text{ AUT } x \in B\}$



= differenza simmetrica

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$= \underbrace{(A \setminus B)}_{\text{petto sinistro}} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\text{petto destro}}$$

petto sinistro petto destro

Insieme delle parti Dato un insieme A , si dice insieme delle parti di A l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} = \text{"insieme dei sottoinsiemi"}$$

Esempio $A = \{2, 6\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\{2\}, \{6\}, \{2, 6\}, \emptyset\}$$

$\emptyset \in A$ NO!

$\emptyset \notin A$ OK

$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ OK

$\{6\} \in \mathcal{P}(A)$ OK

$6 \in \mathcal{P}(A)$ NO!

Quanti elementi ha l'insieme delle parti?

Se $|A| = a$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^a$

$x \quad x \quad x \quad x \quad \dots \quad x \quad \leftarrow a \text{ elementi di } A$
 $S_1 \quad S_1 \quad S_1 \quad S_1$
 $N_0 \quad N_0 \quad N_0 \quad N_0$

Esempio $C = \{3, 19, p\}$ $|P(C)| = 2^3 = 8$

$p \in C$ $p \subseteq C$ $\{p\} \subseteq C$ $\{p\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ $\{p\} \in \mathcal{P}(C)$
 No! No!!!

$$\{\{p\}\} \subseteq \mathcal{P}(C)$$

Cercare esercizio Hand in Lesione 1 del passato.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 002

Titolo nota

26/10/2010

Funzioni tra insiemi

$$f: A \rightarrow B$$

insieme di partenza

insieme di arrivo

Una funzione sono 3 cose

- ① Un insieme di partenza
- ② Un insieme di arrivo
- ③ Una legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa un unico elemento dell'insieme di arrivo

Se $a \in A$ si indica con $f(a)$ l'unico elemento di B che la legge associa ad A .

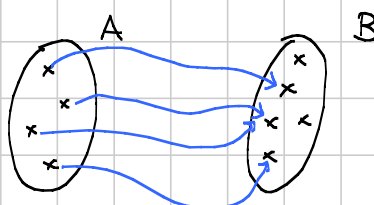
Composizione di due funzioni

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

La funzione composta $g(f(x))$ è la funzione ottenuta facendo prima f e poi g . È una funzione da A a C .

Per fare la composizione serve che l'insieme di arrivo della prima (cioè quella più interna) coincida con l'insieme di partenza della seconda (quella più esterna).
basta in realtà che sia contenuto...

Rappresentazione con "disegni"Grafico di una funzione Per questo serve il

Prodotto cartesiano di 2 insiemi Siano A e B due insiemi.

Si definisce

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

prod. cart.

gli elementi sono coppie ORDINATE

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ se } a \neq b.$$

Esempio $A = \{7, z\}$ $B = \{3, 7, 2\}$

$$A \times B = \{(7, 3), (7, 7), (7, 2), (z, 3), (z, 7), (z, 2)\}$$

$$A \times A = \{(7, 7), \underbrace{(7, z), (z, 7)}_{\text{DIVERSI}}, (z, z)\} = \text{tutte le possibili coppie in cui i 2 elementi stanno in } A$$

In generale, se $|A| = m$ e $|B| = n$, allora
 $|A \times B| = m \times n$

Infatti ciascuno degli m elementi di A si può accoppiare con ciascuno degli n elementi di B .

Grafici Data una funzione $f: A \rightarrow B$, si dice grafico di f il sottoinsieme del prodotto $A \times B$ così definito

$$\{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

↑
 presentazione per proprietà: 2^a coordinata = f (1^a coordinata)
 — o — o —

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, BIGETTIVITÀ, INVERTIBILITÀ

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione

Def. La funzione f si dice

- iniettiva se (brutalmente: manda elementi distinti in elementi distinti)

$$\underbrace{a_1 \neq a_2}_{\substack{a_1 \text{ e } a_2 \text{ sono elementi} \\ \text{distinti di } A}} \Rightarrow \underbrace{f(a_1) \neq f(a_2)}_{\substack{f(a_1) \text{ e } f(a_2) \text{ sono elementi} \\ \text{distinti di } B}}$$

In maniera equivalente, si può scrivere

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

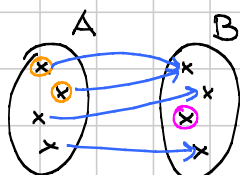
- surgettiva se (brutalmente: ogni elemento di B è f di qualcosa)

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b$$

$\uparrow$ per ogni $\uparrow$ esiste almeno un

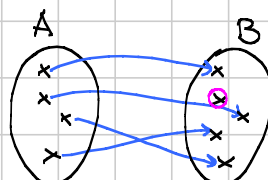
- bigettiva se è iniettiva e surgettiva.

Esempio



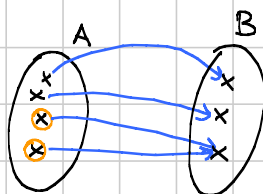
Iniettiva NO

Surgettiva NO



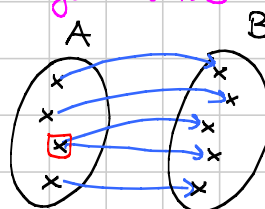
Iniettiva SI

Surgettiva NO

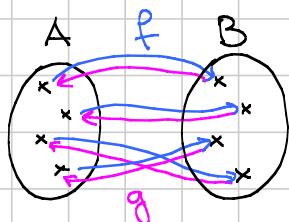


Surgettiva SI

Iniettiva NO



Non è una funzione !!!
Non possiamo partire 2 frecce
da uno stesso elemento di A .



Bigettiva.

Quando $f: A \rightarrow B$ è bigettiva, allora "posso tornare indietro", cioè esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

La funzione g è l'inversa della funzione f . Esiste se e solo se f è bigettiva.

Esempio $f(x) = x^2$ Iniettiva? Surgettiva?

Dipende dagli insiemi di partenza e arrivo!!!!

Partenza	Arrivo	Iniettiva	Surgettiva
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	NO $f(2) = f(-2)$	NO (i negativi non sono il quadrato di nulla)
$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	NO	SI
$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	SI	SI
$(-\infty, 0]$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$	SCHIFEZZA !!! Non è una funzione perché agli elementi dell'insieme di partenza non corrispondono el. insieme d'arrivo,	

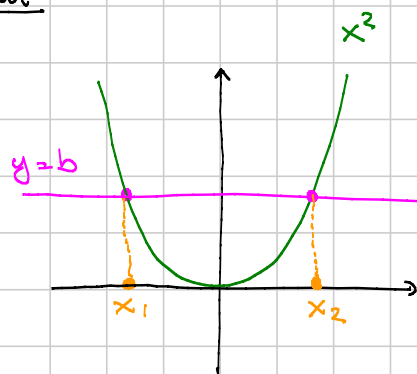
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 003

Titolo nota

26/10/2010

Iniettività, surgettività, grafici, equazioni

Esempio 1 $f(x) = x^2$ che pensiamo come
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Cosa vuol dire risolvere l'equazione

$$f(x) = b$$

vuol dire cercare tutti gli elementi
 $x \in$ insieme di partenza che vanno a finire
 in certo $b \in$ insieme di arrivo.

Graficamente: traccio retta $y=b$, interseco con il grafico, ed i
 valori di x corrispondenti alle intersezioni sono le soluzioni.

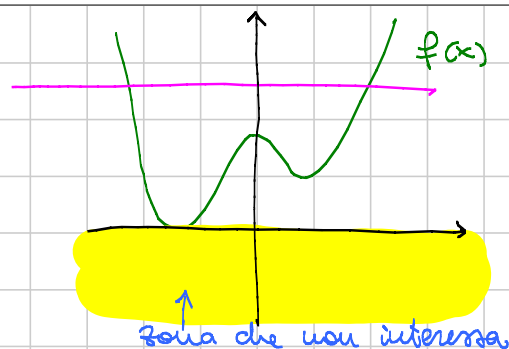
Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se ogni retta
 del tipo $y=b$ (parallela all'asse x) interseca il grafico
 AL MASSIMO una volta (quando ci sono 2 o più intersezioni vuol
 dire che ci sono 2 o più elementi in partenza che vanno a finire
 nello stesso)

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se ogni retta
 del tipo $y=b$ interseca il grafico ALMENO una volta.

È bigettiva se e solo se ogni retta $y=b$ interseca una ed una
 sola volta il grafico

Esempio 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

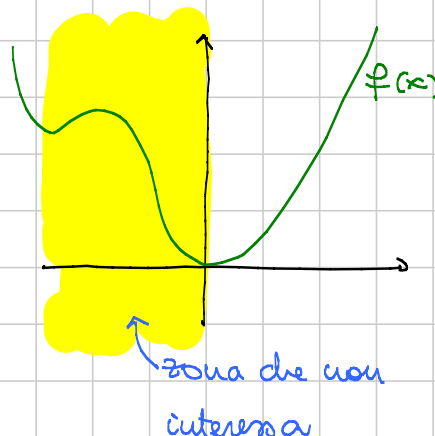
Esistono rette $y = b \geq 0$
che intersecano più di una volta.
Quindi f non è iniettiva



È surgettiva perché tutte le rette $y = b$
con $(b \geq 0 : \text{restrizione imposta dall'insieme di arrivo})$ intersecano
almeno una volta,

Esempio 3 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

È iniettiva perché ogni retta $y = b$
interseca al massimo una volta
nella zona non vietata



Non è surgettiva perché esistono rette $y = b$
che non hanno intersezioni con il grafico
— o — o —

Iniettività, surgettività ed equazioni

$$\cancel{f}(3x+2) = \cancel{f}(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \Rightarrow x=1$$

↑
grande tentazione

$$\cancel{f}^{3x+2} = \cancel{f}^{2x+3} \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{SI}}$$

$$\log_{\cancel{f}}(3x+2) = \log_{\cancel{f}}(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{NI}}$$

$$\cos(3x+2) = \cos(2x+3) \rightsquigarrow 3x+2 = 2x+3 \quad \textcircled{\text{NO}}$$

Morale: se f è iniettiva posso "semplificarla". Se f non è
iniettiva non posso

Negli esempi $f(x) = 7^x$ è iniettiva
 $\cos x$ non è iniettiva

Nel caso centrale $f(x) = \log_7 x$
 è iniettiva come

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Quindi in un'equazione posso semplificarla
 ma devo imporre che gli argomenti stiano
 nell'insieme di partenza

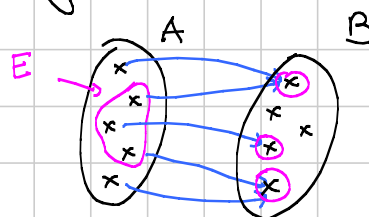
$$\log_7(3x+2) = \log_7(2x+3) \leadsto \begin{cases} 3x+2 = 2x+3 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}$$

$2x+3 > 0$ Automatica dalle
 prime due

Immagine e controimmagine. Sia $f: A \rightarrow B$. Sia $E \subseteq A$.

Cosa vuol dire fare $f(E)$, cioè l'immagine di E

Brutalmente: l'immagine di E è
 il sottoinsieme di B costituito dagli
 arrivi di tutte le frecce che partono da E



$$f(E) = \{ f(a) : a \in E \} \subseteq B$$

elenco

$$= \{ b \in B : \exists a \in E \text{ tale che } f(a) = b \}$$

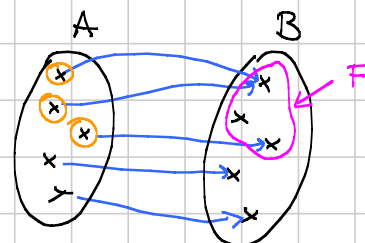
proprietà

La controimmagine è "l'operazione inversa". Dato un sottoinsieme
 $F \subseteq B$

La controimmagine di F è l'insieme
 $f^{-1}(F) \subseteq A$ costituito da tutti gli
 elementi di A che vanno a finire in F

proprietà

$$f^{-1}(F) = \{ a \in A : f(a) \in F \}$$



Esempio 1 $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{x^2 : x \in [-2, 1]\}$$

$$\{f(x) : x \in [-2, 1]\}$$

Fai variare x in $[-2, 1]$ e vedi quali valori assume x^2

$$= [0, 4]$$

Per fare l'immagine

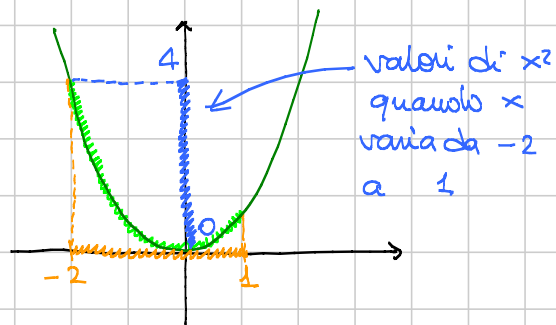
Parto dall'asse x

↓

vado al grafico

↓

vado all'asse y .



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 004

Titolo nota

27/10/2010

Funzioni reali $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Proprietà di simmetria. La funzione f si dice

- **PARI** se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **DISPARI** se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **PERIODICA** se esiste $T > 0$ tale che

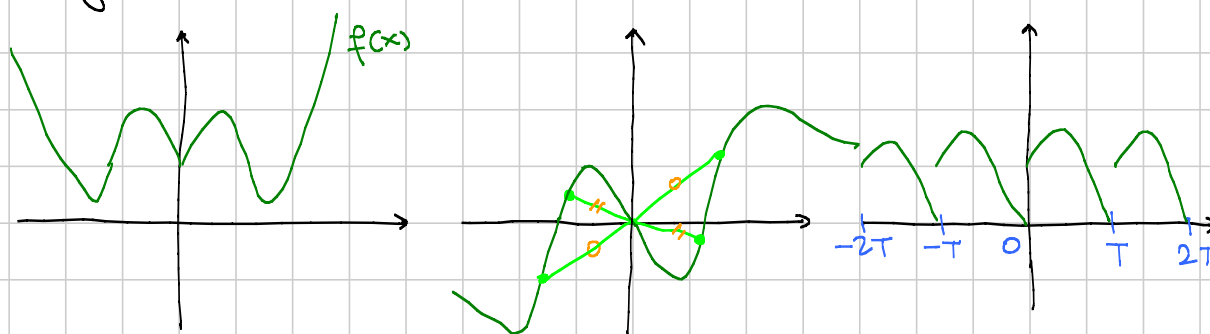
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se esiste un minimo $T > 0$ per cui la proprietà di sopra è vera, allora quel T si dice periodo minimo della funzione.

In termini di grafico:

- **PARI** se e solo se grafico simmetrico rispetto asse y
 - **DISPARI** " " " " origine
- (Nota bene: un grafico non può essere simmetrico risp. asse x)
- **PERIODICA** se il pezzo di grafico corrispondente agli $x \in [0, T]$ si ripete poi sempre uguale.

Disegna!



Esercizio Può una funzione essere contemporaneamente pari e dispari? Dovebbe essere

$$-f(x) = f(-x) = f(x)$$

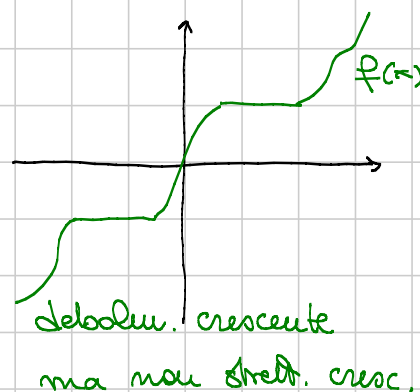
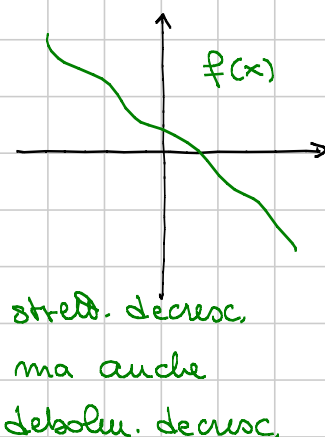
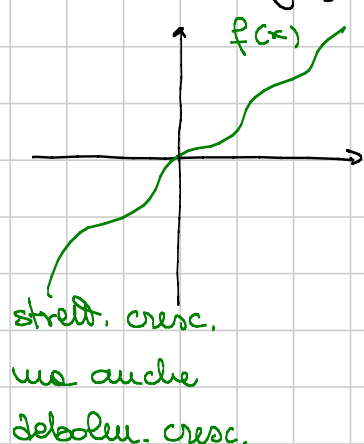
$\uparrow$ $\uparrow$
 f è dispari f è pari

Ma allora dovrebbe essere $-f(x) = f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, cioè $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà di MONOTONIA Una funzione $f(x)$ si dice ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

- debolmente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
- strettamente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$
- debolmente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$
- strettamente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

In termini di grafico



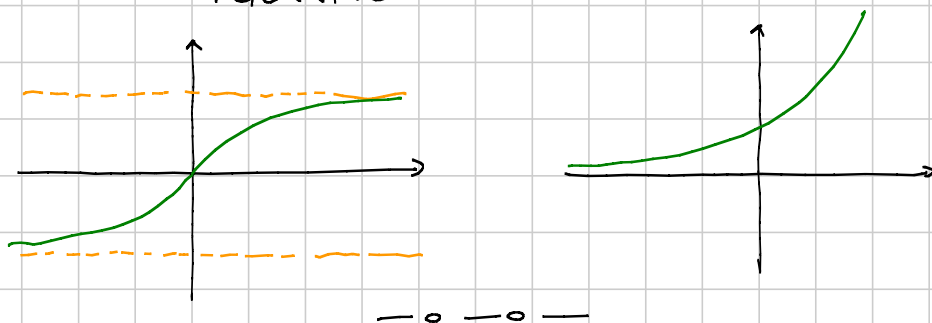
Achtung! Se f è strett. cresc., allora è anche debolm. cresc.
 " " decresc., " " " decresc.

Def. Una funzione si dice MONOTONA se ricade in una delle 4 categorie citate sopra.

Fatto importante le funzioni strettamente monotone (cioè strett. cresc. oppure strett. decrescenti) sono sicuramente INIETTIVE (viste come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

[Dim. Prendo due valori $a_1 \neq a_2$ in partenza. Metto i numeri in modo che $a_1 < a_2$. Allora $f(a_1) < f(a_2)$ se f è strett. cresc.
 $f(a_1) > f(a_2)$ se f è " decresc.

Achtung! le funzioni strett. monotone possono NON essere SURGETTIVE



Monotonia e disequazioni Prendiamo una disequazione del tipo

$$\cancel{f}(\text{Mostro 1}) > \cancel{f}(\text{Mostro 2}) \rightsquigarrow \text{Mostro 1} > \text{Mostro 2}$$

↑
grande
distorsione

Dipende dalla monotonia:

① Se f è strett. crescente allora il passaggio si può fare.

Dim. Sappiamo per ipotesi che $f(M_1) > f(M_2)$. Come possono essere messi M_1 ed M_2 ?

- $M_1 < M_2 \rightsquigarrow$ sarebbe $f(M_1) < f(M_2)$ e non va bene
- $M_1 = M_2 \rightsquigarrow$ sarebbe $f(M_1) = f(M_2)$ NO BUONO
- $M_1 > M_2 \rightsquigarrow$ unico caso possibile

(qui ho usato
strett. cresc.)

② Se f è strett. decrescente, allora posso "semplificare la f ", ma devo INVERTIRE IL VERSO della disuguaglianza

$$\cancel{f}(M_1) > \cancel{f}(M_2) \rightsquigarrow M_1 < M_2$$

Dim. Come sopra ho 3 casi

- $M_1 < M_2 \rightsquigarrow$ unico caso possibile
- $M_1 = M_2 \rightsquigarrow$ come sopra $f(M_1) = f(M_2)$ NO
- $M_1 > M_2 \rightsquigarrow f(M_1) < f(M_2)$ perché le strett. decresc. invertono

Achtung! In tutti gli altri casi non è possibile semplificare la f impunemente.

Esempi Se $g(x)$ è strett. crescente ed $f(x)$ è strett. crescente, allora $g(f(x))$ è strett. cresc.

Dim. Prendo $y > x$. Applico f :
 $f(y) > f(x)$ Applico g :
 $g(f(y)) > g(f(x))$

E se fossero entrambe decrescenti?

Prendo $y > x$. Applico f : (invertito perché f è decresc.)
 $f(y) < f(x)$ Applico g : (invertito perché g è decresc.)
 $g(f(y)) > g(f(x))$

La composizione di 2 decrescenti è crescente.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono iniettive, è vero che $g(f(x))$ è iniettiva?

Sì! Prendo $a_1 \neq a_2$ Applico f
 $f(a_1) \neq f(a_2)$ (diversi perché f iniettiva)
 Applico g
 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ (diversi perché g iniettiva)

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 005

Titolo nota

27/10/2010

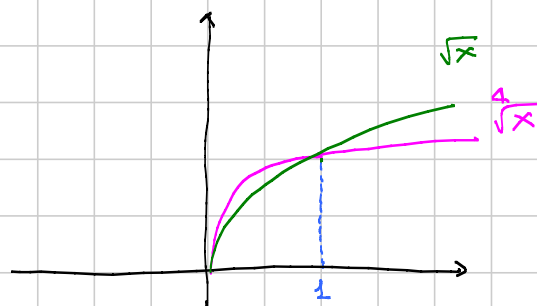
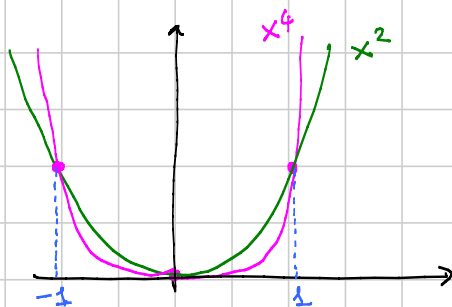
Presentazione funzioni e funzioni inverse elementari**Potenze** $f(x) = x^2$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

non monotona, non iniettiva e non surgettiva

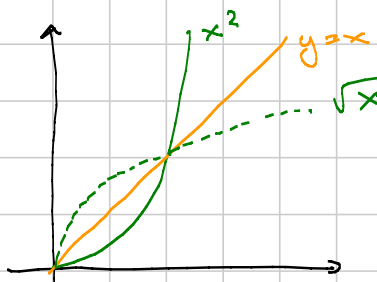
Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva. Quindi è invertibile. La sua inversa è una funzione

$$g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

ed è $g(x) = \sqrt{x}$ Achtung! $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{x}$ prende in input valori ≥ 0 e restituisce in output valori ≥ 0 Discorsi analoghi valgono per tutte le potenze con esponente
INTERO POSITIVO PARI

Come è fatto il grafico di una funzione rispetto alla sua inversa?

Sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

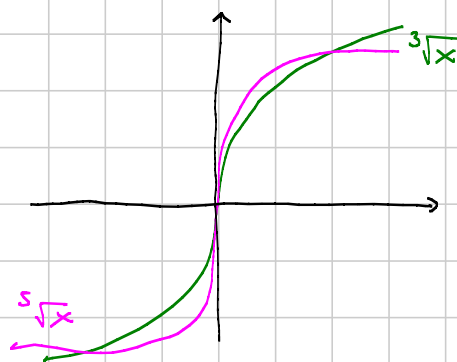
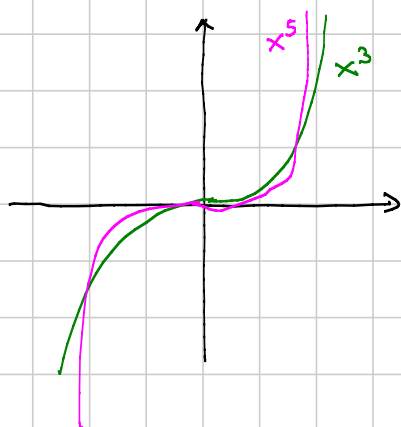
Idea del perché: se (x, y) sta sul grafico di f , allora (y, x) sta sul grafico dell'inv.

Esponente dispari $f(x) = x^3$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- DISPARI [$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$]
- STRETT. CRESCENTE
- INIETTIVA
- SURGETTIVA

Quindi è invertibile. L'inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è
 $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Achtung! Le radici di indice dispari prendono in input valori reali qualunque e restituiscono reali qualunque



Le radici di indice dispari sono funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 dispari, strett. cresc., iniettive e surgettive.
 — o — o —

Esponenziali $f(x) = 3^x$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- nessuna simmetria
- strett. crescente
- iniettiva, ma non surgettiva

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

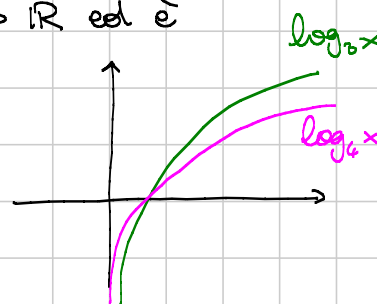
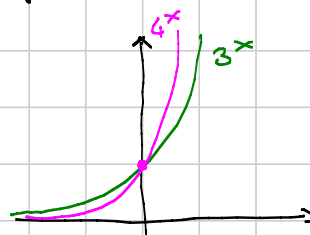
diventa pure surgettiva, dunque invertibile.

L'inversa è una funzione $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ed è

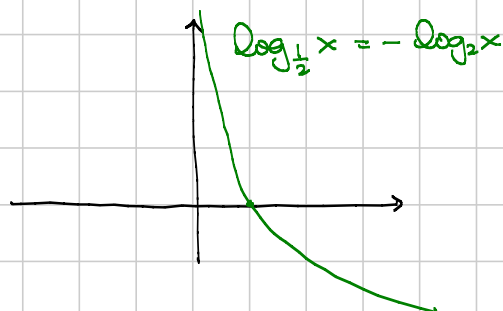
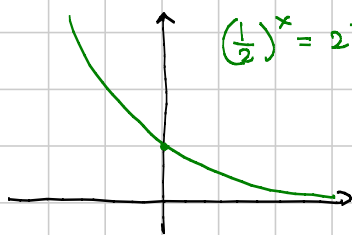
$$g(x) = \log_3 x$$

In input valori > 0

Lo stesso discorso vale per tutte le
 basi > 1 (a^x con $a > 1$)



Se ho a^x con base $a \in (0,1)$, la monotonia si inverte



Precorso: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, quindi

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$$

$\uparrow$
 valore
 in base 2 $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

VALORE ASSOLUTO $f(x) = |x|$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- PARI $[f(-x) = |-x| = |x| = f(x)]$
- non monotona, né iniettiva, né surgettiva

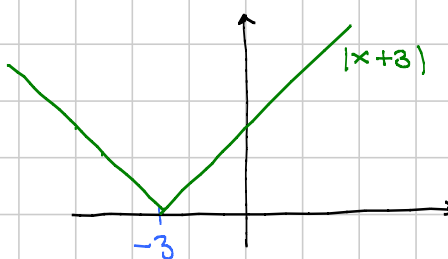
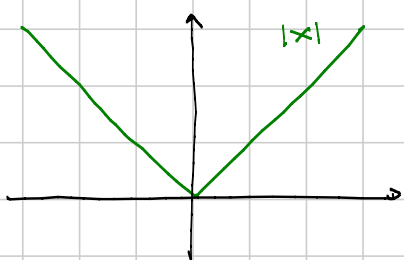


Operazioni sui grafici

$f(x) \rightsquigarrow f(x) + a$ Traslate verticalmente il grafico di f
(verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$)

$f(x) \rightsquigarrow f(x+a)$ Traslate orizzontalmente il grafico di f
(verso sinistra se $a > 0$, verso destra se $a < 0$)

Esempio Grafico di $|x+3|$

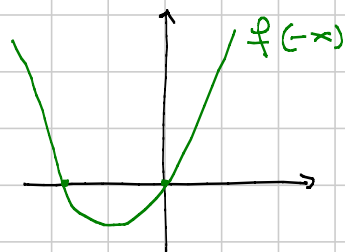
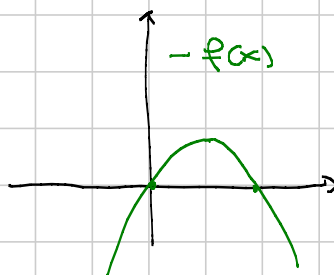
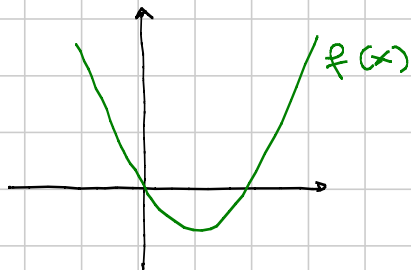


$$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$$

(Ribaltoamento rispetto asse x : sotto-sopra)

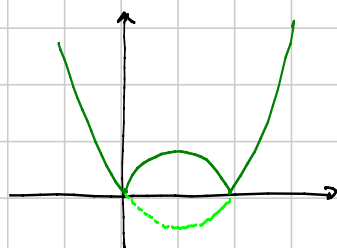
$$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$$

(Ribaltoamento rispetto asse y : destra-sin.)

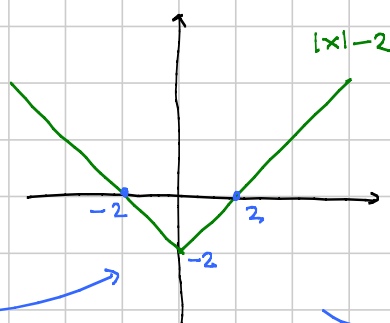
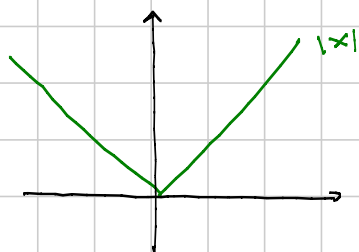


$$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$$

(Piazzare uno specchio sull'asse x , cioè ribaltare le parti negative)



Esempio $f(x) = |x| - 2$



giù di 2

ribalto parti negative

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 006

Titolo nota

28/10/2010

PRINCIPIO DI INDUZIONEInsiemi numerici: $\mathbb{N}$ = numeri naturali = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N} \rightarrow$ naturali $\mathbb{Z}$ = interi relativi = $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ $\mathbb{Z} \rightarrow$ Zahlen = numeri $\mathbb{Q}$ = numeri razionali = $\{\text{frizioni } \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ $\mathbb{Q} \rightarrow$ quozienti $\mathbb{R}$ = numeri reali $\mathbb{R} \rightarrow$ reali $\mathbb{C}$ = numeri complessi $\mathbb{C} \rightarrow$ complessiOvviamente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $2 \in \mathbb{R}$ VERA $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ $-2 \in \mathbb{C}$ VERA

— o — o —

Il principio di induzione riguarda proprietà dei numeri naturali.

Sia P_n una proprietà che riguarda $\mathbb{N}$, cioè un'affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$, e che a seconda del valore di n può essere VERA o falsa.Esempi: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
 $n^2 > 7n + 2$ **Principio di induzione** Supponiamo che(i) P_0 è vera (se sostituisco $n=0$, funziona) **PASSO BASE**(ii) P_n VERA $\Rightarrow P_{n+1}$ VERA (se è vera per un certo intero, allora è vera per il successivo) **PASSO INDUTTIVO**Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

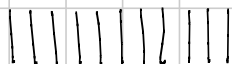
Brutalmente, perché funziona? P_0 è vera per la (i)

Se P_0 è vera, allora è vera P_1 (grazie alla (ii) con $n=0$)

" P_1 " " " " P_2 " " " $n=1$

" P_2 " " P_3 ...

Descrizione alternativa: tessere del domino che cascano in sequenza



(i) La 0-esima tessera (la 1^a) cade

(ii) Le tessere sono disposte in maniera ravvicinata: se cade una, allora cade anche la successiva.

Allora cascano tutte.

Variante Supponiamo che (i) P_{77} è VERA

(ii) $P_n \text{ VERA} \Rightarrow P_{n+1} \text{ VERA}$ (sott: $\forall n \in \mathbb{N}$)

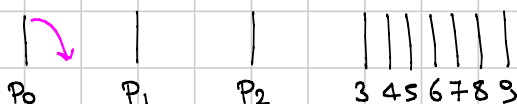
Allora P_n è vera $\forall n \geq 77$.

Variante più pericolosa Supponiamo che

(i) P_0 è vera

(ii) $\forall n \geq 3$ si ha $P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ VERA}$

Allora P_0 è VERA, ma delle altre non posso dire nulla



Se voglio ottenere qualcosa, devo dimostrare che P_3 è VERA: così innesco il meccanismo di caduta.

Esempio 1 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Passo base $n=1 \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \text{Ok}$

Passo induttivo Ipotesi: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
 Tesi: $1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

stessa formula
con $(n+1)$ al
posto di n

Dim. $1 + 2 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + \dots + n] + (n+1)$

uso Ipotesi $\rightarrow = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

Recorso $\rightarrow = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

In particolare ho costruito una "catena di uguaglianze" in cui il 1° è uguale all'ultimo, il che è proprio la tesi.

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(si intende che a è un parametro $a \neq 1$)

PASSO BASE $n=0 \quad 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \quad \text{OK.}$

Verifica non richiesta per $n=1$: $1 + a = \frac{a^2 - 1}{a - 1} \quad (= \frac{(a+1)(a-1)}{a-1})$

PASSO INDOLETTIVO Ipotesi: $1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

Tesi: $1 + a + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \rightarrow$ stessa, con $(n+1)$ al posto di n

Dim. $1 + a + \dots + a^{n+1} = \underbrace{1 + a + \dots + a^n}_{\text{uso ipotesi}} + a^{n+1}$
 $= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = (\text{Recorso})$
 $= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$

Confrontando il 1° e l'ultimo, abbiamo dim. la tesi.

— o — o —

Esempio 3 Dimostrare che $n+7 < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mi dimentico del passo base...

PASSO INDOLETTIVO Ipotesi: $n+7 < n$

Tesi: $n+8 < n+1$

Dim. $n+8 = \underbrace{(n+7)}_{\text{uso ipotesi}} + 1 < n+1$

Confrontando il 1° e l'ultimo ho la tesi

In termini di tessere del domino, questo dice che le tessere sono vicine tra di loro, cioè c'è il meccanismo di caduta



Il problema è che nessuna cade (non trovo valori di n da cui far partire la caduta collettiva).



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 007

Titolo nota

28/10/2010

Esempio 1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

Passo base $n=1 \quad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \text{ok}$

Passo induttivo Ipotesi: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $2(n+1)+1$

Tesi: $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ $\downarrow$

Dim. $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{\text{uso ipotesi}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] = (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo ho la tesi.

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Passo base $n=0 \quad 2^0 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad 1 \geq 0 \quad \text{ok}$

Passo induttivo Ipotesi: $2^n \geq n$ Tesi: $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n+1$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 percorso uso spero che sia
 ipotesi vera

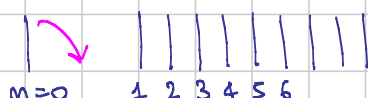
Se la speranza è vera, ho realizzato una "catena di disuguaglianze", in cui il 1° è $\geq$ dell'ultimo, il che sarebbe la tesi.

Resta da esaminare la speranza, cioè il fatto che $2n \geq n+1$.

Questa è vera se e solo se $n \geq 1$.

Questo ci dice che il passo induttivo, cioè il meccanismo di caduta, funziona solo da $n=1$ in poi.

Quindi siamo in questa situazione:



Per concludere devo dimostrare separatamente il caso $n=1$

Secondo passo base $n=1$ $2^1 \geq 1$ Ok.
— o — o —

Esempio 3 Determinare per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che
 $4^n \geq 2^n + 3^n$

Proviamo un po' di valori:

$$n=0 \quad 4^0 \geq 2^0 + 3^0 \quad \text{FALSA!}$$

$$n=1 \quad 4^1 \geq 2^1 + 3^1 \quad \text{FALSA!}$$

$$n=2 \quad 4^2 \geq 2^2 + 3^2 \quad 16 \geq 13 \quad \text{Ok}$$

$$n=3 \quad 4^3 \geq 2^3 + 3^3 \quad 64 \geq 8 + 27 \quad \text{Ok e abbondante}$$

Congettura: la disuguaglianza vale $\forall n \geq 2$.

Provo a dim. per induzione.

Passo base $n=2$ $4^2 \geq 2^2 + 3^2$ Ok, già fatto

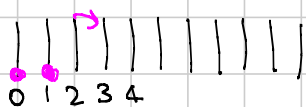
Passo induttivo Ipotesi: $4^n \geq 2^n + 3^n$ Tesi: $4^{n+1} \geq 2^{n+1} + 3^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Dim: } 4^{n+1} &= 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot (2^n + 3^n) = 4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \\ &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{precorso} \quad \text{uso ipotesi} \quad \text{precorso} \\ &\quad \text{al posto di 4 metto } \rightarrow \geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\ &\quad \text{2 e 3 a seconda} \\ &\quad \text{dei casi} \quad \quad \quad = 2^{n+1} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo abbiamo la tesi.

— o — o —

Nota all'esempio precedente: nel passo induttivo non sono venute
già condizioni su n . Quindi le terzine sono tutte vicine



Compresa la P_0 e la P_1 . Il problema è che la P_0 e la P_1 sono
bloccate, cioè non cascano

— o — o —

FATTORIALE

$$n! = \text{fattoriale di } n \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Per definizione
 $0! = 1$

Tabellina: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040$$

Definizione ricorsiva

- $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$[(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}_{n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)]$$

— o — o —

Esempio 4 Determinare per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che
 $n! \geq 2^n$

Proviamo un po' di valori:

$n=0$	$0! \geq 2^0$	$1 \geq 1$	VERA
$n=1$	$1! \geq 2^1$	$1 \geq 2$	FALSA
$n=2$	$2! \geq 2^2$	$2 \geq 4$	FALSA
$n=3$	$3! \geq 2^3$	$6 \geq 8$	FALSA
$n=4$	$4! \geq 2^4$	$24 \geq 16$	VERA
$n=5$	$5! \geq 2^5$	$120 \geq 32$	VERA e abbondante

Congettura: $n! \geq 2^n$ è vera per $n=0$ e poi $\forall n \geq 4$

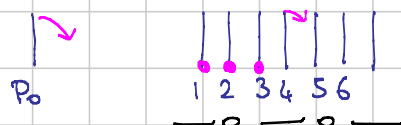
Passo base $n=4$ --- ok

Passo induttivo Ipotesi: $n! \geq 2^n$ Tesi: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

$$\text{Dim.: } (n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\uparrow$ def. ric. di fattoriale $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ speranza $\uparrow$ percorso

Quando è vera la speranza? $n+1 \geq 2$ vera per $n \geq 1$



Esempio 5 Disuguaglianza di BERNOULLI
 $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1.$

Passo base $n=0 \quad (1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x \quad 1 \geq 1 \quad \text{ok.}$

Passo induttivo Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } (1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = \\ &\quad \uparrow \text{ percorso} \quad \uparrow \text{ uso ipotesi} \\ &= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x \\ &\quad \uparrow \text{ Ho tolto } nx^2: \text{ se in una somma tolgo un addendo} \\ &\quad \quad \quad \geq 0 \text{ ottengo una somma pi\u00f9 piccola} \end{aligned}$$

Concludendo 1^o e ultimo ho la tesi.

Passaggio cruciale. Sapendo che $(1+x)^n \geq 1+nx$, ho dedotto che

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$$

Questo vale solo se ho moltiplicato per roba ≥ 0 , cio\u00e8 se e solo se $1+x \geq 0$, cio\u00e8 $x \geq -1$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 008

Titolo nota

30/10/2010

NUMERI REALI $\mathbb{R}$ Proprietà: $\rightarrow$ algebriche
 $\rightarrow$ ordinamento
 $\rightarrow$ assioma di continuità

Proprietà algebriche. Su $\mathbb{R}$ sono definite 2 operazioni: somma e prodotto con queste proprietà:

(S1) $a + b = b + a$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$

(S2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(P2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(S3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ b.c. } a + 0 = a$

(P3) $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ b.c. } a \cdot 1 = a$

(S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ b.c. } a + b = 0$

(P4) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R} \text{ b.c. } a \cdot b = 1$

(si indica $b = -a$) $\uparrow$ *no in $\mathbb{N}$* (si indica $b = \frac{1}{a}$) $\leftarrow$ *no in $\mathbb{N}$*

Corretto dopo video: vale anche in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, $\uparrow$ of course

 $\leftarrow$ *no in $\mathbb{N}$*

(D) $a(b + c) = ab + ac$

Proprietà di ordinamento Dati $x \in \mathbb{R}$ ed $y \in \mathbb{R}$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. L'ordinamento ha 3 proprietà

(O1) $x \leq x$

(O2) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$

(O3) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$

L'ordinamento è legato alle operazioni algebriche da 2 proprietà

(OA1) Se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(OA2) Se $x \leq y$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$ per ogni $z \geq 0$

(OA2') Se $x \leq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z$ per ogni $z \leq 0$

Oss. Finora nulla distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$.

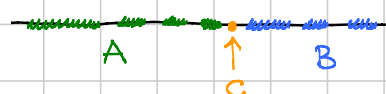
Assioma di continuità Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Supponiamo che A "sta a sinistra" di B , cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \quad \forall a \in A$$

$$c \leq b \quad \forall b \in B$$



Osservazioni ① c non è obbligato ad essere unico

② L'intersezione $A \cap B$ potrebbe non essere vuota. Se non è vuota, allora contiene un elemento, e questo elemento è proprio c .

Osservazione importante L'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non vale in $\mathbb{Q}$. Prendiamo per esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

Allora A sta a sinistra di B (precorso)

In $\mathbb{R}$ c'è un c che sta in mezzo. Questo "ovviamente" verifica $c^2 = 2$, quindi $c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$. Quindi in $\mathbb{Q}$ non c'è nessun elemento tra A e B , in $\mathbb{R}$ sì.



Le proprietà algebriche e di ordinamento si usano (senza accorgersene) risolvendo equazioni e disequazioni.

$$3x + 2 = 7 \quad \text{Aggiungo } -2 \text{ a d.x e s.x}$$

$$3x + 2 - 2 = 7 - 2$$

$$3x + (2 - 2) = 5$$

$$3x + 0 = 5$$

$$3x = 5$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Uso proprietà associativa

→ Definizione di -2

→ Proprietà dello 0

→ Moltiplico per l'inverso di 3

→ Lavoro ancora un po'

— 0 — 0 —

MASSIMO E MINIMO Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive

$$M = \max A$$

se

$$(i) a \leq M \quad \forall a \in A$$

$$(ii) M \in A.$$

Analogamente $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di A e si scrive $m = \min A$ se

$$(i) m \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(ii) m \in A.$$

Osservazioni ① M ed m non sono obbligati ad esistere

② Quando esistono, sono unici

Esempi $A = [0, 1)$

$\min A = 0$, $\max A$ non esiste

$$B = \mathbb{N}$$

$\min B = 0$, $\max B$ non esiste

$$C = \mathbb{Z}$$

$\min C$ non esiste, $\max C$ non esiste

— 0 — 0 —

MAGGIORANTI E MINORANTI Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Si dice che $b \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$b \geq a \quad \forall a \in A \quad (b \text{ è + grande di tutti gli elementi di } A)$$

Analogamente, $b \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$b \leq a \quad \forall a \in A \quad (b \text{ è + piccolo di tutti gli el. di } A)$$

Osservazioni ① Maggioranti e minoranti non sono obbligati ad esistere

② Quando esistono, non sono mai unici

Esempi $A = [0, 1)$

I minoranti sono tutti i numeri reali

I maggioranti " " " "

occhio all' =

$$b \leq 0$$

$$b \geq 1$$

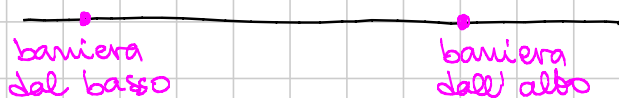
$B = \mathbb{N}$ Minoranti: tutti i $b \leq 0$
 Maggioranti non ne esistono
 $C = \mathbb{Z}$ Non esistono né maggioranti, né minoranti

Osservazione Quando $\max A$ esiste, questo a sua volta è un maggiorante (ed è il più piccolo).
 Analogo discorso per il minorante.
 — o — o —

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice

- limitato superiormente se ammette un maggiorante (quindi ne esistono infiniti),
- limitato inferiormente se ammette un minorante,
- limitato se è limitato sia super, sia infer.

Esempio $A = (2, 7)$ è limitato inferiormente e superiormente, ma non ammette né max, né min



Osservazione $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c.
 $|a| \leq b \quad \forall a \in A$

(Percorso: vuol dire che tutti gli $a \in A$ stanno tra $-b$ e b .)

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 009

Titolo nota

30/10/2010

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Definizione di estremo superiore

- Se A non è limitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$
- Se A è limitato superiormente, si pone $\sup A =$ minimo dei maggioranti

Definizione di estremo inferiore

- Se A non è limitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$
- Se A è limitato inferiormente, si pone $\inf A =$ massimo dei minoranti

Esempio 1 $A = [0, 1)$ I maggioranti sono tutti i $b \geq 1$.

Quindi $\sup A =$ minimo dei maggioranti $= 1$.

Tuttavia non è il massimo

I minoranti sono tutti i $b \leq 0$, quindi $\inf A = \max$ dei minor. $= 0$

Brutalmente: il $\sup$ è un surrogato del $\max$, quando il $\max$ non esiste

Esempio 2 $B = \mathbb{N}$ (visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$).

$\sup B = +\infty$ perché non esistono maggioranti

$\inf B = 0$ perché i minoranti sono tutti i $b \in \mathbb{R}$ con $b \leq 0$.

TEOREMA

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono sicuramente (finiti o infiniti)

Dim. Dimostriamo un solo caso, cioè che se A è limitato superiormente, allora esiste il minimo dei maggioranti.

Consideriamo l'insieme B costituito da tutti i maggioranti di A .

Per definizione di maggiorante, abbiamo che A sta tutto a sx di B .

Per l'assioma di continuità, esiste

$c \in \mathbb{R}$ tale che



(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante di A)

(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (cioè c è + piccolo di tutti i maggior.)

Quindi c è un maggiorante che è più piccolo di tutti gli altri maggioranti. Quindi c è il minimo dei maggioranti.

— o — o —

Quindi l'assioma di continuità implica che $\inf$ e $\sup$ esistono per forza.

Osservazioni ① $\sup$ e $\inf$ esistono sempre (finiti o infiniti)

② Sono sempre unici

③ Se esiste $M = \max A$, allora è anche $M = \sup A$

" " $m = \min A$, " " " $m = \inf A$

④ $\sup A$ non è obbligato a stare in A (anche quando $\sup A$ è finito). Se succede che $\sup A \in A$, allora il $\sup$ è anche $\max$.

Discorso analogo per il minimo.

Esempi

Insieme	$\inf$	$\sup$	$\min$	$\max$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.
$\mathbb{Q}$	"	"	"	"
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0, 4)$	0	4	N.E.	N.E.
$(0, 4] \cup \{7\}$	0	7	N.E.	7
$[0, 4) \cup (7, 8]$	0	8	0	8
$\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 3\}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	N.E.	N.E.

Caratterizzazione di sup e inf:① $\sup A = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ b.c. } a \geq M$$

[Gioco al rilancio: fisso M (anche enorme) e A trova un elemento più grande]

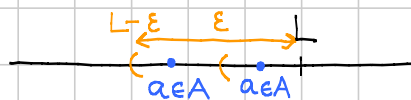
② $\inf A = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ b.c. } a \leq M \quad (\text{il gioco si sposta sull'enorme mente negativo})$$

③ $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$(i) a \leq L \quad \forall a \in A$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ b.c. } a \geq L - \varepsilon$$

④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$(i) a \geq l \quad \forall a \in A$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ b.c. } a \leq l + \varepsilon$$

Esempio 1

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 7\} \\ = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$$

(Per proprietà)

$$\sup A = \max A = \sqrt{7}$$

$$\inf A = \min A = -\sqrt{7}$$

"Mondo x ", cioè l'insieme è rappresentato sull'asse delle x .



Volendo l'insieme A è la controimmagine di $(-\infty, 7]$, cioè cerco i valori $x \in$ insieme di partenza $= \mathbb{R}$ tali che $f(x) \in (-\infty, 7]$

Esempio 2 $B = \{x^2 : x \leq 7\}$ (per elenco)

$$\inf B = 0$$

$$\min B = 0$$

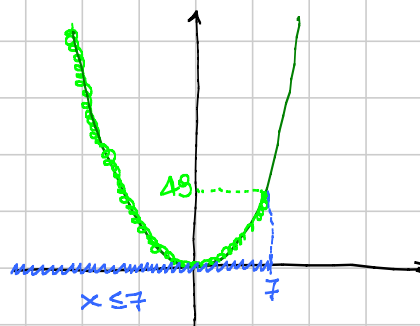
$$\sup B = +\infty$$

$$\max B = \text{N.E.}$$

"Mondo y ", cioè si considerano i valori assunti dalla funzione $f(x) = x^2$ quando x varia in $(-\infty, 7]$

I valori assunti dalla funzione sono tutti gli $y \in [0, +\infty)$

È l'immagine di $(-\infty, 7]$.



— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE

Titolo nota

30/10/2010

Funzioni trigonometriche e loro inverse $\sin x$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- DISPARI [$\sin(-x) = -\sin x$: precorso!]
- PERIODICA di periodo minimo 2π [$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$]
- non iniettiva e non surgettiva

Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

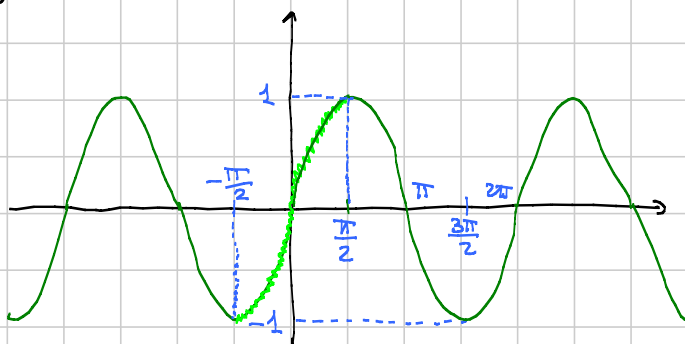
diventa

- iniettiva e surgettiva
- strett. crescente

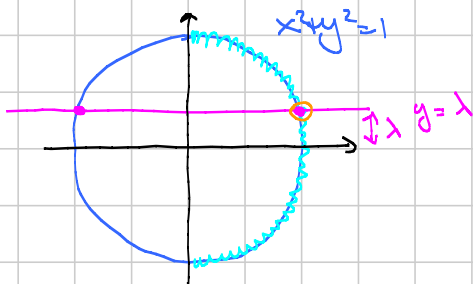
La sua inversa è una

funzione $g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è

$$g(x) = \arcsin x$$



Achtung! $\arcsin x$ prende in INPUT valori in $[-1, 1]$ e restituisce valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

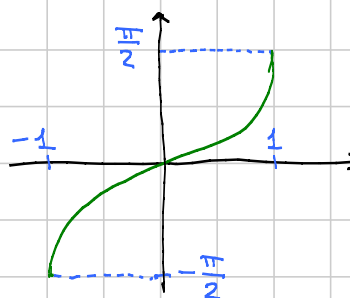
Interpretazione sulla circonferenza trigonometrica

Dato un numero $\lambda \in [-1, 1]$, cosa vuol dire calcolare $\arcsin \lambda$?

Vuol dire

- tracciare la retta $y = \lambda$
- intersecare con la circonferenza
- considerare l'intersezione tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$
- l' $\arcsin \lambda$ è l'arco corrispondente all'unica intersezione in quella zona.

Grafico di $\arcsin x$
(si tratta di una funzione
DISPARI)



$\cos x$ Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- PARI e PERIODICA di periodo minimo 2π
- non iniettiva e non surgettiva

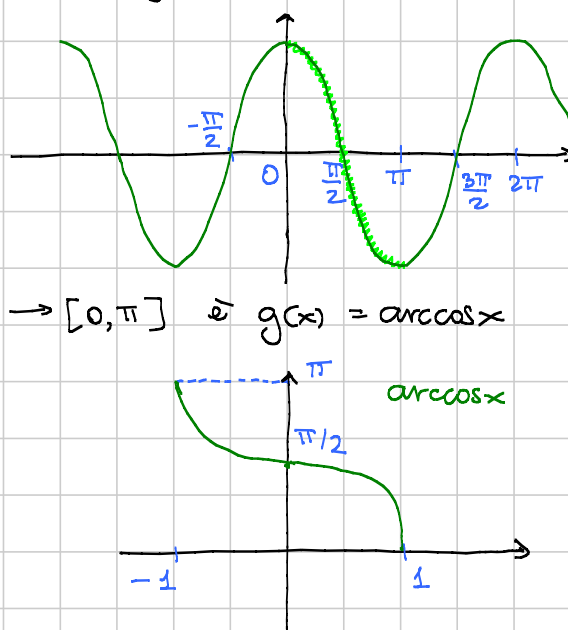
Vista come

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

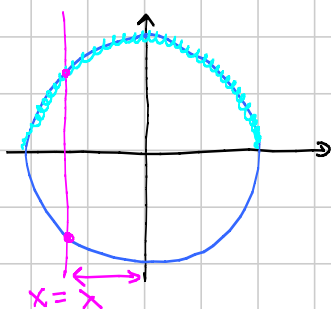
è iniettiva, surgettiva,
strett. decrescente.

La sua inversa $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ è $g(x) = \arccos x$

Grafico:

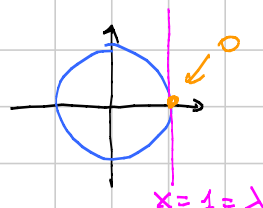
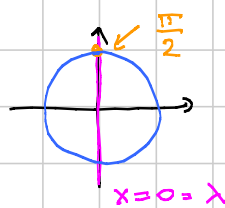
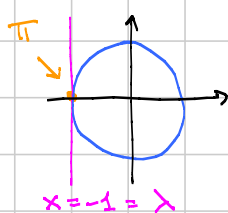


Interpretazione nella circ. trigonometrica



Dato $\lambda \in [-1, 1]$, calcolare $\arccos \lambda$ vuol dire

- tracciare la retta $x = \lambda$
- determinare le 2 intersezioni
- Scegliere quella in $[0, \pi]$
- $\arccos \lambda$ è l'arco corrispondente all'intersezione buona.



tan x Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è nemmeno definita...
ci sono problemi in tutti gli x del tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vista con $f: \mathbb{R} \setminus \{\text{p.ti del tipo } \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ risulta

- DISPARI e PERIODICA di periodo minimo π
- non iniettiva, ma surgettiva.

Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
è dispari, strett. cresc.,
iniettiva e surgettiva.

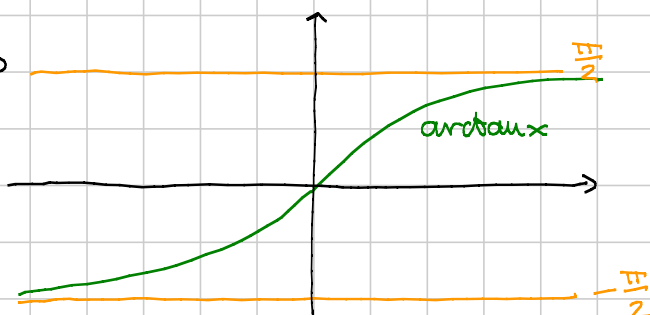
L'inversa

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{è } g(x) = \arctan x$$

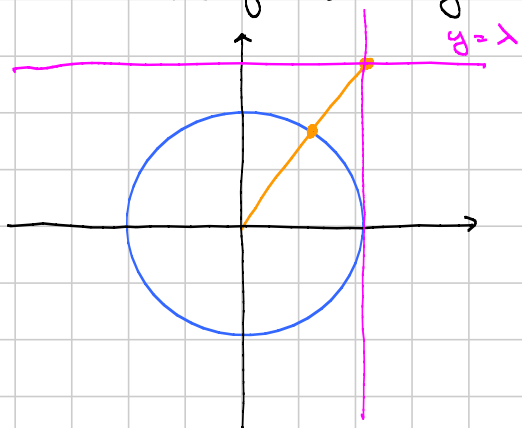
(in INPUT: tutti i reali, in OUTPUT: roba in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

Grafico



È una funzione
dispari

Nella circonferenza trigonometrica



Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, cosa vuol dire fare
 $\arctan \lambda$?

- Traccio la retta $y = \lambda$
- Interseco con $x = 1$
- Unisco con l'origine e interseco
con la circ. trigonometrica
- L'arco corrispondente è $\arctan \lambda$

— o — o —

Esercizio

$$\arccos(\cos 4) = 4 \quad \text{F}$$

$$\arccos(\cos 3) = 3 \quad \text{V}$$

$$\arccos(\cos 2) = 2 \quad \text{V}$$

$$\arccos(\cos 1) = 1 \quad \text{V}$$

$$\arcsin(\sin 4) = 4 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 3) = 3 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 2) = 2 \quad \text{F}$$

$$\arcsin(\sin 1) = 1 \quad \text{V}$$

$$\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{V}$$

$$\cos(\arccos 2) = 2 \quad \text{F}$$

$$\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{V}$$

$$\sin(\arcsin 2) = 2 \quad \text{F}$$

Una funzione e la sua inversa "si semplificano" nei rispettivi insiemi di partenza/arrivo.

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

cioè l'insieme di partenza della restrizione di $\sin x$ che ha come inversa $\arcsin x$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

↓ partenza restrizione del coseno

Analogamente: $\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Esercizio: capire quanto valgono i casi in cui sopra era falsa, cioè quanto valgono

$$\arccos(\cos 4)$$

oppure

$$\arcsin(\sin 2)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 011

Titolo nota

02/11/2010

SUCCESSIONI

Una successione di numeri reali è una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. In genere si indica a_n invece di $a(n)$.

In maniera più elastica si definisce successione una qualunque a_n che sia definita almeno da un certo valore di n in poi.

Esempi $a_n = n^2 - 3n$ (ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa un elem. di $\mathbb{R}$)

$$b_n = \frac{1}{n-5}$$

Non è vero che associa un reale ad ogni $n \in \mathbb{N}$ (perché $n=5$ non va bene). Quindi va bene almeno $\forall n \geq 6$, quindi è succ. nel senso della def. elastica.

$$c_n = \sqrt{n-2010}$$

Va bene $\forall n \geq 2010 \Rightarrow$ OK nel senso elastico

$$d_n = \sqrt{100^{100} - n}$$

Non è una successione, perché non è definita per ∞ valori di n

Terminologia Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$.

- Si dice che P_n vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo valore di n in poi, cioè se

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P_n \text{ è vera } \forall n \geq m_0$$
- Si dice che P_n vale FREQUENTEMENTE se vale per infiniti valori $n \in \mathbb{N}$, cioè (equivalentemente) se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \geq M \text{ t.c. } P_n \text{ è vera.}$$

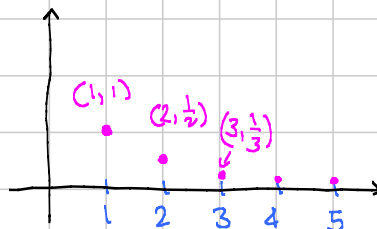
Esempi ① L'espressione $\log_7(3n-7000)$ rappresenta un numero reale definitivamente (appena $n > \frac{7000}{3}$)

② $70 + (-3)^n > 0$ sempre: NO definitivamente: NO
 frequentemente: SI (sicur. per n pari)

Rappresentazioni di una successione

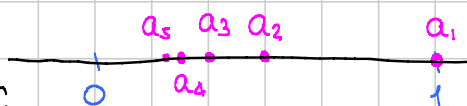
1° modo: nel piano cartesiano. Fare il "grafico", cioè disegnare i p.ti di coordinate (n, a_n)

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$



2° modo: sulla retta.

Disegnare punti corrispondenti ai valori della successione



3° modo: lampadine. Pensiamo alla retta, e al tempo $t = n$ si accende una lampadina nel punto a_n , e questa resta accesa per 1 secondo.

— o — o —

LIMITI DI SUCCESSIONI Una successione ha 4 possibili comportamenti

[1] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

[2] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$a_n \rightarrow +\infty$

[3] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

$a_n \rightarrow -\infty$

[4] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ Non esiste

a_n è INDETERMINATA

Volendo [1] ammettere 2 sottocasi

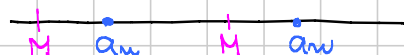
[1⁺] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+ \quad (a_n \rightarrow l^+)$ [1⁻] $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^- \quad (a_n \rightarrow l^-)$

Achtung! I limiti di successione si fanno SOLO per $n \rightarrow +\infty$.

Definizioni di limite

Def. di 4: Nessuno dei precedenti, cioè una successione è indeterminata se non tende ad un numero reale, non tende a $+\infty$ e non tende a $-\infty$.

Def. di 2 Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ (oppure con l'altra notazione) se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
 $a_n \geq M$ definitivamente



(Moralmente: più scelgo M grande, più la successione ci metterà tempo a superarlo, ma definitivamente lo farà)

Achtung! Una successione può tendere a $+\infty$ senza essere definitivamente monotona. Esempio:
 $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, \dots$

Def. di 3 Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)
 $a_n \leq M$ definitivamente

Def. di 1 Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se
 (intuitivamente: per tempi grandi le lampadine si accendono molto vicino al valore l)
 $\forall \varepsilon > 0$ (anche vicino a 0)
 $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente



Varianti di 1. Si dice che

- $a_n \rightarrow l^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ si ha $l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente
- $a_n \rightarrow l^-$ se $\forall \varepsilon > 0$ " " $l - \varepsilon \leq a_n < l$ " "

Esempi (a livello intuitivo)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ anzi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\downarrow} = \text{non esiste}$$

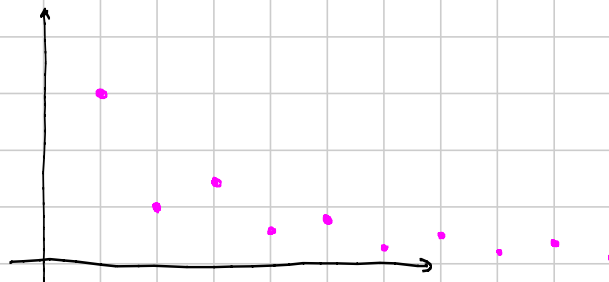
Successione $+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$

Achtung ① Se $a_n \rightarrow l$, si ha per forza $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$?
NO!

$$\text{Esempio: } (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Questa tende a 0, ma né a 0^+ , né a 0^- .

② Se $a_n \rightarrow 0^+$, è vero che a_n è definitivamente decrescente? NO!



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 012

Titolo nota

02/11/2010

Teorema di unicità del limite. Data una successione, allora è possibile uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.
Inoltre non è possibile che a_n verifichi la ① per 2 valori distinti di l .

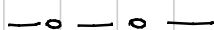
Perché?



La successione dovrebbe stare contemporaneamente nei 2 intorno per valori grandi di n , il che è impossibile



Se tendesse contemporaneamente a l e a $+\infty$, dovrebbe stare, per valori grandi di n , sia nell' intorno di l , sia sopra M .



Permanenza del segno e derivati. Sono tutti gli enunciati del tipo

- se $a_n \rightarrow +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$
- " " " " $a_n \geq 2010$
- " $a_n \rightarrow -\infty$, allora definitivamente $a_n \leq -2010$ ²⁰¹⁰
- se $a_n \rightarrow l$, allora " $a_n \leq l$



definitivamente a_n sta tra 17.5 e 18.5, quindi di sicuro ≤ 18 .



Esempio 1 Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Cosa devo dimostrare? Che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definitivamente.
Distinguiamo 2 casi:

- se $M < 0$, allora $n^2 \geq M$ è vera sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $n^2 \geq M$ è vera $\forall n \geq \sqrt{M}$, cioè da $\sqrt{M}$ in poi, cioè definitivamente.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Cosa devo dimostrare? Che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $\sqrt{n} \geq M$ definitivamente.

Distinguo 2 casi:

- se $M < 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora posso elevare al quadrato impunemente (sto applicando $f(x) = x^2$, che è strett. crescente per $x \geq 0$) e ottengo $n \geq M^2$, che è vera definitivamente

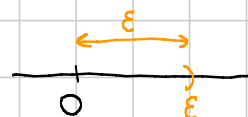
Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$ per ogni $a > 0$ → TABELLINA

La dimostrazione è la stessa che abbiamo fatto per $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$.

... devo risolvere $n^a \geq M$. Questa è

- sempre vera se $M < 0$
- vera per $n \geq M^{1/a}$, cioè definitivamente, se $M \geq 0$.

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, anzi 0^+ .



Cosa devo dimostrare? Che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente.

↑ vera $\forall n \geq 1$, quindi definitivamente.

Esaminio $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Questa è vera $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, cioè definitivamente

(oss. Più scelto ε piccolo, cioè vicino a 0, più $\frac{1}{\varepsilon}$ è grande, quindi più il "definitivamente" parte tardi)

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+$ per ogni $a < 0$ → TABELLINA

Come fatto nel caso $a = -1$, ci si riduce a risolvere $n^a \leq \varepsilon$ e questa è vera per ogni $n \geq \varepsilon^{\frac{1}{a}}$

(Nota bene: l'inversione dei versi è dovuta al fatto che l'esponente è negativo: vedi il caso $a = -1$).

STRUMENTI PER IL CALCOLO DEI LIMITI Permettono di calcolare i limiti senza passare attraverso la definizione (cioè $M, \varepsilon, \dots$)

- Teoremi di confronto
- Teoremi algebrici

Teorema di confronto a 2 Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora

- se $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$
- se $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$.

Achtung! Ogni altra implicazione è ABUSIVA.

Supponiamo per esempio che $b_n \rightarrow 4$. Cosa può fare a_n ?

Almeno 3 cose: 1 - $a_n \rightarrow -\infty$

2 - $a_n \rightarrow l \leq 4$

3 - a_n può essere indeterminata

Teorema di confronto a 3 (teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni. Supponiamo che

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

e supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R} \quad (\text{tipo } \boxed{1})$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$ (stesso l di sopra)

(Brutalmente: se i 2 laterali hanno lo stesso limite (reale), allora anche il centrale è di tipo $\boxed{1}$ ed ha lo stesso limite).

— o — o —

Retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Se dico $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, in un solo simbolo riassumo i casi 1, 2, 3.

Teoremi algebrici Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che $a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$, $b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Allora

$$\begin{array}{ll} (a_n + b_n) \rightarrow l_1 + l_2 & \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2} \\ (a_n - b_n) \rightarrow l_1 - l_2 & [a_n]^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2} \\ a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2 & \end{array}$$

TRANNE

- nelle 7 forme indeterminate

$$\boxed{+\infty - \infty} \quad \boxed{0 \cdot \pm\infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}} \quad \boxed{0^0} \quad \boxed{1^{\pm\infty}} \quad \boxed{\infty^0}$$

in cui non si può dire nulla (vedi commenti successivi)

- Quando al denominatore c'è 0 (-)

Osservazione Le operazioni si estendono in modo ovvio a $\bar{\mathbb{R}}$.

$$7 + \infty = +\infty$$

$$12 - \infty = -\infty$$

$$7 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{12}{+\infty} = 0$$

$$\frac{-\infty}{-3} = +\infty$$

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 013

Titolo nota

02/11/2010

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

Si potrebbe fare con la definizione, ma viene sempre con il confronto a due. Infatti

confronto $\underbrace{2^n}_{\rightarrow +\infty} \geq \underbrace{n}_{\rightarrow +\infty}$ (dim. per induzione a suo tempo)
(sarebbe n^2 : fondo lezione prec.)

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ per ogni $a > 1$ $\rightarrow$ TABELLINA

Infatti $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + (a-1)n$
 $(1+x)^n \geq 1 + nx$ vera per $x \geq -1$
 Disuguaglianza di Bernoulli

Quindi

$\underbrace{a^n}_{\rightarrow +\infty \text{ per confronto}} \geq \underbrace{1 + (a-1)n}_{\rightarrow +\infty \text{ se } a > 1}$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ per ogni $a \in [0, 1)$ $\rightarrow$ Tabellina

Infatti posso scrivere $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ (infatti $b = \frac{1}{a}$)

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^n} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$

Basta osservare che

$\underbrace{n!}_{\rightarrow +\infty} \geq \underbrace{n}_{\rightarrow +\infty}$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{7} = 1$ $[\sqrt[n]{7} = 7^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7^0 = 1]$

Provo a dimostrarlo con Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{Elevo alla } \frac{1}{n}: (1+x) \geq \sqrt[n]{1+nx}$$

Vorrei che fosse $1+nx = 7$, quindi scelgo $x = \frac{6}{n}$. Ho quindi

segue da
 $\sqrt[n]{7} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

segue da Bernoulli
 con $x = \frac{6}{n}$

$$1 \leq \sqrt[n]{7} \leq 1 + \frac{6}{n}$$

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$, quindi $\frac{6}{n} \rightarrow 6 \cdot 0 = 0$, quindi
 $1 + \frac{6}{n} \rightarrow 1 + 0 = 1$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$ → Tabellina

Stessa dim. di sopra: provare a rifare.

Achtung! In tutte queste formule con il parametro a , si intende che a è un NUMERO (cioè non dipende da n).

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 10n) = +\infty$

$$\underbrace{n^3}_{+\infty} + \underbrace{10n}_{10 \cdot (+\infty)} \rightarrow [+\infty + \infty] = +\infty \quad (\text{applicazione di vari teoremi algebrici})$$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 10n) = +\infty$

$n^3 - 10n \rightarrow [+\infty - \infty]$ Forma indeterminata
 Chi vince?

$$n^3 - 10n = \underbrace{n}_{+\infty} \cdot \underbrace{(n^2 - 10)}_{+\infty} = +\infty$$

Achtung!!! Forma indeterminata non vuol dire che il limite non esiste (tipo 4). Vuol dire che i vari termini coinvolti "se la giocano" e bisogna trovare un procedimento per stabilire chi vince.

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 7n + 5}{n^2 + 3} \quad \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty + 3} \right]$

Raccolgo n^2 sopra e sotto. Diventa:

$$\frac{n^2 \left(2 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{2 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 7 \sin n) = +\infty$

Confronto a 2: $\boxed{n - 7 \sin n} \geq \boxed{n - 43}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Come si dimostra?

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

Divido per n impuamente essendo $n > 0$ definitivamente

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}} \quad \text{conclusione}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 12 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n! - n^2 + 7^n)}{\sqrt{n} - 5} = 0$

Stesso motivo di prima:

$$-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1, \text{ quindi } (\text{perch\`e?})$$

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{n} - 5}} \leq \frac{\cos(\text{Mostro})}{\sqrt{n} - 5} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n} - 5}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 13 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3n} - \sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{20n}} = \left[\frac{+\infty - \infty}{+\infty + \infty} \right] = \sqrt{3}$

Analisi brutale

$$\sim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{3}$$

Rigoroso: raccolgo $\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{3n} - \sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{20n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{n}} \right)}{\cancel{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[6]{n}} \right)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{6}}$$

PRECORSO!!

Esempio 14 $\sqrt{n} - \cos(n^2) \cdot \sqrt[4]{n}$

Raccolgo $\sqrt{n}$: $\sqrt{n} \left(1 - \cos(n^2) \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \right) =$

$$= \boxed{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\cos(n^2)}{\sqrt[4]{n}} \right) \rightarrow +\infty$$

$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ divido per $\sqrt[4]{n}$...

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \leq \frac{\cos(n^2)}{\sqrt[4]{n}} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 014

Titolo nota

03/11/2010

Combinatoria Fattoriale di $n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ Significato combinatorio: anagrammi di una parola di n lettere diverse,Esempio 1 COMPUTER 8 lettere tutte diverse. Quanti sono gli anagrammi

La prima lettera la posso scegliere in 8 modi

" 2^a " " " " " 7 modi" 3^a " " " " " 6 modi

⋮

7^a " 2 modiL'8^a lettera è obbligata 1 modo

$$8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 8!$$

Esempio 2 ESEMPIO 7 lettere, di cui una ripetuta

ESEMPIO gli anagrammi di questa sono 7!

ESEMPIO nel 7! i 2 anagrammi precedenti sono distinti

Ogni possibile anagramma compare 2 volte nella lista dei 7!, quindi devo dividere per 2

$$\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$$

Esempio 3 TUTTO Una lettera si ripete 3 volte

TUTTO Ogni anagramma compare nella lista dei 5! tante volte quante sono le permutazioni dei 3 colori, cioè 3! volte.

$$\text{Quindi sono } \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Esempio 4 BIOMEDICA 9 lettere, 2 I

$$\text{Anagrammi: } \frac{9!}{2!}$$

BINOMIALI

Problema combinatorio: 20 studenti, ne voglio scegliere 4 da premiare. In quanti modi li posso scegliere?

Il 1° lo scelgo in	20 modi
2°	19 modi
3°	18 modi
4°	17 modi

In questo modo ho contato + volte lo stesso gruppo di 4. Lo stesso gruppo di 4 persone lo posso aver scelto in $4!$ modi (ciascuno può essere stato il 1°, il 2°, ...). Devo dividere per $4!$

I modi sono
$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!}$$

Più in generale, se voglio scegliere k persone su n , i modi di farlo sono

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

"n su k"

Altro modo di scrivere la stessa cosa:

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} \frac{16!}{16!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!}$$

In generale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Definizione di binomiale
 $0 \leq k \leq n$

Esempio Quante partite ci sono in un campionato a 20 squadre? Limitandosi al girone di andata, devo scegliere in tutti i modi possibili 2 squadre su 20, quindi

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$$

Proprietà dei binomiali

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dim. algebrica $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Dim. combinatoria : $\binom{n}{k}$ = modi di scegliere k da premiare su n
 $\binom{n}{n-k}$ = " " " " $n-k$ da non premiare
 I due modi di procedere sono equivalenti

$$\textcircled{2} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dim. algebrica : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k+1} + n - \cancel{k}}{(n-k)(k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dim. combinatoria Devo scegliere $(k+1)$ -persone in un gruppo di $n+1$. Isolo l' $(n+1)$ -esimo


 n persone $(n+1)$ -esimo.

Come posso scegliere $(k+1)$?

- posso sceglierli tutti tra i primi n : $\binom{n}{k+1}$ possibilità
- posso prendere l'ultimo e aggiungere k tra i primi n : $\binom{n}{k}$

$$\textcircled{3} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{Dim. algebrica: } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

Dim. combinatoria : modi di scegliere n persone da premiare tra n (1 solo modo)

BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

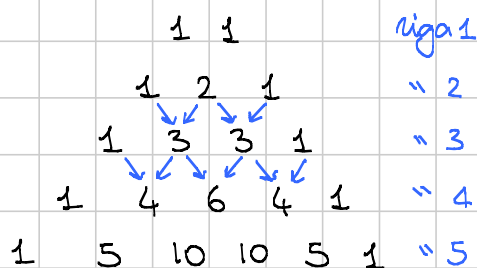
$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Triangolo di Tartaglia (Pascal)

Ogni elemento è la somma dei due elementi che stanno sopra.

Quando sviluppo $(x+y)^n$, i coeff.

sono gli elementi della riga n



Esempio $(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 x^3 y + 6 x^2 y^2 + 4 x y^3 + 1 \cdot y^4$

Fatto: i coefficienti che compaiono nella riga n sono i binomiali $\binom{n}{k}$ per $k = 0, 1, \dots, n$

Interpretazione combinatoria del binomio di Newton

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$$

Sviluppando tutto, quanti termini saranno del tipo $y^i x^{n-i}$?

Devo scegliere y in i parentesi su n , e lo posso fare in $\binom{n}{i}$ modi. Quindi il coeff. è $\binom{n}{i}$

④ Mettendo $x=y=1$ ottengo che la somma dei binomiali

della riga n -esima è 2^n

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 015

Titolo nota

03/11/2010

Esercizio 1 $f(x) = 2^{|x|}$ Funzione PAR
 $f(-x) = 2^{|-x|} = 2^{|x|} = f(x)$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva ($f(3) = f(-3)$) e nemmeno surgettiva (non prende per lo meno i valori ≤ 0)

Grafico... Per $x \geq 0$ è come forse 2^x , e poi è pari.

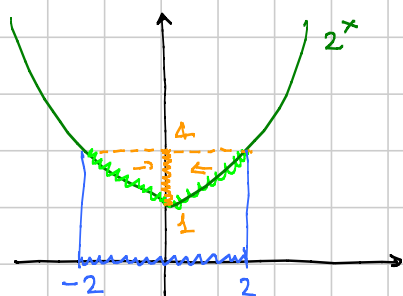


Immagine di $[-2, 2]$: $[1, 4]$

Immagine di tutto $\mathbb{R}$: $[1, +\infty)$

L'equazione

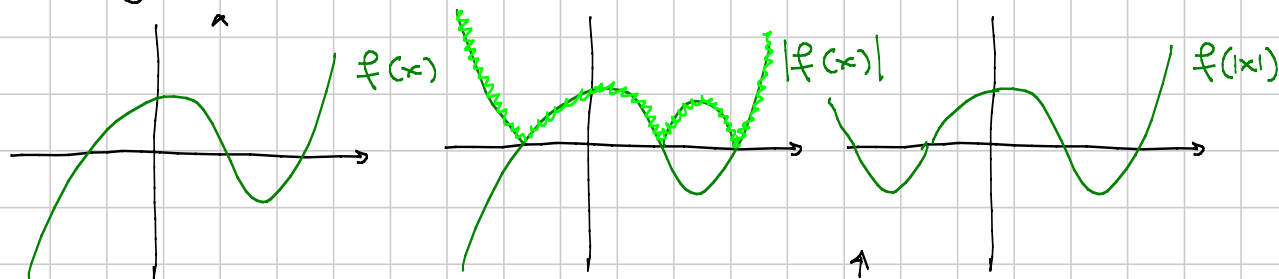
$$2^{|x|} = \lambda$$

ha

- 0 soluzioni per $\lambda < 1$
- 1 soluzione per $\lambda = 1$
- 2 soluzioni per $\lambda > 1$

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$. I valori di x corrispondenti alle intersezioni sono le soluz.
 — o — o —

In generale $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$



↑
 sui positivi non cambia,
 la parte negativa è quella
 positiva ribaltata

Esercizio 2

$$f(x) = \cos(x^2) \quad \text{PARI}$$

$$f(-x) = \cos((-x)^2) = \cos x^2 = f(x)$$

$$f(x) = \cos x^3 \quad \text{PARI}$$

$$f(-x) = \cos(-x)^3 = \cos(-x^3) = \cos x^3 = f(x)$$

$$f(x) = \sin x^2 \quad f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x) \quad \text{PARI}$$

$$f(x) = \sin x^5 \quad f(-x) = \sin(-x)^5 = \sin(-x^5) = -\sin x^5 = -f(x)$$

DISPARI ↑
sin è dispari

$$f(x) = 2^{-x^2} \quad \text{PARI}$$

$$f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 2^{-x^3} \quad \text{Nessuno dei due!}$$

$$f(-1) = 2$$

$$f(x) = \cos(\sin(\arctan x)) \quad \text{PARI}$$

$$f(-x) = \cos(\sin(\arctan(-x))) = \cos(\sin(-\arctan x))$$

$$= \cos(-\sin(\arctan x)) = \cos(\sin(\arctan x)) = f(x)$$

$$f(x) = 2^{\cos x}$$

$$f(-x) = 2^{\cos(-x)} = 2^{\cos x} = f(x)$$

f è PARI

$$g(x) = \cos(2^x)$$

NULLA

prova $x=1$ e $x=-1$.

— 0 — 0 —

Esercizio 3 $f(x) = \sin^4 x$ è periodica?

Sì, e 2π è un periodo. Perché?

$$f(x+2\pi) = \sin^4(x+2\pi) = [\sin(x+2\pi)]^4 = \sin^4 x = f(x)$$

In realtà anche π è un periodo

$$f(x+\pi) = [\sin(x+\pi)]^4 = [-\sin x]^4 = [\sin x]^4 = f(x)$$

↑
precorso

$f(x) = \log_3(5 + \cos x)$ Periodica e 2π è un periodo
PARI

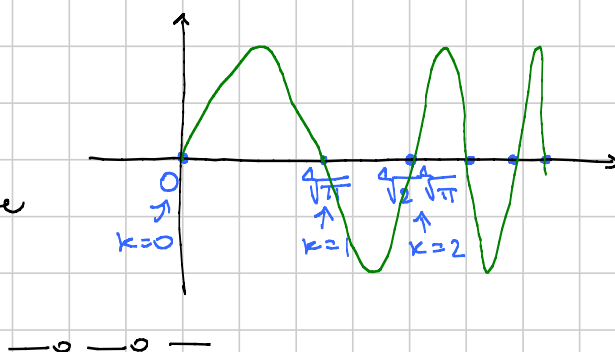
$$f(-x) = \log_3(5 + \cos(-x)) = \log_3(5 + \cos x) = f(x)$$

Esercizio 4 $f(x) = \sin x^4$ PARI Non è periodica !!!!!

Come è fatto più o meno il grafico? Dove si annulla?

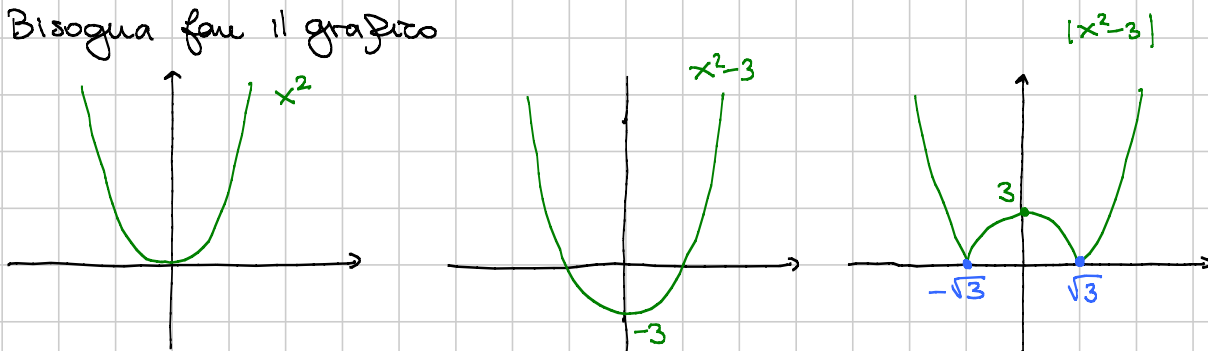
Dove l'argomento del sin è $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, quindi dove
 $x^4 = k\pi$, quindi quando $x = \sqrt[4]{k} \cdot \sqrt[4]{\pi}$

Il grafico continua ad oscillare tra -1 e 1 , ma le oscillazioni sono sempre più ravvicinate. Questo è contro la periodicità



Esercizio 5 $|x^2 - 3| = \lambda$ Quante soluzioni al variare di λ .

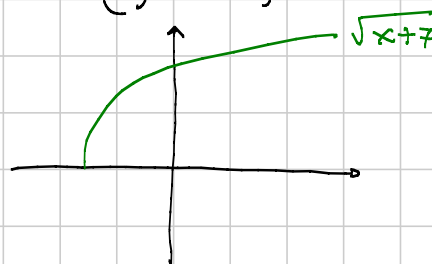
Bisogna fare il grafico



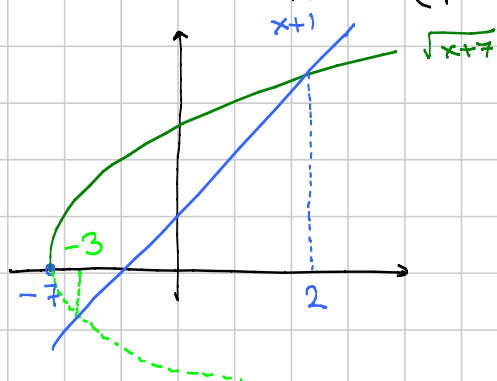
- L'equazione ha:
- 0 soluzioni per $\lambda < 0$
 - 2 soluzioni per $\lambda = 0$ e per $\lambda > 3$
 - 3 soluzioni per $\lambda = 3$
 - 4 soluzioni per $\lambda \in (0, 3)$

Esercizio 6 $\sqrt{x+7} > x+1$

Volevamo si risolve con metodi da percorso (fare!!!)



Andiamo a sovrapporre (pericolo!)



Per trovare l'intersezione
risolvo

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

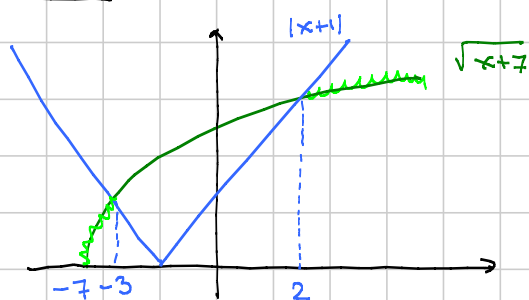
$$x+7 = x^2+2x+1$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x=2 \text{ e } x=-3$$

Dal grafico si vede che $\sqrt{x+7} > x+1 \Leftrightarrow x \in [-7, 2)$.

Esercizio 7 $\sqrt{x+7} < |x+1|$



Soluzione d'equazione:

$$[-7, -3) \cup (2, +\infty).$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 016

Titolo nota

04/11/2010

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio rapporto $\rightarrow$ radice

LIMITE MISTERIOSO

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

 $e \approx 2.7182\dots$

Tabellina

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$.

Allora

- se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$; (incluso il caso $l = +\infty$)
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$;
- se $l = 1$, allora BOH (cioè non si può dire nulla su a_n , cioè bisogna trovare un altro metodo).

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $a_n > 0$ definitivamente.Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.Allora stesse conclusioni del criterio della radiceUtilizzo operativo dei criteri del rapporto e della radiceSituazione: devo calcolare il limite di a_n .Invece di calcolare questo, calcolo il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.Se uno di questi 2 lo so fare, e viene $l \neq 1$, allora so quanto vale il limite iniziale.

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE Sia $a_n > 0$ definitivamente.

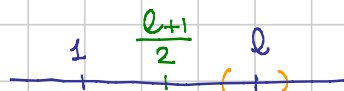
Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso l).
— o — o —

Conseguenza: se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$. Quindi se il rapporto dice BOR, anche la radice dice BOR.
— o — o —

Dim. della radice

Caso $l > 1$



Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$. Elevo alla n :

(confronto a 2) $a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$
 (espones. con base > 1)

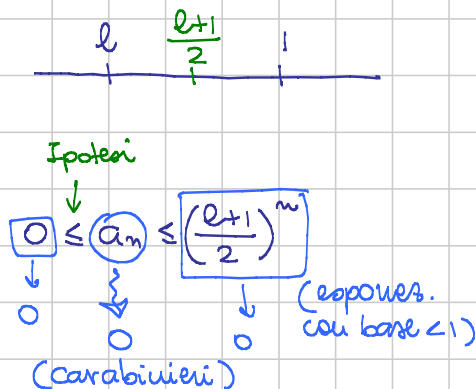
cometto dopo video

Se fosse $l = +\infty$, allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq 2010$, quindi $a_n \geq 2010^n$ e si chiude come sopra.

Caso $l < 1$

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}, \text{ da cui}$$



Achtung! Supponiamo $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (o definitiv.)
 Supponiamo che $b_n \rightarrow 0$. Allora a_n può tendere a $+\infty$,
 tendere ad $l \geq 0$, oppure non avere limite.
 Supponiamo ora che sia $a_n > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
 Allora le conclusioni sono le stesse !!!

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Esempio

$$\boxed{\frac{1}{n}} < \boxed{\frac{100}{n}} \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Le disuguaglianze $<$ al limite possono diventare $\leq$.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ $[\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \leadsto (+\infty)^0 \text{ forma indet.}]$

Applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \boxed{\frac{1}{n}}\right) = 1$$

$\downarrow$
 0

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (stesso limite).

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ $[\sqrt[n]{n!} = (n!)^{\frac{1}{n}} \leadsto (+\infty)^0]$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (stesso limite)

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{30}}$

1° modo Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^{30}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{30}}{n^{30}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{30} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{30} = 1$$

Quindi anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{30}} = 1$.

2° modo Recorso! $\sqrt[n]{n^{30}} = \left[\sqrt[n]{n}\right]^{30} \rightarrow 1^{30} = 1$.

$\uparrow$
 Recorso

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 + 2n^5 - 14} = 1.$

1° modo Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^7 + 2n^5 - 14 \dots$

2° modo Chi comanda si raccoglie!

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^7 + 2n^5 - 14} &= \sqrt[n]{n^7 \left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}\right)} = \sqrt[n]{n^7} \sqrt[n]{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}} \\ &= \left[\sqrt[n]{n}\right]^7 \left[1 + \frac{2}{n^2} - \frac{14}{n^7}\right]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $1^7 = 1$ $\downarrow$ $1^0 = 1$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n + 7 \arctan n!}$

$$\dots = \sqrt[n]{n \left(1 + 7 \frac{\arctan n!}{n}\right)} = \sqrt[n]{n} \left[1 + 7 \frac{\arctan n!}{n}\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1^0

$$0 \leq \arctan n! \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per n e ottengo

$$0 \leq \frac{\arctan n!}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}}{n}$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

In tabellina

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio in } n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 017

Titolo nota

04/11/2010

CONFRONTO DI ORDINI DI INFINITO

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^3} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Applico il criterio del rapporto, cioè calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 2 = l > 1 \end{aligned}$$

Poiché $l > 1$, si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

In alternativa, potrei usare il criterio della radice sempre con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$.
Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{[\sqrt[n]{n}]^3} = 2 = l > 1$$

Conclusione come prima.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+7)^{2010}}{(1.001)^n} = 0 \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Rapporto: calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+8)^{2010}}{(1.001)^{n+1}}}{\frac{(n+7)^{2010}}{(1.001)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+8)^{2010}}{(1.001)^{n+1}} \cdot \frac{(1.001)^n}{(n+7)^{2010}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1.001} \cdot \left(\frac{n+8}{n+7} \right)^{2010} = \frac{1}{1.001} = l < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

Regola generale: esponenziali battono le potenze

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \text{per ogni } a > 0, b > 1$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{200^n} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

1° modo Criterio del rapporto con $a_n = \frac{n!}{200^n}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{200^{n+1}}}{\frac{n!}{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{200^{n+1}} \cdot \frac{200^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!}}{200 \cdot \cancel{200^n}} \cdot \frac{\cancel{200^n}}{\cancel{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{200} = +\infty = l > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \text{limite originale} = +\infty$$

2° modo Criterio della radice con lo stesso a_n . Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{200^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{200} = +\infty$$

Conclusione come sopra.

— 0 — 0 —

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{per ogni } a > 1$$

Fattoriale batte esponenziale

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 + 7^n}$

Comanda 7^n , quindi si raccoglie

$$\sqrt[n]{n^7 + 7^n} = \sqrt[n]{7^n \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)} = 7 \cdot \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n}$

$$\sqrt[n]{5^n + 7^n} = \sqrt[n]{7^n \left(1 + \frac{5^n}{7^n} \right)} = 7 \cdot \left[1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7$$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Applico criterio del rapporto con $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

Il limite del rapporto è > 1 , quindi $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ La cosa sotto radice è l' a_n dell'esempio 6 (quasi)

Calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$, dove a_n è quello dell'es 6.

Applico rapporto $\rightarrow$ radice. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$

Se il rapporto tende ad e , anche la radice tende ad e . Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = e, \text{ ma allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

In tabellina:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = +\infty$

Criterio della radice con $a_n = \frac{3^{n^2}}{n!}$. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{\sqrt[n]{n!}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3^n}{n}} \cdot \boxed{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 + ∞ e
 esponenziale (tabellina)
 batte polare

Se la radice tende a $+\infty$, il limite originale è $+\infty$

Quando si dice che fattoriale batte esponenziale, si intende l'esponenziale con esponente n , non n^2 .

Nota bene: 3^{n^2} batte tranquillamente n^n

— o — o —

Osservazione Se $a_n = (2n)!$. Quanto fa $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} = (2n+2)(2n+1)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 018

Titolo nota

06/11/2010

Limiti di funzioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

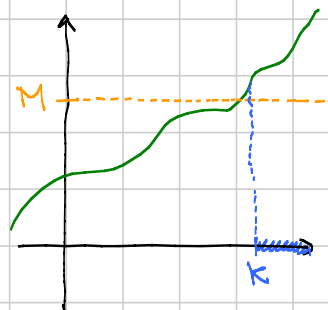
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ \rightarrow +\infty & \textcircled{2} \\ \searrow -\infty & \textcircled{3} \\ \searrow \text{non esiste} & \textcircled{4} \end{cases} \rightarrow \text{Nessuno dei precedenti}$$

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$$

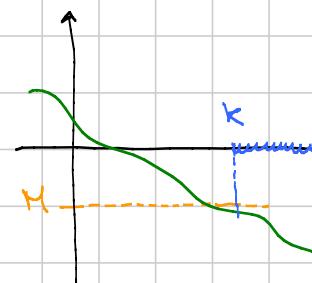
(Più M è grande, più servirà prendere K grande)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

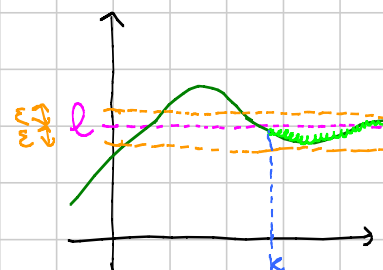
$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$$



Def. di ④ Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$$



Più precisamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } l - \varepsilon \leq f(x) < l \quad \forall x \geq K.$

— o — o —

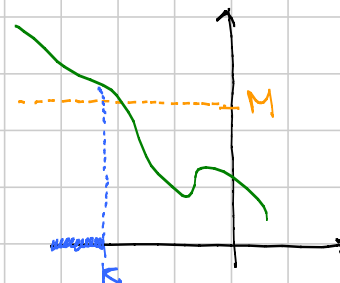
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ \nearrow +\infty & \textcircled{2} \\ \nearrow -\infty & \textcircled{3} \\ \searrow \text{non esiste} & \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{Nessuno dei precedenti}$$

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \leq K$

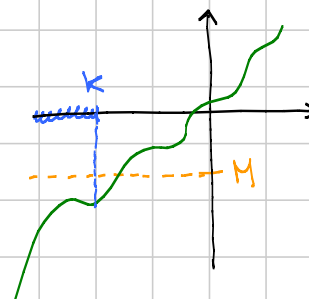
(Più M è grande, più K sarà molto negativo)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \leq K$

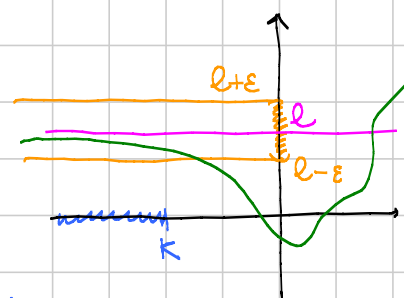


Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq K$

(Più ε è vicino a zero, più saranno K enorm. negativi)



Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$

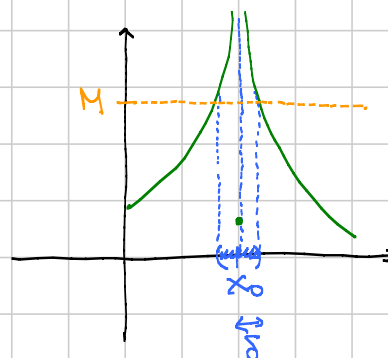
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ \nearrow +\infty & \textcircled{2} \\ \nearrow -\infty & \textcircled{3} \\ \searrow \text{non esiste} & \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{NDP}$$

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$
tutto l'intervallo escluso x_0



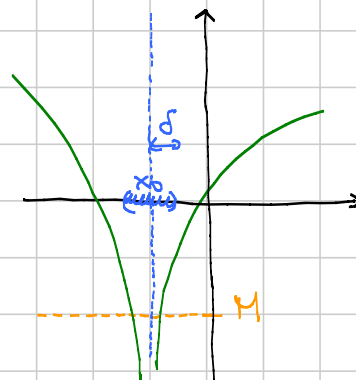
Achtung! La definizione di limite tiene conto di cosa succede "vicino" a x_0 . Quello che succede in x_0 non è rilevante. Anzi; la funzione potrebbe non essere nemmeno definita per $x = x_0$.

Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ b.c. } f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

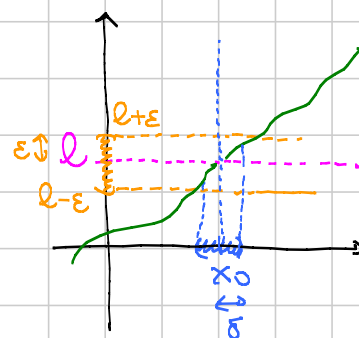


Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ b.c.}$$

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



(Più ε è vicino a zero, più è probabile che δ debba essere vicino a zero).

— o — o —

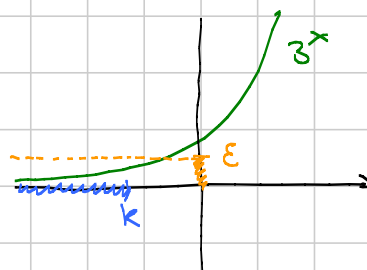
Quando si fanno limiti per $x \rightarrow x_0^+$ vuol dire che la disuguaglianza opportuna deve valere non $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, ma solo $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$.

Quando $x \rightarrow x_0^-$ si intende ... $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$.

— o — o —

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$ (congetta)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0^+$ (congetta)



Cosa vuol dire?

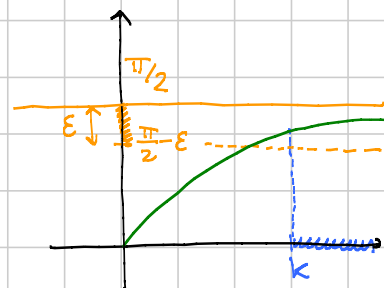
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } 0 < 3^x \leq \varepsilon \quad \forall x \leq K$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, o meglio $\frac{\pi}{2}^-$

Cosa vuol dire?

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ b.c.

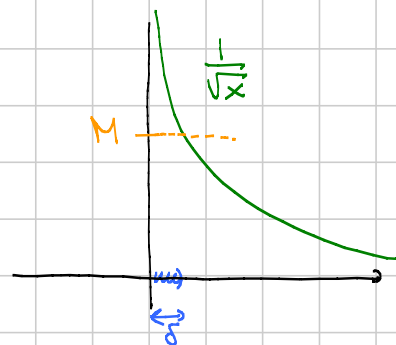
$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \geq k$$



Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ b.c.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq M \quad \forall x \in (0, \delta]$$



Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ Non esiste!!!!

Meglio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



In generale:

se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$

e $l_1 \neq l_2$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 019

Titolo nota

06/11/2010

Limiti di funzioni: strumenti

- Teoremi di confronto: confronto a 2 e a 3 come con le success.
- Teoremi algebrici: esattamente come le successioni
- Continuità
- Cambio di variabili
- Limiti notevoli

Continuità Una funzione $f(x)$ si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quali sono le funzioni continue?

Meta-teorema Qualunque cosa ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove definita, cioè dove non presenta problemi BUCROCRATICI (tipo denomi = 0, radici di roba < 0, logaritmi di roba ≤ 0, ...)

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(7^x + \log_5(\cos x^3)) = \frac{\pi}{4}$

BASTA SOSTITUIRE $x=0$: DIVENTA $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(3^x+2)}{x^2+3} = 0$

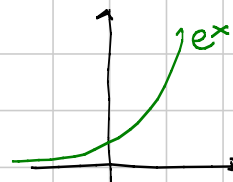
Rigorosamente: $-1 \leq \cos(3^x+2) \leq 1$

Divido per x^2+3 che è positivo (almeno per x grandi)

$$-\frac{1}{x^2+3} \leq \frac{\cos(\quad)}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2+3}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Potenzi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71, \dots$ e^x



L'inversa di e^x è il logaritmo naturale di x
 in x oppure $\log x$

se non è indicata una base, si intende base e

Limiti notevoli

PADRI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

FIGLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

NIPOTI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Sono tutti esempi di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$.

Esempio

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*limite notevole
PADRE + teorema
algebrico*

$$\downarrow 1^2 = 1$$

$$\downarrow \frac{1}{2}$$

*banale sostituzione
in $x \rightarrow 0$
autorizzata dal
metateorema*

Altro esempio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1. \end{aligned}$$

$$\downarrow 1$$

$$\downarrow 1$$

Cambio di variabili Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Pongo $y = x^2$ (cambio di variabili)
Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$. Assomiglia a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

↓ ↓
1 1

Perché $\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$ tende a 1? Faccio il cambio di variabili
 $y = \sin x$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x}$

Metodo sbagliato: pongo $y = \cos x$. Viene $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 1$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{e^1 - 1}{1} = e - 1$$

Allo stesso risultato si arrivava sostituendo $x=0$ nel limite iniziale.
 $\frac{e^1 - 1}{1}$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(5x)}{5x}} \cdot 5 = 5$

↓
1

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\tan x}} = \frac{1}{2}$

↓ ↓ ↓
 $\frac{1}{2}$ 1 1

Criterio FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ $[+\infty \cdot \sin 0 = +\infty \cdot 0]$

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \log 7} - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log 7} - 1}{x \log 7} \cdot \log 7 = \log 7$$

$\downarrow$
1

PASSAGGIO E-ALLA

$$A^B = e^{\log(A^B)} = e^{B \log A}$$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1)$ $[+\infty(1-1) = +\infty \cdot 0]$

$$n(\sqrt[n]{5} - 1) = n(5^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0$ e diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5^y - 1}{y} = \log 5$$

— 0 — 0 —

Forme indeterminate ed E-ALLA

$$A^B = e^{B \cdot \log A}$$

$$+\infty^0$$

$$e^{0 \cdot \log \infty}$$

$$0^0$$

$$e^{0 \cdot \log 0} = e^{0(-\infty)}$$

$$1^\infty$$

$$e^{\infty \cdot \log 1} = e^{\infty \cdot 0}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 020

Titolo nota

06/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$

Pongo $y = \log x$, quindi $x = e^y$
Quando $x \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \text{ perch  potenza contro espon.}$$

Pi  in generale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = 0 \text{ per ogni } a > 0 \text{ per ogni } b > 0$$

i logaritmi perdono dalle potenze

Esercizio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{n^{20}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{n} \log 3}}{e^{20 \log n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{n} \log 3 - 20 \log n} \quad \text{Basta fare il limite dell'esponente}$$

$$\sqrt{n} \log 3 - 20 \log n = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} \left\{ \log 3 - 20 \underbrace{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}_{\downarrow 0} \right\} = +\infty$$

fatto prima

Quindi il limite originario fa $+\infty$

Esercizio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt{n^2 + 3}}$

Brutale: Numeratore $\sim \log 3^n = n \log 3$ Denominatore $\sim \sqrt{n^2} = n$ Quindi $\lim = \log 3$

Rigorosamente: raccolgo chi comanda

$$\frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt{n^2 + 3}} = \frac{\log[3^n (1 + \frac{1}{3^n})]}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \frac{n \log 3 + \log(1 + \frac{1}{3^n})}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \frac{\cancel{n} \{ \log 3 + \frac{\log \dots}{n} \}}{\cancel{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}$$

$\frac{\log 1}{\infty} = 0$

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(3x)}{\arctan(2x)}$ $\left[\frac{1-1}{0} \right]$

$$\frac{e^x - \cos(3x)}{\arctan(2x)} = \frac{e^x - 1 + 1 - \cos(3x)}{\arctan(2x)} = \frac{e^x - 1}{\arctan(2x)} + \frac{1 - \cos(3x)}{\arctan(2x)}$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\arctan(2x)}{2x}} + \frac{\frac{1 - \cos(3x)}{9x}}{\frac{\arctan(2x)}{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{2 \cdot \frac{\arctan(2x)}{2x}} + \frac{\frac{1 - \cos(3x)}{9x^2} \cdot 9x}{2 \cdot \frac{\arctan(2x)}{2x}} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $\left[\frac{0}{0} \right] = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Pongo $y = \cos x - 1$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

$-\frac{1}{2}$

Esercizio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ Non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$



Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ $[0 \cdot (-\infty)]$

Pongo $y = \log x$, quindi $x = e^y$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y =$$

Pongo $z = -y$. Quando $y \rightarrow -\infty$, ho che $z \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \quad (\text{esponenziale contro potenza})$$

Altro modo di fare la stessa cosa: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, quindi $x = \frac{1}{y}$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log y}{y} = 0.$$

Da ricordare $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a [\log x]^b = 0$ per ogni $a > 0$ e ogni $b > 0$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \log x} = e^0 = 1$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 \cdot \underbrace{x \log x}_0 = 0. \quad \text{Quindi limite iniziale} = 1.$$

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{n!} - (n!)^n \quad [+\infty - \infty]$

$$n^{n!} - (n!)^n = \underbrace{n^{n!}}_{+\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{(n!)^n}{n^{n!}}}_0 \right] \quad \text{Resta da considerare la frazione}$$

$$0 \leq n! \leq n^n$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

Elevo alla n -esima potenza: $0 \leq (n!)^n \leq n^{n^2}$

Divido per $n^{n!}$ e ottengo

$$0 \leq \frac{(n!)^n}{n^{n!}} \leq \frac{n^{n^2}}{n^{n!}} = n^{n^2 - n!} = e^{(n^2 - n!) \log n} = e^{\underbrace{(n^2 - n!) \log n}_{-\infty}} = 0$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 021

Titolo nota

09/11/2010

Dimostrazione limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Infatti $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi il limite a 0^- coincide con quello a 0^+ .

Supponiamo ora di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Divido per $\sin x$ (per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ posso farlo impunemente perché $\sin x > 0$). Ottengo

$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

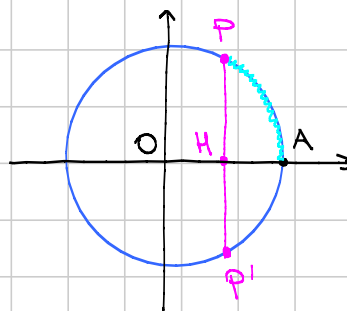
Visto che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Resta solo da dimostrare la disuguaglianza $\sin x \leq x \leq \tan x$

Dimostrazione che $\sin x \leq x$

Sia P il p.to corrispondente all'arco $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sia P' il simmetrico risp. asse x. Allora

- $PP' = 2PH = 2\sin x$
- $\widehat{PP'} = 2\widehat{AP} = 2x$



Poiché $\widehat{PP'} \geq \text{segmento } PP'$ abbiamo che

$$2x \geq 2\sin x, \quad \text{cioè} \quad x \geq \sin x$$

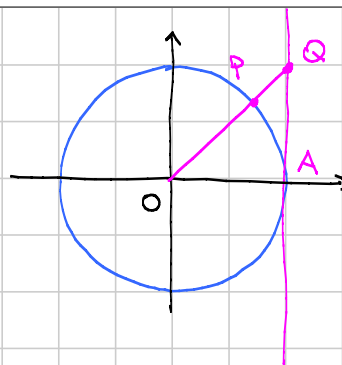
Dimostrazione di $x \leq \tan x$

Nella figura

$x = \text{lungh. arco AP}$

$\tan x = QA$

Non è evidente (ancora) la disuguaglianza.



$$\text{Area (OQA)} = \frac{1}{2} OA \cdot QA = \frac{1}{2} \tan x$$

Calcolo l'area del settore OPA. Uso la proporzione

Area Settore : Area cerchio = arco AP : lungh. circ.

$$\text{Area Settore} : \pi = x : 2\pi$$

Quindi $\text{Area settore} = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2} x.$

Poiché $\text{Area settore} \leq \text{Area (OQA)}$, abbiamo $\frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$, da cui $x \leq \tan x$.

— o — o —

Limiti notevoli con esponenziali e logaritmi.

Partiamo dal limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Calcolo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ [1^{-∞}]

Riporto il limite a $+\infty$ ponendo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_{\rightarrow 1} = e$$

(Ho fatto il cambio
 $z = y-1$)

Ora prendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e faccio il log a dx esx.

Ottengo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \log e = 1$

cioè $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

Ora pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow 0^+$, quindi

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y)$$

e questo dimostra il limite notevole con il logaritmo.

Partendo da $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e procedendo come prima, trovo

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+y)}{y} = 1, \text{ il che completa il discorso}$$

Partendo da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, Pongo $y = \log(1+x)$

Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \log 1 = 0$. Inoltre $e^y = 1+x$, $x = e^y - 1$
Per cui

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1}, \text{ e questo dimostra il limite notevole con l'esponenziale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$$

$\downarrow y = x \log a$
 $\downarrow$
 $\frac{e^y - 1}{y}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$, quindi $x = \tan y$
Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1.$$

Analogamente si dimostra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$

$\xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0}$

$y = \arcsin x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x}{x}$ Non esiste. Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x}{x} = +\infty \quad \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right]$

e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arccos x}{x} = -\infty \quad \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{0^-} \right]$

$\xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0}$

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} \quad \left[\frac{\frac{\sin \pi}{\pi^2 - \pi^2}}{0} = \frac{0}{0} \right]$. Per portarlo a 0 pongo $y = x - \pi$. Quando $x \rightarrow \pi$ ho che $y \rightarrow 0$. Ricavo $x = y + \pi$

Allora $\frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \frac{\sin x}{(x+\pi)(x-\pi)} = \frac{\sin(y+\pi)}{(y+2\pi)y} = \left[\frac{0}{0}, \text{ancora} \right]$

$= - \frac{\sin y}{(y+2\pi)y} = - \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{y+2\pi} \rightarrow - \frac{1}{2\pi}$

$\xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0}$

$\uparrow$ percorso

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2^x - 2} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$ Pongo $y = x - 1$. Quando $x \rightarrow 1$, ho che $y \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2^x - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{2^{y+1} - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{2 \cdot 2^y - 2} =$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \cdot \frac{y}{2(2^y - 1)} = \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{\log 4}$

$\xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0} \quad \xrightarrow{0}$

.....
Titolo nota

09/11/2010

Sia a_n una successione. Una sottosuccessione vuol dire considerare solo alcuni termini, presi in ordine crescente di indice.

Esempi classici:

a_{2m}	=	sottosucc. dei termini di indice pari
a_{2m+1}	=	dispari
a_{4m}	=	" indice multiplo di 4
a_{m^2}	=	" indice quadrato perfetto

($a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$)

a_{n+4} = peso fuori i termini da a_4 in poi:
 $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots$

In un certo senso è una s.succ. FINTA, che salta solo un numero finito di termini, ottenuta mediante SHIFT degli indici.

Teorema Se $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le sue sottosuccessioni tendono allo stesso l .

Achtung! Se a_n non ha limite (di tipo ④) non è assolutamente detto che una s.succ. non abbia limite.

Auzi Sia a_n una successione. Supponiamo che esistano 2 sottosuccessioni che hanno 2 limiti $l_1 \neq l_2$ (entrambi $\in \mathbb{R}$). Allora a_n non ha limite, cioè è di tipo ④.

Dim. Se a_n tende ad un certo $l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosucc. dovrebbero tendere ad l .

Utilizzo operativo Per dimostrare che una successione non ha limite, basta trovare 2 sottosucc. con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$ non ha limite. Infatti
 $a_{2n} = 1 \rightarrow 1$ e $a_{2n+1} \rightarrow -1$.

Esempio 2 $a_n = n^2 + (-3)^n$. Considero due sottosuccessioni

$$a_{2n} = 4n^2 + (-3)^{2n} = 4n^2 + 9^n \rightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)^2 + (-3)^{2n+1} = (2n+1)^2 - 3 \cdot 9^n \rightarrow -\infty \text{ perché l'esponenziale batte la potenza.}$$

Quindi $a_{2n} \rightarrow +\infty$, $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$, per cui a_n non ha limite

Esempio 3 $a_n = \sqrt{n} + (-1)^n n$

$$a_{2n} = \sqrt{2n} + 2n \rightarrow +\infty ; a_{2n+1} = \sqrt{2n+1} - (2n+1) = \sqrt{2n+1} (1 - \sqrt{2n+1}) \rightarrow -\infty$$

Ho che $a_{2n} \rightarrow +\infty$, $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$, quindi a_n non ha limite.

Esempio 4 $a_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$

Ora oscilla il termine che non converge.

$$a_n \geq n - \sqrt{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Esempio 5 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

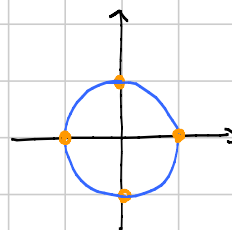
$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$$

$$a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 0, a_7 = -1$$

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

— 0 — 0 —



Stesso discorso per le funzioni

Criterio funzioni $\rightarrow$ successioni Sia $f(x)$ una funzione, e sia a_n una successione.

Supponiamo che $a_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Pongo $x = a_n$.
Quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow x_0$

Achtung! Questo funziona se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste.

Non funziona se è di tipo ④

Operativamente: se voglio dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste,

basta trovare 2 successioni $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ abbiano 2 comportamenti diversi.

[Se il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora dovrebbe essere $f(a_n) \rightarrow l$ e $f(b_n) \rightarrow l$]

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ L'idea è che il limite non esiste.

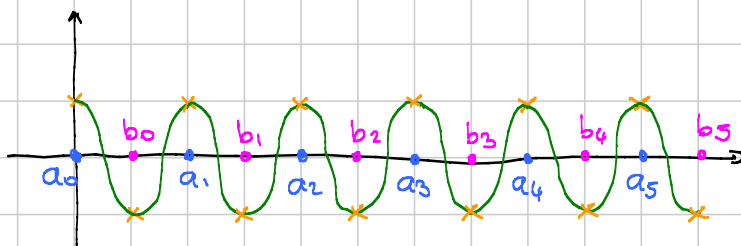
Per dimostrarlo devo trovare 2 successioni $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c. $\cos(a_n)$ e $\cos(b_n)$ abbiano comportamento diverso.

Pendo

$a_n = 2\pi n$. Allora $a_n \rightarrow +\infty$ e $\cos(a_n) = 1 \rightarrow 1$

$b_n = \pi + 2\pi n$. Allora $b_n \rightarrow +\infty$ e $\cos(b_n) = -1 \rightarrow -1$

Quindi $\cos(a_n)$ e $\cos(b_n)$ hanno limiti diversi, quindi il limite iniziale non esiste.



Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$

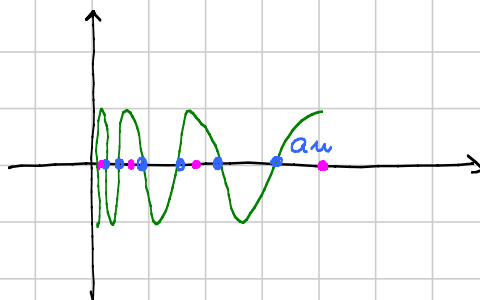
Idea: il limite non esiste.

Come dimostrarlo?

Devo trovare 2 successioni

$a_n \rightarrow 0^+$ $b_n \rightarrow 0^+$ tali che

$\sin \frac{1}{a_n}$ e $\sin \frac{1}{b_n}$ abbiano comportamenti diversi.



Scego gli a_n in modo che $\sin \frac{1}{a_n} = 0$, cioè $\frac{1}{a_n} = n\pi$, cioè

$a_n = \frac{1}{n\pi}$. È chiaro che $a_n \rightarrow 0^+$ e $\sin \frac{1}{a_n} = 0 \rightarrow 0$

Scego i b_n in modo che $\sin \frac{1}{b_n} = 1$, cioè $\frac{1}{b_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. È chiaro che $b_n \rightarrow 0^+$ e $\sin \frac{1}{b_n} = 1 \rightarrow 1$

Quindi il limite originario non esiste.

Domande da test Se $a_n \rightarrow 7$, allora $a_{2n} \rightarrow 14$

(FALSA: $a_{2n} \rightarrow 7$ perché è sottosuccessione)

Se $a_{2n} \rightarrow 7$, allora $a_n \rightarrow 7$ (FALSA: potrebbe non avere limite, ad esempio $a_n = 7 \cdot (-1)^n$)

Se $a_n \rightarrow 25$, allora $a_{n+3} \rightarrow 25$ (VERA: sottosucc !!!)

Se $a_{n+3} \rightarrow 22$, allora $a_n \rightarrow 22$ (VERA: sottosucc. giusta !!!)

Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $\cos a_n$ non ha limite (FALSA !!!)

Potrebbe ad esempio essere $a_n = 2\pi n$: in tal caso $\cos(a_n) \rightarrow 1$].

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 023

Titolo nota

09/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+3n+5} - \sqrt{n^2+1} \quad [+\infty - \infty]$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{A} - \sqrt{B} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad \text{"Rationalizzazione"}$$

Nel caso specifico

$$\sqrt{n^2+3n+5} - \sqrt{n^2+1} \cdot \frac{\sqrt{---} + \sqrt{---}}{\sqrt{---} + \sqrt{---}} = \frac{n^2+3n+5 - n^2-1}{\sqrt{n^2+3n+5} + \sqrt{n^2+1}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Finale rigoroso: raccolgo n sopra e sotto

$$\frac{n \left(3 + \frac{4}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)} \quad \text{ed il resto è banale.}$$

Esercizio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+2}} \quad \frac{+\infty - \infty}{+\infty - \infty}$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}} =$$

$$= \frac{n+1 - n-2}{3n+1 - 3n-2} \cdot \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \rightarrow \sqrt{3}$$

↑
raccolgo n dentro le radici

Achtung! $[\sqrt{A}]^2 = A$ per ogni $A \geq 0$ Per $A < 0$ non ha senso la radice

$$\sqrt{A^2} = |A| \quad \text{per ogni } A \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x \quad [+\infty - \infty]$

Pongo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - 3y + 2} - y = \lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y^2 - 3y + 2} - y) \frac{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y}{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 3y + 2 - y^2}{\sqrt{y^2 - 3y + 2} + y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{y}}{\sqrt{1 - \frac{3}{y} + \frac{2}{y^2}} + 1} = -\frac{3}{2}$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n!}}$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{(2n)!}{n! n!}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n! (n+1)n!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4$$

quindi il limite originario è 4.

Esempio 5 "Trucco del valore assoluto"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\arctan x} \cdot \cos(\text{Hoshro}) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ inquietante limitato} \right]$$

In un angolo esaminiamo la prima parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}} \cdot \boxed{\frac{x}{\arctan x}} \cdot \boxed{x} = 0$$

$y = x^2 \rightarrow \downarrow 1$ $\downarrow 1$ $\downarrow 0$

Se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \cos(\text{Hoshro}) = 0$

Perché? Solito! $-1 \leq \cos(\text{Hoshro}) \leq 1$

Se sapessi il segno di $f(x)$ basterebbe moltiplicare. Però in ogni caso

$$\boxed{-|f(x)|} \leq \boxed{f(x) \cdot \cos(\text{Hoshro})} \leq \boxed{|f(x)|}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Altro modo di vedere la stessa cosa:

$$f(x) \cdot \cos(\text{Moshro}) \leq |f(x) \cdot \cos(\text{Moshro})| = |f(x)| \cdot \underbrace{|\cos(\text{Moshro})|}_{\leq 1} \leq |f(x)|$$

$$f(x) \cdot \cos(\text{Moshro}) \geq -|f(x) \cdot \cos(\text{Moshro})| = -|f(x)| \cdot |\cos(\dots)| \geq -|f(x)|$$

Osservazione generale $-|A| \leq A \leq |A|$ per ogni $A \in \mathbb{R}$.

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n - 3^n - n^3} = 9$

$$\sqrt[n]{9^n \left(1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n^3}{9^n}\right)} = 9 \left(1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n^3}{9^n}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 9$$

$\downarrow$
 1^0

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{\log^4 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log^4 x \cdot \log(1 + \arctan x)}$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log^4 x \cdot \log(1 + \arctan x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log(1 + \arctan x)}{\arctan x}}_{\substack{\downarrow y = \arctan x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x \log^4 x}_{\substack{\downarrow \text{(Tabellina)} \\ 0}} = 0$$

Quindi il limite originario è $e^0 = 1$.

Esercizio 8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right)}_{a_n}$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} ; a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} ; a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

Non posso dire che il limite è 0 perché tutti gli addendi tendono a zero.

Posso dire che

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$$

(termine + grande della somma)
 (numero dei termini)

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = +\infty$

D'altra parte

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)$$

(addendo + piccolo)
 (Numero degli addendi)

Achtung! Il teorema algebrico della somma vale per la somma di 2 addendi, o per la somma di 2010 addendi, ma comunque per un numero FINITO e FISSO di addendi.

Negli esempi i singoli addendi tendono a 0, ma il loro numero tende a $+\infty$, quindi è un po' qualcosa del tipo $0 \cdot (+\infty)$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 024

Titolo nota

10/11/2010

Teorema delle successioni monotone

Sia a_n una successione debolmente crescente (se lo è strettamente, allora ancora meglio). Allora ci sono solo 2 possibilità:

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

(non sono possibili $a_n \rightarrow -\infty$ e a_n non ha limite)

In entrambi i casi $l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

In particolare, se la successione è limitata superiormente, allora resta solo la possibilità ①.

— o — o —

In versione decrescente: una successione a_n debolmente decrescente ha solo 2 possibilità:

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow -\infty$

In ogni caso $l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Se a_n è anche limitata inferiormente, allora resta solo la ①.

— o — o —

Domanda: se a_n è limitata (sia super., sia infer.), ma non sappiamo nulla sulla monotonia, quali possibilità ci sono? Due:

① $a_n \rightarrow l$

② a_n non ha limite.

— o — o — o —

Dim. teo. succ. monotone crescenti

Caso $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Ipotesi: $\sup = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$, esiste un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$.

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$ deve succedere che $a_n \geq M$ definitivamente.

Essendo la successione debol. crescente, appena supera M non torna più indietro.

Più formalmente:

- fisso $M \in \mathbb{R}$ a piacere
- per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $a_{n_0} \geq M$
- per monotonia sarà $\underline{a_n} \geq a_{n_0} \geq M \quad \forall n \geq n_0$, cioè definitivamente.

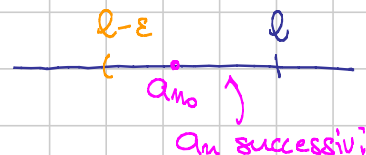
Caso $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l \in \mathbb{R}$

Voglio dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha
 $l - \varepsilon \leq a_n \leq l$ definitivamente.

Analogamente a prima:

- fisso $\varepsilon > 0$ a piacere
- per ipotesi ($\sup = l$) esiste un elemento della successione in $[l - \varepsilon, l]$, cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $l - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq l$.
- per ogni $n \geq n_0$ dovrà essere $a_n \geq a_{n_0} \geq l - \varepsilon$ per monotonia e $a_n \leq l$ perché l è il sup.

Quindi $\underline{l - \varepsilon} \leq \underline{a_n} \leq \underline{l} \quad \forall n \geq n_0$.



NUMERO e Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Perché il limite di questa esiste ed è un numero reale?

Basta dimostrare 2 cose:

- ① è limitata superiormente
- ② è debolmente crescente (anzi pure strettamente)

[Banalità: una successione debolmente crescente è PER FORZA limitata superiormente: infatti $a_n \geq a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$]

Dimostriamo che a_n (quella di sopra) è limitata superiormente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoulli}) \quad \text{che uso con } x = \frac{1}{n}$$

Dimostrazione di ②

Devo dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
cioè che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Per fare questo basta che
dimostri che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

Facciamo il conto: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; $a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

$$(1+x)^n \text{ con } x = -\frac{1}{n^2} \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\geq \left(1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right) \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

↑
Bernoulli

Confrontando il 1° e l'ultimo ho dimostrato che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, che
è quello che volevo.

In realtà ho dimostrato anche la disuguaglianza stretta non
appena $n > 1$.

— o — o —

Dim. di ①

Dimostro che $a_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo (tra
l'altro) dice che il limite è compreso tra 2 e 3.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{Applico il binomio di Newton}$$

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n$$

con $x=1$ e $y = \frac{1}{n}$. Ottengo

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \binom{n}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots$$

$$= \underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n}}_1 + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2}}_{\leq \frac{1}{2!}} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3}}_{\leq \frac{1}{3!}} + \dots$$

In ogni frazione il numeratore è + piccolo della potenza di n al denominatore, quindi

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \boxed{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

[Ho usato che $n! \geq 2^{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, disuguaglianza che si dimostra agevolmente per induzione].

Ora abbiamo una somma del tipo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Per induzione abbiamo dimostrato che

$$a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

quindi la somma fa $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

In conclusione $a_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 2} \leq 1 + 2 = 3.$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 025

Titolo nota

10/11/2010

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$ La successione 1^n è $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Cosa vuol dire che 1^∞ è una forma indeterminata? Vuol dire che se $a_n \rightarrow 1$ e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n^{b_n}$ DIPENDE, cioè bisogna vedere come sono fatte a_n e b_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = e, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = [1^\infty] = 1$$

Esercizio 2 Per ogni parametro $a \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right)$

Infatti lo scrivo come e e considero l'esponente:

$$n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \cdot a \rightarrow a$$

↓ Faccio il cambio $x = \frac{a}{n}$ e ho il limite notevole per $x \rightarrow 0$

Esercizio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + (-1)^{n!-n})^n = +\infty$

$$3 + (-1)^{n!-n} \geq 2, \text{ quindi } (3 + (-1)^{n!-n})^n \geq 2^n$$

per confronto a 2. ↓ $+\infty$ ↓ $+\infty$

Esercizio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + (-1)^{n!-n})^n$ Non esiste

Quando l'esponente: $n!-n$ è pari se n è pari e dispari se n è dispari e > 1 .

Quindi $a_{2n} = (2+1)^{2n} = 3^{2n} \rightarrow +\infty$

$a_{2n+1} = (2-1)^{2n+1} = 1^{2n+1} \rightarrow 1$

Avevamo 2 sottosucc. con comportamenti diversi, il limite iniziale non esiste.

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^3)}{\arctan x^3 \cdot \arcsin^3(2x)} = \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(x^3)}{\arctan(x^3) \cdot \arcsin^3(2x)} &= \frac{\sin^2(x^3)}{(x^3)^2} \cdot \frac{x^3}{\arctan(x^3)} \cdot \frac{x^3}{\arcsin^3(2x)} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)^2}_1 \cdot \underbrace{\frac{x^3}{\arctan(x^3)}}_1 \cdot \underbrace{\left[\frac{2x}{\arcsin(2x)}\right]^3}_1 \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Esercizio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3+6n^2-1} - \sqrt[3]{n^3+7}$

Cosa NON FARE $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = A - B$ NO!!!!

$$(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}) = A - B$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Razionalizzo

$$(\sqrt[3]{n^3+6n^2-1} - \sqrt[3]{n^3+7}) \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)(n^3+7)} + \sqrt[3]{(n^3+7)^2}}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)(n^3+7)} + \sqrt[3]{(n^3+7)^2}} =$$

$$\frac{\cancel{n^3} + 6n^2 - 1 - \cancel{n^3} - 7}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)(n^3+7)} + \sqrt[3]{(n^3+7)^2}}$$

Brutalmente: Numeratore $\sim 6n^2$

Denominatore $\sim \sqrt[3]{n^6} + \sqrt[3]{n^6} + \sqrt[3]{n^6} = 3n^2$

$$\frac{6n^2}{3n^2} = 2$$

Per renderlo rigoroso, basta raccogliere la potenza giusta. — o — o —

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} = \frac{2}{5}$

BRUTALE: $\frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} \sim \frac{\log x^2}{\log x^5} = \frac{2 \log x}{5 \log x} \rightarrow \frac{2}{5}$

Rigoroso: raccordo x^2 dentro i logaritmi

$$\frac{\log(x^2+3)}{\log(x^5+7)} = \frac{\log[x^2(1+\frac{3}{x^2})]}{\log[x^5(1+\frac{7}{x^5})]} = \frac{2 \log x + \log(1+\frac{3}{x^2})}{5 \log x + \log(1+\frac{7}{x^5})}$$

$$= \frac{\cancel{\log x} \left[2 + \frac{\log(1+\frac{3}{x^2})}{\log x} \right]}{\cancel{\log x} \left[5 + \frac{\log(\quad)}{\log x} \right]} \rightarrow \frac{2}{5}$$

$\left[\frac{0}{\infty} \right] = 0$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \{ \log(x^2+x+1) - \log(x^2+7) \}$

Proprietà dei logaritmi: $x \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+7}\right) =$

$$x \log\left(1 + \frac{x^2+x+1}{x^2+7} - 1\right) = x \log\left(1 + \frac{x^2+x+1 - x^2-7}{x^2+7}\right)$$

$$= x \log\left(1 + \frac{x-6}{x^2+7}\right) =$$

$$= \boxed{x} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{x-6}{x^2+7}\right)}{\frac{x-6}{x^2+7}} \cdot \frac{x-6}{x^2+7} \rightarrow 1.$$

↓ Motivo: $y = \frac{x-6}{x^2+7} \rightarrow 0$
 1 quindi è il solito limite notevole

Esercizio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(3x)) + \arctan^3(x^4) \cdot e^{\sin x} + \arcsin(\tan(2x))}{\sqrt{1+x} - \cos x} = 10$$

Raccolgo x sopra e sotto

$$\frac{\log(1 + \sin(3x))}{x} = \frac{\log(1 + \sin(3x))}{\sin(3x)} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 3

$$\frac{\arcsin(\tan(2x))}{x} = \frac{\arcsin(\tan(2x))}{\tan(2x)} \cdot \frac{\tan(2x)}{2x} \cdot 2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 2

$$\frac{\arctan^3(x^4) \cdot e^{\sin x}}{x} \rightarrow 0 \quad (\text{Moltiplicare e dividere per } x^{12})$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1 + 1 - \cos x}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x + \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x + \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$\text{Quindi: } \frac{\text{Num}}{x} \rightarrow 3 + 0 + 2 = 5 \quad \frac{\text{Den}}{x} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\text{Quindi } \frac{\text{Num}}{\text{Den}} \rightarrow 10.$$

ANALISI MATEMATICA I - ORA 026

Titolo nota

11/11/2010

o piccolo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni. Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (punto in cui fare un limite). Si dice che $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w(x)$ tale che

$$(i) \quad f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Brutalmente: $f(x)$ è uguale a $g(x)$ per qualcosa che tende a zero

Modo quasi equivalente di dire la stessa cosa. Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè che $g(x)$ sia $\neq 0$ vicino al punto x_0 , tranne al più in x_0 stesso. Allora

$$(i) \text{ diventa } w(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad (ii) \text{ diventa } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Brutalmente: supporre che $f(x)$ e $g(x)$ tendano a 0 per $x \rightarrow x_0$, dire che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che "f(x) batte g(x)" o che "f(x) tende a 0 più velocemente di g(x)".

Esempio 1 $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$. Quindi $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = x$
Devo scrivere $f(x) = g(x) \cdot w(x)$

$$\boxed{\sin x^2} = \boxed{x} \cdot \boxed{\frac{\sin x^2}{x}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$

Devo verificare la (ii), cioè $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \boxed{x} = 0$

In questo caso posso usare anche la definizione quasi equivalente (cioè dividendo per x che è $\neq 0$ in un intorno di 0 , escluso il p.to stesso). La verifica diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \text{limite di prima} = 0.$$

Esempio 2 $\arctan x = o(\sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$

Faccio la verifica con la definizione quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow 0} = 0$$

Esempio 3 $\frac{1}{x^3} = o\left(\frac{1}{x^5}\right)$ per $x \rightarrow 0^+$

Faccio la verifica con il 1° metodo:

$$\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{x^5}}_{g(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{w(x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Posso fare la stessa verifica anche dividendo

— 0 — 0 — 0 —

Proprietà di o piccolo Sia dato $f_1(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$
 $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Questo vuol dire che:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x) \cdot w_1(x) & \text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= g(x) \cdot w_2(x) & \text{" } \lim_{x \rightarrow x_0} w_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Somma $f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) + w_2(x)\}}_{w_3(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \{w_1(x) + w_2(x)\} = 0 + 0 = 0$$

Quindi $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

$$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

Differenza $f_1(x) - f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) - w_2(x)\}}_{w_4(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_4(x) = 0$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

Prodotto $f_1(x) \cdot f_2(x) = [g(x)]^2 \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_5(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_5(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) \cdot w_2(x) = 0 \cdot 0 = 0 \quad o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

Quoziente Supponiamo di poter dividere per $f_2(x)$. Allora

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot w_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}$$

Questa è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi non posso dire nulla

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{Nulla di furbo}$$

Brutalmente: $f_1(x)$ batte $g(x)$, $f_2(x)$ batte $g(x)$, e questo non mi dice chi vince tra $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Transitività Supponiamo $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$
 $g(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Allora $f(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Infatti

$$f(x) = g(x) \cdot w_1(x)$$

$$g(x) = R(x) \cdot w_2(x)$$

Ma allora

$$f(x) = g(x) \cdot w_1(x) = R(x) \cdot \underbrace{w_2(x) \cdot w_1(x)}_{w_3(x)}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = 0 \cdot 0 = 0, \text{ quindi } f(x) = o(R(x))$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

SVILUPPINI

$\sin x = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

per $x \rightarrow 0$

$\operatorname{arctan} x = x + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\arcsin x = x + o(x)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

Sono la traduzione in termini di o piccolo dei limiti notevoli. **$\sin x = x + o(x)$** cioè $\sin x - x = o(x)$, Verifico dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

La verifica è analoga per $\tan x$, $\operatorname{arctan} x$, $\arcsin x$. **$e^x = 1 + x + o(x)$** cioè $e^x - 1 - x = o(x)$, cioè dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ cioè $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, cioè divid.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ cioè $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = o(x)$, cioè dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x + x - x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

 $\cos x = 1 + o(x)$ cioè $\cos x - 1 = o(x)$, perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot x} = 0$

Altro modo di vederlo

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x).$$

Esempio 1 $3 \sin(4x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

1° modo: $3 \sin(4x^2) = \frac{3 \sin(4x^2)}{x} \cdot x$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x)$ $w(x)$ $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(4x^2)}{4x^2} \cdot 4x = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 3 0

2° modo: dividendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(4x^2)}{x} = 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3 \arctan x}{e^x - 1}$

Modo tradizionale: divido sopra e sotto per x

$$\frac{\frac{\sin x}{x} + 3 \frac{\arctan x}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}} \rightarrow \frac{1+3}{1} = 4$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Modo o piccolo: sostituisco gli sviluppi

$$\frac{\sin x + 3 \arctan x}{e^x - 1} = \frac{\overbrace{x+o(x)}^{\sin x} + \overbrace{3x+o(x)}^{3 \arctan x}}{\underbrace{1+x+o(x)}_{e^x} - 1} =$$

$$= \frac{4x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow 4$$

$\downarrow$
 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + x + o(x) - (\cancel{1} + o(x))}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1,$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 - \arctan^2 x}{\arcsin(4x)} = \frac{3}{4}$

Sviluppo tutto per bene (usando gli sviluppi dove serve)

$$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$\arcsin(4x) = 4x + o(4x) = 4x + o(x)$$

$$x^2 = o(x) \quad [x^2 = x \cdot x]$$

$$\arctan^2 x = o(x) \quad \text{lo vediamo in 2 modi}$$

1° modo: dividendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot x$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 0

2° modo: parto dallo sviluppo $\arctan x = x + o(x)$. Elevo al quadrato $\arctan^2 x = [x + o(x)]^2$

$$= x^2 + 2x o(x) + [o(x)]^2$$

$$= x^2 + o(x) + o(x)$$

$$= x^2 + o(x)$$

$$2x o(x) = 2x \cdot x \cdot \omega(x) = x \{ 2x \omega(x) \}$$

$\omega_1(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$

$$[o(x)]^2 = [x \cdot \omega(x)]^2 = x \cdot x \omega^2(x)$$

$\omega_2(x) \rightarrow 0 \cdot 0^2 = 0$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x + \sin^3(2x)}{\log(1+2x^2)} = \frac{3}{4}$

Sviluppo tutto pensando ad $o(x^2)$

$$\begin{aligned} \log(1+2x^2) &= 2x^2 + o(2x^2) \\ &= 2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin^3(2x) = o(x^2) \quad \text{volendo si verifica dividendo o elevando al cubo lo sviluppo di sin.}$$

$$\frac{e^{x^2} - \cos x + \sin^3(2x)}{\log(1+2x^2)} = \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - o(x^2) + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \sin(\tan x) - \cos(7x)}{\arctan(\log(1+3x))} = \frac{2}{3}$

$$\cos(7x) = 1 + o(7x) = 1 + o(x)$$

$$\log(1+3x) = 3x + o(x)$$

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\sin(\tan x) = \tan x + o(\tan x)$$

$$\sin y = y + o(y)$$

$$= x + o(x) + o(x + o(x))$$

$$= x + o(x) + o(x) + o(o(x)) = x + o(x)$$

Oppure all'antica: dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1$$

$$e^{\arctan x} = 1 + \arctan x + o(\arctan x)$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$= 1 + x + o(x) + o(x)$$

$$= 1 + x + o(x)$$

Conclusione

$$\frac{\text{Num}}{\text{Den}} = \frac{\cancel{1}x + x - \cancel{1} + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{2x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x} \right)}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 028

Titolo nota

13/11/2010

DERIVATE Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

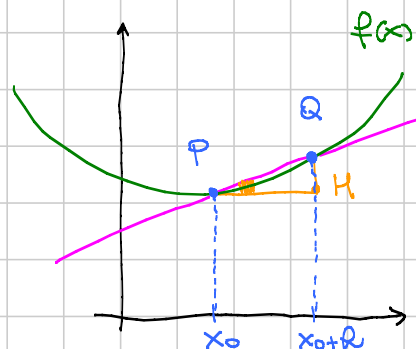
Rapporto incrementale Si definisce come

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{dove } h \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x_0+h) - f(x_0) & \text{è l'incremento della variabile } y & = & QH \\ (x_0+h) - x_0 & \text{" " " " " " } x & = & PH \end{array}$$

Significato geometrico

$$\begin{aligned} \text{Rapp. increm.} &= \frac{QH}{PH} = \tan \hat{QPH} \\ &= \text{coeff. angolare retta PQ} \end{aligned}$$



Definizione di derivata.

Si dice che $f(x)$ è derivabile in $x = x_0$ se esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si dice derivata di f nel punto x_0 e si indica in uno dei seguenti modi:

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \dot{f}(x_0) \quad f^{(1)}(x_0)$$

Significato geometrico.

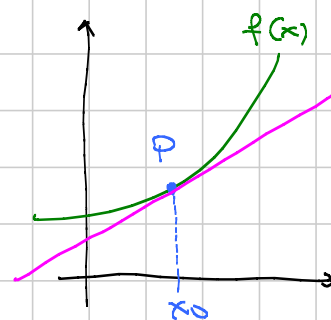
$$\begin{array}{ccc} \text{Rapp. increm.} & = & \text{coeff. angolare retta PQ} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'(x_0) & & \text{coeff. angolare retta tangente al grafico in P} \end{array}$$

Eq. retta tangente ad un grafico.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

valore
per $x = x_0$

coeff. angolare



Derivata e o piccolo Una funzione è derivabile in un punto x_0 con derivata $f'(x_0)$ se e solo se

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Dim. Supponiamo che esista la derivata come limite del rapp. ind. e verifichiamo la formula con o piccolo, cioè

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)$$

Uso def. quasi equivalente, cioè divido per h e faccio il lim:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)}_{f'(x_0)} \right]$$

Viceversa, supponiamo che valga la formula con o piccolo e dimostriamo che il limite del rapp. ind. esiste e vale proprio $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + f'(x_0)h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f'(x_0) + \frac{o(h)}{h} \right] = f'(x_0) \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Conseguenza: ci sono due modi per calcolare una derivata

① Fare il limite del rapporto incrementale

② Ottenere uno sviluppo tipo $f(x_0 + h) = f(x_0) + \boxed{A}h + o(h)$

↓
derivata

— 0 — 0 —

Interpretazione geometrica formula con o piccolo

$$AQ = f(x_0 + R)$$

$$AB = f(x_0)$$

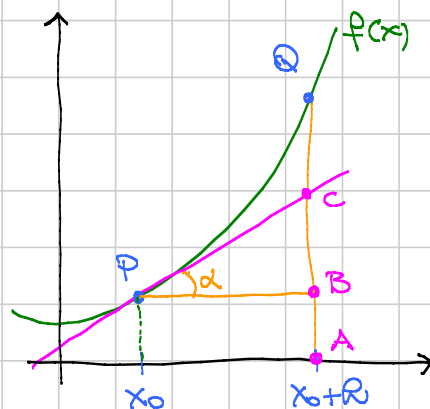
Voglio calcolare BC. Per farlo studio il triangolo rettangolo PCB.

$$\frac{CB}{PB} = \tan \alpha = f'(x_0)$$

$$CB = PB \cdot f'(x_0) = R \cdot f'(x_0)$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot R + o(R)$$

$$AQ = AB + BC + CQ$$



Quando $R \rightarrow 0$, cosa succede ai 3 segmenti a destra?

- AB resta sempre lo stesso
- BC si riduce proporzionalmente (linearmente) ad R (se R si divide per 10, anche BC si divide per 10).
- CQ si riduce in maniera più forte rispetto ad R, cioè $o(R)$.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo: $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(x_0 + R)^2 - x_0^2}{R}$

$$= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0R + \cancel{R^2} - x_0^2}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} (2x_0 + R) = 2x_0 = f'(x_0)$$

2° modo: $f(x_0 + R) = (x_0 + R)^2 = \boxed{x_0^2} + \boxed{2x_0R} + \boxed{R^2}$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $f(x_0) + f'(x_0)R + o(R)$

Esempio 2 $f(x) = e^x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$

$\downarrow$
 1

2° modo $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h =$ (uso sviluppi)
 $= e^{x_0} (1 + h + o(h))$
 $= \underline{e^{x_0}} + \underline{e^{x_0} \cdot h} + o(h)$
 $f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x_0$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $-\frac{1}{2}$ 0 1

2° modo $f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$
 $= \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$ (uso sviluppi)
 $= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$
 $= \sin x_0 + o(h) + \cos x_0 \cdot h + o(h)$
 $= \underline{\sin x_0} + \underline{\cos x_0 \cdot h} + \underline{o(h)}$
 $f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$

$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$
 $\quad \quad \quad$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 029

Titolo nota

13/11/2010

Regole algebriche per il calcolo di derivate

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad (\lambda \text{ numero})$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della somma $f(x)$ e $g(x)$ date, $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1° modo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2° modo So per ipotesi che f e g sono derivabili, dunque

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)h + o(h) \end{aligned}$$

Sommo e ottengo

$$\begin{aligned} f(x_0+h) + g(x_0+h) &= f(x_0) + g(x_0) + [f'(x_0) + g'(x_0)]h + o(h) \\ \underbrace{}_{\varphi(x_0+h)} &= \underbrace{}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{}_{\varphi'(x_0) \cdot h} + o(h) \end{aligned}$$

La differenza è uguale alla somma...

Derivata del prodotto $P(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{1° modo} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0+h) - P(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\downarrow f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{\downarrow g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} \right] \\
 &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)
 \end{aligned}$$

Parenfesi Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 , cioè
 $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

$$\text{Dim. } f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\downarrow 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow f(x_0)}$$

Quindi $f(x_0+h) \rightarrow f(x_0)$ quando $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{2° modo di fare il prodotto} \quad f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \\
 g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)
 \end{aligned}$$

Moltiplico:

$$\underbrace{f(x_0+h)g(x_0+h)}_{\downarrow P(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0)g(x_0)}_{\downarrow P(x_0)} + \underbrace{[f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]}_{\downarrow P'(x_0)}h + \underbrace{o(h)}_{\downarrow o(h)}$$

Commento sui termini restanti: $h \cdot o(h) = h \cdot \underbrace{h \omega(h)}_{\omega(h) \rightarrow 0} = o(h)$

$$o(h) \cdot o(h) = h \cdot \underbrace{\omega_1(h) \cdot h \omega_2(h)}_{\omega_3(h) \rightarrow 0 \cdot 0 \cdot 0} = o(h)$$

Derivata di $\frac{1}{f}$ Chiamo $Q(x) = \frac{1}{f(x)}$

Con il rapporto incrementale $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x_0+h) - Q(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h f(x_0+h) f(x_0)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \right) \left(\underbrace{\frac{-1}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}_{-\frac{1}{[f(x_0)]^2}} \right)$$

— 0 — 0 —

Derivata di $\frac{f}{g}$ Basta scrivere

$$\left[\frac{f}{g} \right]' = \left[f \cdot \frac{1}{g} \right]' = \text{(applico regola prodotto)}$$

$$= f' \cdot \left[\frac{1}{g} \right] + f \cdot \left[\frac{1}{g} \right]' = \text{(applico regola deriv. quoziente)}$$

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

— 0 — 0 —

Commento su derivata composizione: $C(x) = f(g(x))$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x_0+h) - C(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right]$$

$\downarrow f'(g(x_0))$
 $\downarrow g'(x_0)$

Per calcolare il 1° limite posso $k = g(x_0+h) - g(x_0)$

Quando $h \rightarrow 0$ ho che $k \rightarrow 0$. Il limite diventa

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0) + k) - f(g(x_0))}{k} = f'(g(x_0))$$

La dimostrazione non è rigorosa perché quando abbiamo moltiplicato e diviso per $g(x_0+h) - g(x_0)$ non c'era ragione perché fosse $\neq 0$.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $f(x) = \cos x$ $x_0 \in \mathbb{R}$

2° modo $f(x_0+h) = \cos(x_0+h)$

$$= \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h \quad (\text{sviluppi})$$

$$= \cos x_0 (1+o(h)) - \sin x_0 (h+o(h))$$

$$= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} - \underbrace{\sin x_0 \cdot h}_{f'(x_0) \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

Esempio 2 $f(x) = \log x$ $x_0 > 0$

2° modo $f(x_0+h) = \log(x_0+h)$

$$= \log \left[x_0 \left(1 + \frac{h}{x_0} \right) \right]$$

$$= \log x_0 + \log \left(1 + \frac{h}{x_0} \right) \quad (\text{sviluppiamo } \log(1+y) = y + o(y))$$

$$= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{x_0} \cdot h}_{f'(x_0) \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

Esercizio: fare 2 esempi stile "2° modo".

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 030

Titolo nota

13/11/2010

Derivata della funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione e
sia $g(x)$ la sua inversa. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

Allora
$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}$$

Ragionamento che la rende plausibile. Se g è l'inversa di f ,
allora

$$f(g(x)) = x$$

(definizione di inversa)

Derivo a destra e sinistra

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \text{da cui} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Nota bene: ho calcolato la derivata della composizione facendo
finta che g sia derivabile, cosa che andrebbe dimostrata.

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$ $f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = [\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

Deriv. quoziente

$$= \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

questa si può scrivere come

$$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[\tan x]' = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Esempio 3 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$

$$[\arctan x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2 g(x)}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ho usato che $\tan(\arctan x) = x$, la quale è vera $\forall x \in \mathbb{R}$
(Osservazione: $\arctan(\tan x) = x$ è vera $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Esempio 4 $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ $g(x) = \arcsin x$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Due passaggi "loschi":

- ① $\sin(\arcsin x) = x$ vale per $x \in [-1, 1]$, ma è proprio lì che voglio calcolare la derivata.
- ② $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ vale solo quando $\cos \alpha > 0$, cioè quando $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Io l'ho applicata con $\alpha = \arcsin x$, che fortunatamente sta in quell'intervallo.
- ③ Il denominatore $\sqrt{1 - x^2}$ si annulla per $x = \pm 1$. In quei punti $\arcsin x$ non è derivabile. Quindi

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1)$$

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, commentando per bene i passaggi "loschi".

— 0 — 0 —

Achtung! Abbiamo visto f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
 NON VALE il viceversa, cioè
 f può essere continua ma non derivabile in x_0 !!!

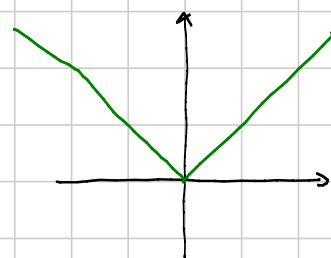
Esempio 1 $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$ È chiaramente continua.
 Provo a calcolare la derivata per $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{questo limite non esiste perché}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Graficamente: in 0 c'è un "angolo"
 con tangente $y = x$ a 0^+
 e $y = -x$ a 0^- .



Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 0$ Provo a calcolare
 $f'(x_0)$. Devo fare

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Nota bene: $\sqrt{x}$ è continua in $x=0$.

Nell'origine la retta tangente al grafico è verticale.

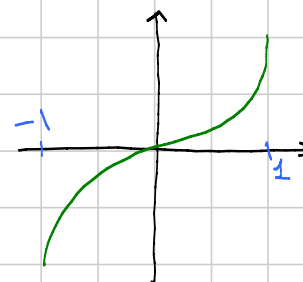


Esempio 3 $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin x$ è continua in $[-1, 1]$

$\arcsin x$ è derivabile in $(-1, 1)$.

In $x = \pm 1$ la retta tangente al grafico è verticale



Esempio 4 $f(x) = x|\sin x|$ È derivabile in $x_0 = 0$?

Faccio il rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|\sin h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |\sin h| = 0 \Rightarrow f(x) \text{ è derivabile in } x=0$$

Proviamo in $x_0 = \pi$. Calcolo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi+h) \overbrace{|\sin(\pi+h)|}^{-\sin h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\pi+h) \frac{|\sin h|}{h} \text{ e questo non esiste, perché per } h \rightarrow 0^+ \text{ tende a } \pi, \text{ per } h \rightarrow 0^- \text{ tende a } -\pi$$

$$[\sin x]' = \cos \quad [\cos x]' = -\sin x \quad [\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$[e^x] = e^x \quad [\log x] = \frac{1}{x} \quad [\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[x^n]' = n x^{n-1} \quad (\text{visto per } n=2, \text{ in generale si dimostra per induzione usando regola del prodotto } x^{n+1} = x \cdot x^n)$$

$$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ per } \alpha \text{ reale qualunque (anche negativo)}$$

$$[x^\alpha]' = [e^{\alpha \log x}]' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Esercizio $f(x) = [\cos x]^{\sin x}$

$$f'(x) = [e^{\sin x \cdot \log(\cos x)}]' = e^{\sin x \cdot \log(\cos x)} \cdot [\sin x \cdot \log(\cos x)]' =$$

$$= [\cos x]^{\sin x} [(\sin x)' \cdot \log(\cos x) + \sin x \cdot (\log(\cos x))'] =$$

$$= [\cos x]^{\sin x} [\cos x \cdot \log(\cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x)]$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 031

Titolo nota

16/11/2010

Derivate successive Data $f(x)$, se questa è derivabile posso calcolarne $f'(x)$. Se questa a sua volta è derivabile posso calcolarne la sua derivata, che è detta derivata seconda di $f(x)$, e così via.

La derivata k -esima si indica in uno di questi modi

$$f^{(k)}(x_0) \quad \frac{d^k f}{dx^k}(x_0).$$

Teorema di De L'Hôpital Supponiamo di dover calcolare
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{con } x_0 \in \bar{\mathbb{R}})$

Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi

- ① un po' di burocrazia,
- ② il limite proposto è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
- ③ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{tipo } \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \text{ ma NON } \boxed{4})$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (stesso l).

Utilizzo operativo

- Devo calcolare il limite di un rapporto, ma non lo so fare perché è una forma indeterminata.
- Provo a calcolare il limite del rapporto tra le derivate
- Se questo riesce, allora il limite iniziale è lo stesso.
- Se questo non riesce perché è ancora una forma indeterminata, allora posso **REITERARE** il procedimento e provare a calcolare il limite del rapporto tra le derivate seconde, e così via.

Ipotesi burocratiche: $f(x)$ e $g(x)$ devono essere definite almeno "vicino" ad x_0 , devo poter dividere per $g(x)$, devo poter calcolare $f'(x)$ e $g'(x)$, devo poter dividere per $g'(x)$.

Achtung! Non si può applicare il teo. di De L'Hôpital

① quando la forma indeterminata NON è del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\infty}{\infty}$,

② quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ non esiste}$$

In questo caso non bisogna concludere che il limite iniziale non esiste, ma dipende dai casi (cioè BOM).

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$



NO! Non era una forma indeterminata, quindi non posso applicarlo.

Correttamente: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3x + 1} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}, \text{ quindi forma indet.} \right]$

(Hôp) $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos x \right)$ NON ESISTE

Posso dedurre che il limite iniziale non esiste? NO! Il teo. di De L'Hôpital non vale nei casi di non esistenza.

Correttamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(3 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{3}$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \left[\frac{0}{0} \text{ forma indeterminata} \right]$

Metodo classico: raccolgo x

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} - 1 + x^4 \right)}{x^3} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \rightarrow 0$$

NO!!! LIMITE METÀ PER VOLTA !!!

Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 5x^4}{3x^2} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 20x^3}{6x} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 60x^2}{6} = -\frac{1}{6}$$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ È lecito farlo con Hôpital?

NI: le ipotesi sono verificate, quindi in un certo senso SI.
 Però per dimostrare che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ abbiamo già usato questo limite notevole, quindi NO.

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $[= +\infty \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Oss. Si può usare Hôpital per fare limiti di successioni?

NI: burocraticamente NO, ma posso passare alle funzioni e sperare nel criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ $[\frac{0}{0}]$ Occhio alle derivate

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} (-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{0}{0}, \text{ ma Hôpital peggiorerebbe solo le cose} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Osservazioni

- ① Hôpital è scomodo perché bisogna fare le derivate...
- ② Hôpital può essere usato su un "pezzo del limite", ad esempio su uno dei fattori di un prodotto enorme.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 032

Titolo nota

16/11/2010

Formula di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione. Sia $n \in \mathbb{N}$.
Allora sotto certe ipotesi esiste un unico
polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \overset{\text{resto}}{O(x^n)} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO (il resto è
o piccolo)

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Formula per i polinomi di Taylor.

Polinomi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Osservazione

Funzione dispari =
solo potenze dispari

Funzione pari =
solo potenze pari

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

(come il binomio di Newton, solo con α reale qualunque e non solo intero). Se α è intero positivo, i coefficienti diventano uguali a zero dopo un po'.

Casi particolari: $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots$$

Esercizio: provare il caso $\alpha = \frac{1}{2}$, cioè $\sqrt{1+x}$.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3}$ Guardando il denominatore uso Taylor di ordine $n=3$

$$\sin x = P_3(x) + o(x^3) = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$x^5 = o(x^3)$$

Sostituisco lo sviluppo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - x + x^5}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{x^2} - 1)}{\arctan x - \sin x}$ Mi fido con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Denominatore} = \arctan x - \sin x = x - \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{x(e^{x^2} - 1)}{\arctan x - \sin x} = \frac{x(e^{x^2} - 1)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} \rightarrow -6.$$

Verifica degli sviluppi delle funzioni elementari

$f(x) = e^x$ Calcolo le derivate successive $f^{(k)}(x) = e^x$,
quindi $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.
Quindi il termine k -esimo dello sviluppo è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{k!} x^k$$

$f(x) = \sin x$

$f^{(0)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(x) = \sin x$
$f^{(1)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(x) = \cos x$
$f^{(2)}(x) = -\sin x$	$\vdots$
$f^{(3)}(x) = -\cos x$	$\dots f^{(2010)}(x) = -\sin x$

Quando vado a calcolare per $x=0$ trovo

$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

Quindi il coefficiente di x^k nello sviluppo sarà $\frac{1}{k!}$ moltiplicato per 0 se k è pari e per ± 1 alternato se k è dispari

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{0}{6!} x^6 + \frac{(-1)}{7!} x^7 + \dots$$

— 0 — 0 —

$f(x) = \cos x$

$f^{(0)}(x) = \cos x$	e così via.
$f^{(1)}(x) = -\sin x$	
$f^{(2)}(x) = -\cos x$	
$f^{(3)}(x) = \sin x$	

Quando metto $x=0$ trovo la successione $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$
cioè 0 sui dispari e ± 1 alternati sui pari.

— 0 — 0 —

$f(x) = \log(1+x)$ Devo trovare una formula per la derivata k -esima.

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

In generale sembra venire

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Data per buona la formula, arriviamo che il termine k -esimo del polinomio è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k+1} \cancel{(k-1)!}}{k \cancel{(k-1)!}} x^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Come si dimostra la formula per la derivata k -esima?

INDUZIONE !!!

Passo base $k=1$: facile verifica

Passo induttivo : Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$$\begin{aligned} \text{Derivo: } f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} (k-1)! \cdot (-k) \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2} k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \end{aligned}$$

e questa è esattamente la tesi del passo induttivo, cioè la stessa formula con $(k+1)$ al posto di k .

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 033

Titolo nota

16/11/2010

Esempio 1 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x)$

VERA MA INUTILE il termine
in x^3

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^2)$

"

$\sin x = \underbrace{x - \frac{1}{6}x^3}_{P_3(x)} + o(x^3)$

VERA: TAYLOR con $n=3$

$\sin x = \underbrace{x - \frac{1}{6}x^3}_{P_4(x)} + o(x^4)$

VERA: TAYLOR con $n=4$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$

FALSA: ci sarebbe il termine
con x^5

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \underbrace{x^3}_{o(x^3)} + o(x^3)$

VERA perché x^3 scompare
dentro $o(x^3)$ e ciò che
resta è Taylor di ordine 3.

Si possono calcolare i polinomi di Taylor senza calcolare tutte le derivate successive.

Esempio 2 $f(x) = e^x + \cos x$ $n=3$.

Uso i polinomi per e^x e per $\cos x$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

Allora

$$\begin{aligned} f(x) = e^x + \cos x &= 1 + x + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + 1 - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x^3) \\ &= 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor della somma o differenza si ottiene facendo somma o diff. dei polinomi di Taylor

Esempio 3 $f(x) = \cos x \cdot \arctan x$ $n = 4$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\cos x \cdot \arctan x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^4)$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x - \cos x \cdot \arctan x - 2}{\sin x - x}$

Dagli esempi precedenti sappiamo che

$$e^x + \cos x = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x \cdot \arctan x = x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Numeratore} = 2 + \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + \frac{5}{6}x^3 - 2 + o(x^4) + o(x^3)$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Denominatore} = \sin x - x = \cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{x} = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{\text{Numeratore}}{\text{Denominatore}} = \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3} \left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^3} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)} \rightarrow -6.$$

Osservazioni: lo "scontro finale" è avvenuto all'ordine 3.

"Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se lo scontro è di ordine 1."

Se lo scontro finale è di ordine k , servirebbero k passaggi di Hôpital.

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\log(1+x) - \arctan x}$

Provo a fermarmi all'ordine 1: $e^x = 1 + x + o(x)$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

Numeratore: $e^x - 1 - \sin x = \cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} + o(x) = o(x)$

Denominatore: $\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} = o(x)$

Frazione = $\frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$ (Chi si ferma troppo presto ottiene BOH)

Provo a fermarmi all'ordine 3: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Numeratore: $\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \cancel{1} + \cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Denominatore: $\cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

Frazione = $\frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2 \cdot x} \right)}{\cancel{x^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2 \cdot x} \right)} \rightarrow -1$

Chi si ferma troppo tardi fa tanti conti per nulla.

Esempio 6 $f(x) = e^{\sin x}$ $n = 4$

Penso di porre $y = \sin x$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

quindi $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$

Ora al posto di $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo di ordine 4.

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

↑
Doppio prodotto
tra x e $-\frac{1}{6}x^3$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

È lecito dire che $o(\sin^4 x) = o(x^4)$?

$$o(\sin^4 x) = \sin^4 x \cdot \omega(\sin x) = x^4 \frac{\sin^4 x}{x^4} \omega(\sin x) = o(x^4)$$

$\omega(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

Altro modo più raffinato di vederlo: $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$, quindi

$$o(\sin^4 x) = o(x^4 + o(x^4)) = o(x^4) + o(o(x^4)) \\ = o(x^4) + o(x^4) \\ = o(x^4)$$

Giustificare e capire i passaggi !!!

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 034

Titolo nota

17/11/2010

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà di simmetria

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \quad \sinh x \text{ è DISPARI}$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \cosh x \text{ è PARI}$$

NON sono funzioni periodiche, anzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \quad (\text{è dispari} \dots)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

Derivate $(\sinh x)' = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Sviluppi di Taylor

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Faccendo la differenza degli sviluppi, restano solo i termini di grado dispari

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

↑
metto -x al posto di x

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Analogamente $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

Sommando gli sviluppi di $\sinh x$ e $\cosh x$ si ottiene lo sviluppo di e^x .
Questo non sorprende perché

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2}$$

↑
Differenza di quadrati

$$= 2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \cosh x \cdot \sinh x$$

Analogia alla formula di duplicazione di $\sin x$.

Per esercizio: trovare formula di duplicazione del $\cosh$, cioè $\cosh(2x)$.
Scrivila nelle forme simili a

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sinh^2 x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

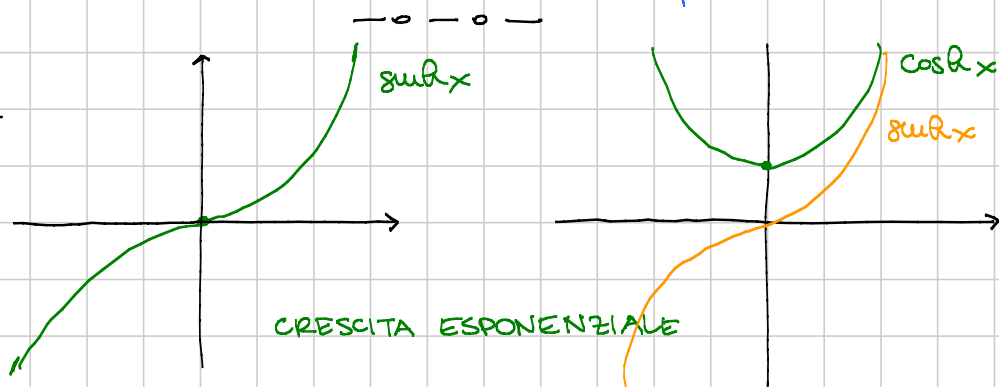
$$\cosh^2 x = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2 = \dots = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

N.B.: $x^2 - y^2 = 1$ è
un'iperbole.

Grafici



Osservazione $\sinh x < \cosh x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (basta sostituire)

Funzioni inverse $f(x) = \sinh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile. La funzione inversa è una $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \text{settsinh } x$$

$\uparrow$ settsinh

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva. Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile. L'inversa è una $g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ detta

$$g(x) = \text{settcosh } x.$$


Esistono formule per $\text{settsinh } x$ e $\text{settcosh } x$.

Troviamo la formula per il $\text{settcosh } x$. Scrivo $\cosh x = y$ e punto a ricavare x in funzione di y . Devo risolvere

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y; \quad e^x + e^{-x} = 2y. \quad \text{Pongo } A = e^x. \quad \text{L'eq. diventa}$$

$$A + \frac{1}{A} = 2y, \quad \text{cioè } A^2 + 1 = 2yA, \quad \text{cioè } A^2 - 2yA + 1 = 0$$

Calcolo A :

$$A_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Tornando in x ottengo

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$\uparrow$ per ipotesi ho che $y \geq 1$, quindi nessun problema con la radice.

Otengo quindi 2 soluzioni

$$x_1 = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$x_2 = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$$

Non c'è problema con l'argomento dei logaritmi perché

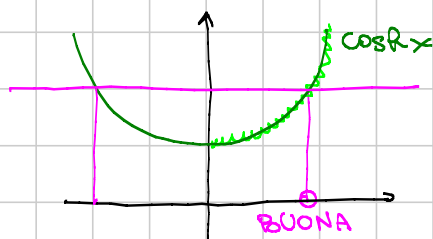
$$y + \sqrt{y^2 - 1} > 0 \text{ abbondantemente e } y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \text{ perché}$$

$$y = \sqrt{y^2} > \sqrt{y^2 - 1} \text{ (tutta roba positiva)}$$

Delle 2 soluzioni, quella buona è la più grande

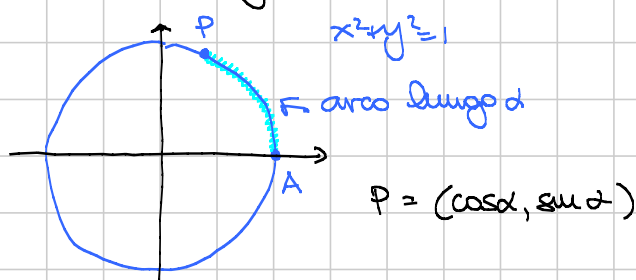
Quindi

$$\operatorname{Sett} \cosh y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

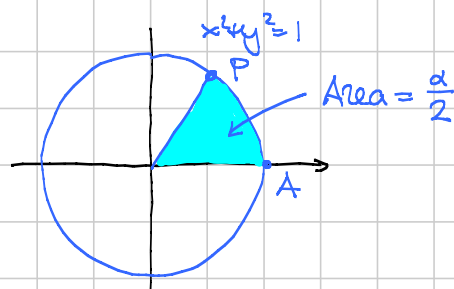


Esercizio Fare gli stessi conti per $\operatorname{settsin} x$, commentando i vari passaggi di precorso — — —

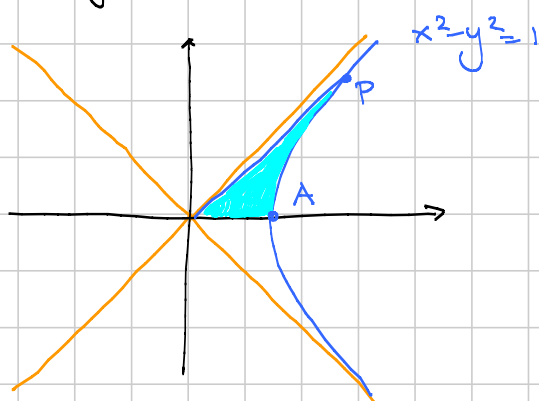
Interpretazione geometrica



trigonometria via arco



trigonometria via settore



Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste un punto P unico sull'iperbole per cui il settore ha area $\frac{\alpha}{2}$.

Tale punto $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$

Interpretazione fisica. I fili sospesi tra pali (anche di altezza diversa) si dispongono secondo un $\cosh$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 035

Titolo nota

17/11/2010

Sviluppi di composizioni

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(3x)$$

$$n=6$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$$

Al posto di x metto $(3x)$: $\sin(3x) = 3x - \frac{1}{6} \cdot 27x^3 + \frac{1}{120} 3^5 x^5 + o((3x)^6)$

$$= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$o((3x)^6) = 3^6 x^6 \omega(3x) = x^6 \cdot \underbrace{3^6 \omega(3x)}_{\omega_1(x)} = x^6 \cdot \underbrace{\omega_1(x)}_0 = o(x^6)$$

$$\cos(x^4)$$

$$n=16$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

Metto x^4 al posto di x : $\cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} + o(x^{16})$

$$\cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} + o(x^{23})$$

Pensare: chi sarebbe la potenza successiva?

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots, \quad \cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} - \frac{1}{6!}x^{24}$$

tutto il resto
è $o(x^{23})$.

Composizioni meno ovvie:

$$\cos(\sin x)$$

$$n=4$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

$y^4 \omega(y)$

Metto $y = \sin x$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o((\sin x)^4)$$

Sostituisco lo sviluppo di $\sin x$ di ordine 4:

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^4 + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4 \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \\ &\quad \text{Doppio prodotto} \\ &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

$$o((\sin x)^4) = (\sin x)^4 \omega(\sin x) = x^4 \underbrace{\frac{(\sin x)^4}{x^4}}_{\omega_1(x) \rightarrow 1-0=0} \omega(\sin x) = o(x^4).$$

Achtung! $\arctan(x+x^4)$ $n=4$

$$\arctan y = y - \frac{1}{3} y^3 + o(y^4); \quad \boxed{\arctan(x+x^4) = x + x^4 + o(x^4)}$$

ASSOLUTAMENTE NO!!!

Ho usato (in fondo) solo $\arctan y = y + o(y)$, quindi

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^4) &= (x+x^4) + o(x+x^4) \\ &= x + x^4 + o(x) + o(x^4) \\ &= x + \underbrace{x^4}_{\rightarrow 0} + o(x) = x + o(x)\end{aligned}$$

Per farlo correttamente devo sostituire $y = x+x^4$ nello sviluppo di $\arctan y$ di ordine 4

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^4) &= (x+x^4) - \frac{1}{3} (x+x^4)^3 + o((x+x^4)^4) \\ &= x + x^4 - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$o((x+x^4)^4) = (x+x^4)^4 \omega(x+x^4) = x^4 \underbrace{\frac{(x+x^4)^4}{x^4}}_{\omega_1(x) \rightarrow 1-0} \omega(x+x^4) = o(x^4)$$

— o — o —

Con la stessa logica sarebbe stato

$$\arctan(x+x^{20}) = x + x^{20} + o(x^{20}) \quad \text{NO! Al max } \arctan(x+x^{20}) = x + x^{20} + o(x)$$

Achtung! $\sin(\cos x)$ $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$, quindi

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + o((\cos x)^4)$$

NO!!!

Non è vero che $o((\cos x)^4) = o(x^4)$!!!

Non funziona la dimostrazione di prima:

$$o(\cos^4 x) = \cos^4 x \cdot w(\cos x) = x^4 \cdot \underbrace{\frac{\cos^4 x}{x^4}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{w(\cos x)}_{\substack{\text{non tende a zero perché} \\ \text{l'argomento tende a 1.}}}$$

Come accorgersene subito?

$\cos(\sin x)$ pongo $y = \sin x$ Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, quindi uso lo sviluppo di $\cos y$ che vale per $y \rightarrow 0$

$\sin(\cos x)$ pongo $y = \cos x$ Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 1$, quindi non posso usare lo sviluppo di $\sin y$ il quale vale per $y \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Si può usare Taylor per fare limiti per $x \rightarrow +\infty$? NO

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Sostituisco $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$

NO!!! lo sviluppo vale per $x \rightarrow 0$, non per $x \rightarrow +\infty$.

Quello che non so è che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$
 lo so solo se $x \rightarrow 0$.

In questo caso il limite fa 0 per ordini di infinito.

Non si può usare Taylor perché l'argomento di $\arctan$ non tende a zero.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(x+1) - \log x] x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$\log(1 + \text{Mostro})$ con $\text{Mostro} \rightarrow 0$

Professionale: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + o(1) = 1$

$\log(1+y) = y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$, quindi $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
per $x \rightarrow +\infty$

Più cauto: faccio il cambio di variabili $y = \frac{1}{x}$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \text{ e concludo con limiti notevoli o Taylor o.}$$

Esempio 3 Dipende dove tende l'argomento delle funzioni!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} + \frac{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6}.$$

↓
0

Alternativa: $x = \frac{1}{n}$ e...

— 0 — 0 —

Taylor con centro in $x = x_0$

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$P_n(x-x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Questa formula segue da quella precedente ponendo $x-x_0 = h$.

Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $h \rightarrow 0$ e la formula diventa

$$f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Dove

$$P_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Dim. basta chiamare $g(h) = f(x_0+h)$ (cioè spostare l'asse y) e applicare la formula di Taylor alla $g(h)$ per $h \rightarrow 0$.
Diventa

$$g(h) = g(0) + g'(0)h + \frac{1}{2}g''(0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)h^n + o(h^n)$$

Ora $g(0) = f(x_0)$, $g'(h) = f'(x_0+h)$ quindi $g'(0) = f'(x_0)$
e in generale $g^{(k)}(h) = f^{(k)}(x_0+h)$ quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$.
In altre parole: le derivate di g in $h=0$ sono le derivate di f in x_0 .

Quindi la formula di Taylor per $g(h)$ in $h=0$ diventa
la formula di Taylor di $f(x)$ in $x = x_0$

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 1$, $n = 2$

Devo calcolare $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$. $f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{quindi } f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{quindi } f''(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Pentaubio

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$ $x_0 = 3$ $n = 3$

Devo calcolare $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ che sono tutti e^3 . Quindi

$$e^{3+h} = e^3 + e^3h + \frac{1}{2}e^3h^2 + \frac{1}{6}e^3h^3 + o(h^3) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

In realtà bastava un po' di precorso:

$$e^{3+h} = e^3 \cdot e^h = e^3 \left(1+h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right)$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$ $n = 3$

1° modo: calcolare $f(\frac{\pi}{6})$, $f'(\frac{\pi}{6})$, $f''(\frac{\pi}{6})$, $f'''(\frac{\pi}{6})$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + o(h^3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3).$$

2° modo: precorso !!

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos h + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin h$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)\right)}_{\substack{h \rightarrow 0, \text{ quindi posso} \\ \text{usare Taylor in } 0}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{\left(h - \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right)}_{\text{sviluppo di } \sin h}$$

Esempio 4 $f(x) = \arctan(e^x)$ $x_0 = 0$ $n = 2$

Anche se sono in $x_0 = 0$, non posso usare lo sviluppo di $\arctan$ centrato in $x_0 = 0$. Infatti l'argomento di $\arctan$ tende a 1.

Posso invece usare lo sviluppo per $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\arctan(e^x) = \arctan\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$= R \rightarrow 0$

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right)^2\right)$$

$= o(x^2)$
SOLITO

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{4}x^2} + o(x^2) - \cancel{\frac{1}{4}x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + o(x^2).$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 037

Titolo nota

18/11/2010

Esercizio 1 $f(x) = \log(1 + \cos x)$ $x_0 = 0$ $n = 3$ Per $\cos x$ posso usare sviluppo classico in $x_0 = 0$

$$f(x) = \log\left(1 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log\left(2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$$

$R \rightarrow 0$

Mi devo procurare uno sviluppo di $\log(2+R)$ per $R \rightarrow 0$.Quindi calcolo lo sviluppo di $g(x) = \log x$ con $x_0 = 2$

$$g(2) = \log 2 \quad g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{2}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(2) = -\frac{1}{4}$$

Quindi

$$g(2+R) = g(2) + g'(2)R + \frac{1}{2}g''(2)R^2 + o(R^2)$$

$$\log(2+R) = \log 2 + \frac{1}{2}R - \frac{1}{8}R^2 + o(R^2)$$

quindi $\log\left(2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$

$$\log(1 + \cos x) = \log 2 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

non faccio R^2
perché sono tutti
termini da x^4 in su

Esercizio 2 Sia $f(x) = e^{\sin x^2}$. Calcolare $f^{(6)}(0)$ 1° modo: derivare 6 volte... AUGURI!2° modo: Taylor di ordine 6.Pongo $y = \sin x^2$ e noto che $y \rightarrow 0$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \text{ quindi}$$

$$e^{\sin x^2} = 1 + \sin x^2 + \frac{1}{2}[\sin x^2]^2 + \frac{1}{6}[\sin x^2]^3 + o([\sin x^2]^3)$$

$$\begin{aligned}\sin_R x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \text{ quindi } \sin_R x^2 = x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6), \text{ quindi} \\ e^{\sin_R x^2} &= 1 + \left(x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\right) + \frac{1}{2} \left(\quad\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\quad\right)^3 + o\left(\left(\quad\right)^3\right) \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

(Volevo potrei mettere anche $o(x^7)$ perché $e^{\sin_R x^2}$ è pari e quindi lo sviluppo ha solo potenze pari ...).

Ora per la formula dei polinomi di Taylor abbiamo che

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

Guardando il coefficiente di x^6 scopriamo che

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{3}, \text{ da cui } f^{(6)}(0) = \frac{1}{3}6! = \frac{1}{3} \cdot 720 = 240.$$

Achtung! Con questo sistema si calcolano solo le derivate in $x=0$!!

Esercizio 3 $f(x) = \log(1+x^3)$. Calcolare $f^{(30)}(0)$

Mi serve lo sviluppo di $f(x)$ di grado 30, ed in particolare il termine con x^{30} .

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \dots - \frac{1}{10}y^{10} + \dots \text{ da cui}$$

$$\log(1+x^3) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \dots - \frac{1}{10}x^{30} + \dots = \dots + \frac{f^{(30)}(0)}{30!}x^{30} + \dots$$

Uguagliando i coefficienti di x^{30} otteniamo

$$-\frac{1}{10} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!} \text{ da cui } f^{(30)}(0) = -\frac{30!}{10}.$$

Analogamente $f^{(1000)}(0) = 0$. Devo andare a vedere il coeff. di x^{1000} nello sviluppo di $\log(1+x^3)$, ma in questo sviluppo gli esponenti sono tutti multipli di 3, quindi x^{1000} ha coeff. uguale a 0.

— 0 — 0 —

Esercizio 4 $f(x) = \arctan x^{10} + \log(1+x^{37}) - \sinh(x^{10})$.

Quante delle prime 50 derivate di $f(x)$ sono $\neq 0$ per $x=0$??

Tradotto: quanti (e quali) sono i termini non nulli nello sviluppo di $f(x)$ con $n=50$?

$$\arctan x^{10} = x^{10} - \frac{1}{3} x^{30} + \frac{1}{5} x^{50} + o(x^{50}) \quad \arctan y = y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + o(y^5)$$

$$\log(1+x^{37}) = x^{37} + o(x^{50}) \quad (\text{in realtà anche } x^{37} + o(x^{73}))$$

$$\sinh x^{10} = x^{10} + \frac{1}{6} x^{30} + \frac{1}{120} x^{50} + o(x^{50}) \quad \sinh y = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 + o(y^5)$$

$$\text{Mettendo insieme: } f(x) = \cancel{x^{10}} - \frac{1}{3} x^{30} + \frac{1}{5} x^{50} + \cancel{x^{37}} - \cancel{x^{10}} - \frac{1}{6} x^{30} - \frac{1}{120} x^{50} + o(x^{50})$$

Le derivate non nulle in $x=0$ sono 3: la 30-esima, la 37-esima, la 50-esima.

Quanto vale $f^{(30)}(0)$?

$$\dots - \frac{1}{2} x^{30} + \dots = \dots + \frac{f^{(30)}(0)}{30!} x^{30} + \dots \Rightarrow f^{(30)}(0) = -\frac{30!}{2}.$$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

Esercizio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n [\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}]$

1° modo: razionalizzo $n(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} =$

$$= n \frac{\cancel{n+4} - \cancel{n+1}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{+3n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = +\infty \quad (\text{racadde } \sqrt{n} \text{ sopra e sotto})$$

2° modo $n[\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}] = n\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right)$

$$= n\sqrt{n} \left[\left(1+\frac{4}{n} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$= n\sqrt{n} \left[\cancel{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n} - \cancel{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= n\sqrt{n} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{3}{2} \sqrt{n} + n\sqrt{n} o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sqrt{n} \left\{ \frac{3}{2} + n o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \boxed{\sqrt{n}} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right\} \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ 0

Esercizio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+3} - \sqrt[4]{n^4+2} \right] n$

1° modo: razionalizzare (AUGURI!) $A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$

2° modo: raccolgo n^4 e uso gli sviluppi

$$\left[\sqrt[4]{n^4 \left(1 + \frac{3}{n^4}\right)} - \sqrt[4]{n^4 \left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} \right] n = n^2 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{3}{n^4}} - \sqrt[4]{1 + \frac{2}{n^4}} \right)$$

Ora $(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x)$ da cui

$$= n^2 \left(\cancel{1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n^4} - \cancel{1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = n^2 \left(\frac{1}{4} \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0 \qquad n^2 o\left(\frac{1}{n^4}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \omega(\dots) = \frac{1}{n^2} \omega(\dots) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Se fosse stato $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sqrt[4]{n^4+3} - \sqrt[4]{n^4+2} \right)$ veniva $\frac{1}{4}$ (verificare!!).

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 038

Titolo nota

20/11/2010

SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Si intende che a_n è una successione.

La serie è la somma degli infiniti termini della successione.

La cosa da definire è "cosa vuol dire sommare infinite cose".

Somme parziali

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

Somma di un numero finito di termini

La serie, cioè la somma degli infiniti termini della successione, si definisce come il limite della successione S_n per $n \rightarrow +\infty$.

a_n successione data



Costruisco somme parziali S_n



Faccio il limite della succ. S_n

Essendo un limite, una serie ha 4 possibili comportamenti:

- ① convergere ad un $l \in \mathbb{R}$ (se $S_n \rightarrow l$)
- ② divergere a $+\infty$ (se $S_n \rightarrow +\infty$)
- ③ " " $-\infty$ (se $S_n \rightarrow -\infty$)
- ④ essere indeterminata (se S_n non ha limite).

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ ($a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). In questo caso $S_n = 0$, quindi $S_n \rightarrow 0$.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ ($a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). In questo caso $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = n+1 \rightarrow +\infty$

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ($a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

In questo caso $S_0 = a_0 = 1$

$$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$$

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

Si dimostra facilmente (per induzione) che $S_{2n} = 1$ e $S_{2n+1} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che la serie è indeterminata.

Proprietà algebriche delle serie Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie, e sia λ un numero reale $\neq 0$.

$$\text{Allora } \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

[Dim.: basta raccogliere λ nelle somme parziali]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Questa vale con le regole di addizione in $\bar{\mathbb{R}}$, ed in particolare non vale nel caso $+\infty - \infty$.

[Dim.: sia $c_n = a_n + b_n$. Siano S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle serie di a_n, b_n, c_n . Allora

$$\begin{aligned} S_n^c &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= S_n^a + S_n^b \end{aligned}$$

essendo una somma finita posso riorganizzare

Allora ho dimostrato che

$$\begin{aligned} S_n^c &= S_n^a + S_n^b \\ \downarrow & \quad \searrow \quad \swarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

Questo vale con le stesse limitazioni del fatto che la somma dei limiti è il limite della somma.

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ non è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Questo non è vero nemmeno se ci sono solo 2 termini

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

Piccola variante $\sum_{n=77}^{\infty} a_n$ in questo caso faccio le somme parziali come

$$S_{77} = a_{77}, S_{78} = a_{77} + a_{78} \text{ e in generale}$$

$$S_n = \sum_{i=77}^n a_i \text{ e poi si fa il limite degli } S_n.$$

Osservazione $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=77}^{\infty} a_n$ hanno sempre lo stesso tipo di comportamento $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$.

Ovviamente, se il comportamento è di tipo $\boxed{1}$, i valori del limite possono essere diversi.

Il motivo per cui il comportamento è lo stesso è che le somme parziali della prima sono uguali alle somme parziali della seconda con l'aggiunta di un blocco iniziale fisso $a_0 + a_1 + \dots + a_{76}$

Osservazione collegata Se in una serie modifico un numero finito di termini, il comportamento globale non cambia.

CONDIZIONE NECESSARIA Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (tipo $\boxed{1}$), allora $a_n \rightarrow 0$.

Dim.:

$$\begin{array}{ccc} a_n = S_n - S_{n-1} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ l - l = 0 & & \end{array}$$

In questa dimostrazione è essenziale sapere che il limite l è reale (cioè tipo $\boxed{1}$), altrimenti ci si ritrova una forma indeterminata.

Utilizzo operativo della cond. nec. . Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
 Inizio a fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

- Se il limite viene $=0$, allora la serie POTREBBE convergere
- Se il limite non viene 0 (cioè viene un numero reale $l \neq 0$, oppure viene $+\infty$, $-\infty$, o non esiste), allora la serie DI SICURO NON converge (se convergesse, il limite dovrebbe fare 0), ma le restano ancora 3 possibilità.
 $\quad \quad \quad -0-0-$

SERIE TELESOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \log 1 = 0$, quindi la condizione necessaria è verificata, quindi la serie POTREBBE convergere.

Provo a calcolare le somme parziali

$$S_n = \log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

Ho quindi dimostrato che $S_n = \log(n+1) \rightarrow +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

Formalmente $S_n = \log(n+1)$ avrebbe dimostrato per induzione.

Osservazione: altro modo di vedere la stessa cosa

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n, \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= (\cancel{\log 2} - \log 1) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + \dots \\ &= -\log 1 + \log(n+1) = \log(n+1) \\ &\quad \quad \quad -0-0- \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 039

Titolo nota

20/11/2010

Esempio 2 di serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+n}}_{a_n}$$

Si vuole che $a_n \rightarrow 0$, quindi condizione necessaria OK, quindi la serie potrebbe convergere. Calcolo le somme parziali, usando che

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Quindi $S_n \rightarrow 1$ e dunque la serie converge a 1. Si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-3} + \frac{1}{5-4} + \dots = 1$$

— 0 — 0 —

Serie telescopica = avvengono "cancellazioni incrociate" nel calcolo di S_n per cui rimangono solo "il primo e l'ultimo".

— 0 — 0 —

SERIE GEOMETRICA È una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro fissato

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

Come dimostrato a suo tempo per induzione, si ha che

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

Per fare il limite di S_n bisogna distinguere dei casi.

- Se $a > 1$, numeratore $\rightarrow +\infty$, denomin. > 0 , quindi $S_n \rightarrow +\infty$
- Se $-1 < a < 1$, cioè $|a| < 1$, allora $a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi numeratore $\rightarrow -1$, quindi $S_n \rightarrow \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$, quindi la serie converge.

• Se $a < -1$, allora $S_{2n} = \frac{a^{2n+1} - 1}{a - 1} \left[= \frac{-\infty}{a-1} \right] \rightarrow +\infty$
 $S_{2n+1} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a - 1} \left[= \frac{+\infty}{a-1} \right] \rightarrow -\infty$

Quindi S_n non ha limite e la serie è indeterminata.

- Se $a = 1$, allora la geometrica è la somma di tutti 1, quindi diverge a $+\infty$.
- Se $a = -1$, allora la geometrica è la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, che è indeterminata.

Riassumendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{Converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{È indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Caso particolare

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

= serie geometrica con $a = \frac{1}{2}$ che converge a $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



Per sommando infiniti oggetti, la somma può convergere.

In generale non si riesce a trovare una formula esplicita per S_n . Tuttavia esistono dei criteri per stabilire il comportamento di una serie senza passare per il calcolo di S_n .

Osservazione: esistono poi dei metodi per trovare in maniera approssimativa il valore della somma nel caso in cui si sa già che la serie è di tipo $\textcircled{1}$.

STUDIO DELLA CONVERGENZA: CRITERI

→ Serie a termini positivi
(segno costante)

- criterio della radice
- criterio del rapporto
- criterio del confronto
- confronto asintotico → casi standard
→ casi limite

→ Serie a termini di segno variabile

- criterio di LEIBNITZ
- criterio assoluta convergenza

Fatto 1 Una serie a termini positivi ha solo 2 tipi di comportamenti a disposizione:

- convergere
- divergere a $+\infty$

[Dim.: se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente, quindi ha solo 2 possibili comportamenti]

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3}{n^2-5n+2}}_{a_n}$

Trovare una formula per le somme parziali è sostanzialmente impossibile.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, quindi la condizione necessaria non è verificata, quindi la serie non può convergere.

Essendo $a_n \geq 0$ definitivamente, può solo convergere o divergere a $+\infty$.
L'unica possibilità rimasta è che diverga a $+\infty$.

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$. Allora

- se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$), $\sum a_n = +\infty$
- se $l < 1$, allora $\sum a_n$ converge
- se $l = 1$, allora B.O.H.

Criterio del rapporto Sia $a_n > 0$ definitivamente.
 Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.

Allora come con la radice

Criterio del confronto Sia a_n e b_n due successioni con
 $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.

Allora valgono queste implicazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty, \text{ cioè converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Achtung! • Ogni altra implicazione è abusiva
 • Si raccomanda di non usare il confronto quando le serie in gioco non sono a termini positivi.

[Dim. Siano S_n^a e S_n^b le somme parziali delle 2 serie.
 Visto che $a_n \leq b_n$ per ogni n (basta modificare un numero finito di termini), avremo che

$$S_n^a \leq S_n^b.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ vuol dire che $S_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora per confronto tra limiti anche $S_n^b \rightarrow +\infty$, quindi $\sum b_n = +\infty$.

Viceversa, se $\sum b_n$ converge, allora $S_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora S_n^a non può andare a $+\infty$, quindi dovendo avere un limite (perché è deb. crescente) tale limite sarà per forza reale, quindi $\sum a_n$ converge.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 040

Titolo nota

20/11/2010

Criterio del confronto asintotico (caso standard)Siano $a_n > 0$ definitivamente e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array} \right)$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento.

(cioè se una diverge, l'altra diverge; se una converge, l'altra converge, magari a valori diversi).

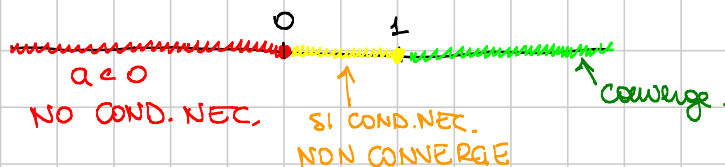
SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{array} \right.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{array} \right.$$

La vera serie armonica è la 1^a con $a=1$, cioè $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Per le serie armoniche si ha questa situazione



Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ definitivamente $\Rightarrow$ termini positivi

$a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$

Quindi la serie converge.

Con il criterio della radice veniva: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, come sopra.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n}}_{= a_n}$

termini positivi e $a_n \rightarrow 0$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n}} = \sqrt[n]{\frac{8^n \left(1 + \left(\frac{7}{8}\right)^n\right)}{9^n \left(1 + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}} = \frac{8}{9} \left[\frac{1 + \left(\frac{7}{8}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{9}\right)^n} \right]^{\frac{1}{n}}$
 $\rightarrow \frac{8}{9} < 1$

Quindi la serie converge.

Provo con il confronto asintotico: si tratta di trovare una serie di cui conosco il comportamento con cui confrontare. In questo caso $b_n = \frac{8^n}{9^n}$. Devo fare

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n} \cdot \frac{9^n}{8^n} \rightarrow 1$, quindi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, ma

$\sum b_n = \sum \frac{8^n}{9^n} = \sum \left(\frac{8}{9}\right)^n$ e questa converge perché è una serie geometrica con parametro $a \in (-1, 1)$.

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2 + 2}{n^3 + 7n + 1}}_{a_n}$

termini positivi e $a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, quindi è armonica generalizzata con esponente $\alpha = 1$, la quale diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$. Devo fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3}{n^3+7n+1} \cdot n = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè diverge.

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$

$a_n \rightarrow 0$ e la serie è a termini positivi. Infatti $\frac{1}{n^2}$ sta in $[0, 1]$ e in questa zona $\sin x \geq 0$.

Brutale: $\sin x \sim x$ quando $x \rightarrow 0$, quindi $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, e la serie di $\frac{1}{n^2}$ converge perché armonica con $\alpha=2$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$. Devo fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$x = \frac{1}{n^2}$

quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè converge.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n^2}$ termini positivi, non è evidente il limite di a_n .

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n} = e^{-n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = e^{-\frac{\log\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot 3} \cdot 3} \rightarrow e^{-3}$$

Essendo $e^{-3} < 1$, la serie converge. $\left[-n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) \sim -n \cdot \frac{3}{n} = -3\right]$
 $\log(1+x) \sim x$

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{2010} - 1\right)}_{a_n}$ termini positivi e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $\sqrt[n]{2010} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 2010} - 1 \sim \frac{\log 2010}{n}$
 quindi diverge!
 $e^x \sim 1+x$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$. Si tratta di fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2010} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2010^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2010^x - 1}{x} = \log 2010 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi la serie data si comporta come la serie di $\frac{1}{n}$, cioè diverge.

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $1 - \cos \frac{1}{n} \sim$ $\nearrow \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ $\cancel{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}}$, quindi la serie

si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi converge.

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$ e viene il solito limite notevole con il coseno.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + \sin n!}{n+3}$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$

$$a_n \geq \frac{4}{n+3}$$

Ora $\sum \frac{4}{n+3} = +\infty$ per confronto asint.
con $\sum \frac{1}{n}$, quindi anche $\sum a_n$ diverge
a $+\infty$ per confronto a due.

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 041

Titolo nota

23/11/2010

Serie a termini di segno
costante (positivi)

- Radice
- Rapporto
- Confronto
- Confronto asintotico

Confronto Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

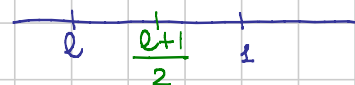
[Dim. osservare che $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ + usare confronto tra limiti]
 $\uparrow$ $\uparrow$
 somme parziali delle 2 serie

Radice Supponiamo $a_n \geq 0$ definitivamente e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

- Allora
- se $l > 1$ si ha $\sum a_n = +\infty$
 - se $l < 1$ si ha $\sum a_n < +\infty$
 - se $l = 1$, allora B.O.

Dim.: caso $l > 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, per il criterio della radice applicato ai limiti si ha che $a_n \rightarrow +\infty$, quindi la cond. necessaria non è verificata, quindi la serie non può convergere, e non le resta che divergere a $+\infty$.

caso $l < 1$ Ora il criterio della radice dice che $a_n \rightarrow 0$, quindi cond. nec. ok, quindi la serie POTREBBE convergere, ma non basta. Tuttavia $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente, quindi $0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = b_n$. Ora



$\sum b_n < +\infty$ (geometrica con parametro $\in (-1, 1)$) $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$
 $\uparrow$
 criterio confronto

Confronto asintotico Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.
 Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0, \neq +\infty$.

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ si comportano allo stesso modo.

[Dim. Poiché $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora definitivamente.



$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l \quad \text{Moltiplico per } b_n > 0 \text{ e ottengo}$$

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n \quad \text{definitivamente}$$

Caso 1 Supponiamo che $\sum b_n < +\infty$, allora $\sum 2l b_n < +\infty$ (teorema algebrico), ma allora per la disuguaglianza a destra anche $\sum a_n$ converge (uso confronto)

Caso 2 Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{l}{2} b_n = +\infty$, ma allora per la disuguaglianza a sinistra anche $\sum a_n = +\infty$ (uso confronto)

Confronto asintotico (casi limite) $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.
 Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ (primo caso limite)

[allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, cioè $a_n \leq b_n$, quindi]

Allora se $\sum b_n < +\infty$, anche $\sum a_n < +\infty$
 se $\sum b_n = +\infty$, allora BOH.

Supponiamo invece che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ (secondo caso limite)

[allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$, quindi]

$$\begin{aligned} \sum b_n < +\infty &\Rightarrow \sum a_n \text{ BOH} \\ \sum b_n = +\infty &\Rightarrow \sum a_n = +\infty \end{aligned}$$

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + n^2}{n! + \cos n}}_{a_n}$ $a_n \geq 0$ sempre e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{2^n}{n!}$ e questa con radice o rapporto si studia

1ª fase Prendo $b_n = \frac{2^n}{n!}$ e dim. equivalenza asintotica

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + n^2}{n! + \cos n} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)}{\cancel{n!} \left(1 + \frac{\cos n}{n!}\right)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico abbiamo che $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$.

2ª fase Studio di $\sum b_n$ con criterio del rapporto (o radice)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum b_n \text{ converge}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$.

Provo a fare il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty \text{ (caso limite)}$$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ defn.}, \text{ quindi } a_n \geq b_n \text{ definitiv.} \right]$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$ (armonica con $a=1$), quindi $\sum a_n = +\infty$.

Esempio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ Provo confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \cdot n^2 = 0 \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1, \right.$$

$\left. \text{quindi } a_n \leq b_n \text{ definitiv.} \right] \sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty \text{ (armonica con } a=2)$
quindi $\sum a_n < +\infty$.

Esempio 4 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

1° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \dots a_n \geq b_n \text{ definitivamente.} \right]$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

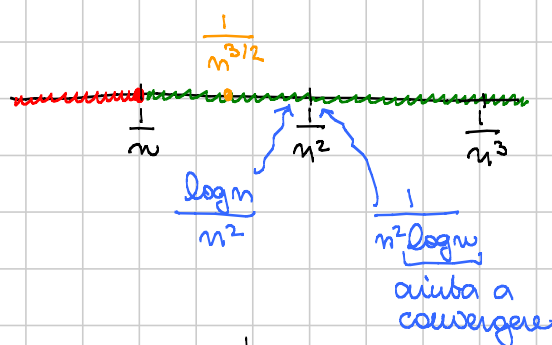
2° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ definitivamente, quindi } a_n \leq b_n \text{ definitivamente.} \right]$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH.}$$

Idea: il $\log n$ al numeratore sposta verso la zona rossa, ma non abbastanza



3° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots, \text{ quindi } a_n \leq b_n \text{ definitivamente.} \right]$

$$\sum b_n < +\infty \text{ (armonica con } a = \frac{3}{2} > 1), \text{ quindi } \sum a_n < +\infty.$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 042

Titolo nota

23/11/2010

Serie con termini a segno variabile

- Criterio di LEIBNITZ
- Criterio dell'assoluta convergenza

Assoluta convergenza $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

Utilizzo operativo :

- devo studiare $\sum a_n$ con a_n a segno variabile
- studio $\sum |a_n|$: questa è a segno fisso, quindi ho tutti i criteri precedenti a disposizione
- se $\sum |a_n| < +\infty$, allora $\sum a_n$ converge
- se $\sum |a_n| = +\infty$, allora $\sum a_n$ BOH

[Dim. $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$, quindi

$$\sum a_n = \underbrace{\sum |a_n|}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum (|a_n| - a_n)}_{\substack{\text{se questa convergesse avrei finito perché} \\ \sum a_n \text{ sarebbe differenza di 2 serie} \\ \text{convergenti}}}$$

Ora si ha che $0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
 $\uparrow$
 infatti se $a_n \geq 0$ diventa 0,
 se $a_n \leq 0$ diventa $2|a_n|$

Poiché $\sum 2|a_n|$ converge, anche $\sum (|a_n| - a_n)$ converge per confronto tra serie a termini ≥ 0 .]
 — 0 — 0 —

Criterio di LEIBNITZ (criterio delle serie a segno alternato)

Consideriamo la serie $\sum \underbrace{(-1)^n}_{a_n} d_n$. Supponiamo che

- (i) $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (segno alternato) Tesi: la serie converge
 (ii) $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $d_n \rightarrow 0$

Achtung! Se qualcuna delle ipotesi non è verificata, allora BOH. Se però a non essere verificata è l'ipotesi (iii), allora manca la condizione necessaria (infatti si vede per il "trucco del valore assoluto" che $a_n \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha_n \rightarrow 0$), quindi di sicuro la serie iniziale non converge (ma ce ne restano ancora 3 possibilità...)

[Idea della dimostrazione : nelle ipotesi del criterio di Leibnitz, come è fatta la successione S_n delle somme parziali ?

$$S_0 = \alpha_0 \quad S_1 = \alpha_0 - \alpha_1 \quad S_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad S_3 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

Come è messa S_2 rispetto a S_0 ?

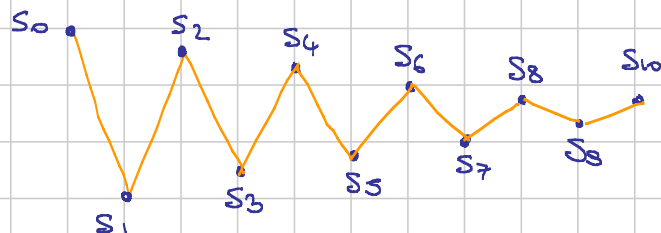
$$\alpha_0 \stackrel{?}{\geq} \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \quad \text{VERA}$$

Quindi si verifica per inclusione che

S_{2n} è debolmente decrescente

S_{2n+1} è debolmente crescente

Inoltre tutte le S_{2n} sono $\geq$ tutte le S_{2n+1}



Allora $S_{2n} \rightarrow l_1$ e $S_{2n+1} \rightarrow l_2$, e resta da dimostrare che $l_1 = l_2$, ma

$$\begin{array}{ccc} S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \rightarrow 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ l_2 - l_1 = 0 \\ \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \end{array}$$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Serie a segno alternato con $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.

Controllo ipotesi di Leibnitz

(i) $\alpha_n \geq 0$ banale (iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ banale

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. Devo controllare che $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, questa è vera perché denominatore + grande $\Rightarrow$ frazione + piccola.

Quindi la serie converge.

Potero usare l'assoluta convergenza? Sì, ovvero studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Questa converge, quindi quella iniziale converge.}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Segui alterni con $a_n = \frac{1}{n}$

Controllo le ipotesi di Leibnitz: (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ banale

(iii) $a_n \rightarrow 0$ banale

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ banale

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Potero usare l'assoluta convergenza? Dovrei studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \text{ Questa diverge, quindi BOH.}$$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$. Segui alterni con $a_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ banale (iii) $a_n \rightarrow 0$ banale

(ii) devo controllare se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 1$, cioè

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{?}{\leq} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essendo $\arctan x$ strettamente crescente da disug. è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ e questa è vera per le solite ragioni di denominatori.}$$

Conclusione: la serie iniziale converge per Leibnitz.

Potero usare l'assoluta convergenza? Mi riducevo a studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ ma questa diverge per confronto asintotico}$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (fare formalmente il limite) [Brutale:

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ Segui a caso ...

1° modo $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, quindi $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ conv.

NO!!!!!! Posso usare il confronto solo fra serie a termini positivi.
Altrimenti $-1000 \leq \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum (-1000)$ converge!!

2° modo Provo assoluta convergenza. Devo studiare

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$. Per questa posso dire che $0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
quindi posso usare criterio del
confronto tra serie a termini ≥ 0 .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$
 $\uparrow$ confronto tra serie a termini positivi $\uparrow$ assoluta convergenza

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)$

Segui variabili con $a_n = \arcsin\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)$

Controllo le ipotesi: (i) $a_n \geq 0$ (banale) per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) ...

(iii) $a_n \rightarrow 0$ FALSA perché $a_n \rightarrow \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Quindi di sicuro non converge.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 043

Titolo nota

01/12/2010

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{n}{n^2+1}$ Leibnitz con $a_n = \arctan \frac{n}{n^2+1}$

(i) $a_n \geq 0$ definita. OK (iii) $a_n \rightarrow 0$ OK.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

$$\arctan \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \stackrel{?}{\leq} \arctan \frac{n}{n^2+1}$$

Essendo $\arctan x$ strett. crescente, la posso "semplificare"

$$\frac{n+1}{n^2+2n+2} \stackrel{?}{\leq} \frac{n}{n^2+1} ; \quad n^3+n+n^2+1 \stackrel{?}{\leq} n^3+2n^2+2n$$

$$n^2+n-1 \geq 0 \quad \text{vero definitivamente.}$$

Quindi la serie converge.

Potevo usare l'assoluta convergenza? Devo studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n}{n^2+1}$
Questa diverge per confronto asintotico con $\frac{1}{n}$, quindi non posso dedurre nulla.

$$\left[\arctan \frac{n}{n^2+1} \sim \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \right]$$

Esercizio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15}$

Leibnitz: (i) + (iii) OK (ii) Auguri! Bisogna sviluppare i conti
Provo con l'assoluta convergenza, cioè studio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15} \right| \quad \text{che per } n \text{ grandi coincide con}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15} \quad \text{Questa converge per confronto asint. con } \sum \frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie iniziale converge per assoluta convergenza.

Esercizio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^2-2n-15}$

Non converge perché manca la condizione necessaria.

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15}$

Se faccio l'assoluta convergenza, mi trovo a confrontare con $\frac{1}{n}$, quindi la serie con i valori assoluti diverge, quindi **OK**.

Alternativa 1: Leibnitz: (i) e (iii) **OK**, ma (ii) --.

Alternativa 2: aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\text{Serie data} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15} - \frac{1}{n} \right]$$

SE le 2 serie che ho scritto convergono entrambe, allora converge la serie iniziale per il teorema algebrico.

La prima serie converge per Leibnitz.

Per la seconda faccio il calcolo:

$$\begin{aligned} \frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15} - \frac{1}{n} &= \frac{n^3+3n^2-26n - n^3+2n^2+15}{n(n^3-2n^2-15)} \\ &= \frac{5n^2-26n+15}{n^4-2n^3-15n} \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Quindi la seconda serie converge per assoluta convergenza.

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^{\alpha}+5}$

Brutale: $a_n \sim \frac{n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ e questa converge quando $\alpha-1 > 1$, cioè quando $\alpha > 2$.

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{n}{n^{\alpha}}$. Calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^{\alpha}+5} \cdot \frac{n^{\alpha}}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n} \cdot \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}+5} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{n^{\alpha}}} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 se $\alpha > 0$

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3) \alpha^n$

Caso più semplice: $\alpha \geq 0$. Applico il criterio della radice (posso farlo perché la serie è a termini di segno costante)

$$\sqrt[n]{(n^2+3) \alpha^n} = \alpha \cdot \sqrt[n]{n^2+3} \rightarrow \alpha$$

↓
1

Se $\alpha > 1$, la serie diverge.

Se $\alpha \in [0, 1)$, la serie converge.

Se $\alpha = 1$, la radice dice BOK, ma sostituendo $\alpha = 1$ trovo

$\sum (n^2+3)$ e questa diverge perché manca la condizione necessaria.

Caso meno semplice: $\alpha \leq 0$. Diventa una serie a segno alternato.

Assoluta convergenza: studio $\sum_{n=0}^{\infty} |(n^2+3) \alpha^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3) |\alpha|^n$

Questa converge per $|\alpha| < 1$ e diverge altrimenti.

Quindi per $\alpha \in (-1, 0]$ ho che la serie iniziale converge, e

per $\alpha \leq -1$ la serie con i valori assoluti diverge, quindi BOK.

Tuttavia per tutti gli $\alpha \leq -1$ manca la condizione necessaria, in quanto

$$|(n^2+3) \alpha^n| = (n^2+3) \underbrace{|\alpha|^n}_{\geq 1} \geq n^2+3 \rightarrow +\infty.$$

Manca la condizione necessaria, la serie non può convergere.

Conclusione: la serie iniziale converge $\Leftrightarrow \alpha \in (-1, 1)$.

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} + 3n^2 - 7}{n^{20} + 5n + 6}$

Facciamo $\alpha \geq 0$.

Brutale: $a_n \sim \frac{n^{\alpha}}{n^{20}} = \frac{1}{n^{20-\alpha}}$ che converge per $20-\alpha > 1$,
cioè per $\alpha < 19$.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - n^2 + 3}{n^7 + n^{\alpha} - 5}$ Questa converge sempre !!!!!

[Brutale : $a_n \sim \frac{n^5}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$, quindi $\alpha-5 > 1$, quindi $\alpha > 6$]

no! Quando dico Denominatore $\sim n^{\alpha}$ dico una cosa che vale solo per $\alpha > 7$

Però per $\alpha \leq 7$ ho che $a_n \sim \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}$ quindi converge comunque,

Per una dim. rigorosa ho 2 strade.

1ª possibilità: distinguo i casi $\alpha > 7$ e $\alpha \leq 7$ e faccio due confronti asintotici diversi.

2ª possibilità: faccio un confronto a due:

$$\underbrace{\frac{n^5 - n^2 + 3}{n^7 + n^{\alpha} - 5}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n^5 + 3}{n^7 - 5}}_{b_n} \quad (\text{Num. + grande, Denom. + piccolo})$$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 044

Titolo nota

01/12/2010

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3 \log n - n^2 + 2}$

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3 \log n} = \frac{1}{n \log n}$ e questa diverge $\frac{1}{n[\log n]^2}$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n \log n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n^3 \log n - n^2 + 2} \cdot n \log n = \dots = 1 \neq 0 \neq +\infty.$$

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$ Condizione necessaria Ok

Brutale: $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \frac{1}{n} \log n$
 $e^x \sim 1+x$

Quindi la serie data si comporta come $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$ e questa converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1° FATTO La serie data si comporta come $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$. Si tratta di fare il confronto asintotico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}}{\left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{\log n}{n}} \right]^{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \right]^{\alpha} = 1.$$

2° FATTO La serie $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Caso $\alpha \leq 1$: $\left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha} \geq \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge, quindi anche l'altra diverge.

Caso $\alpha > 1$: confronto asintotico con $\frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}}$ ~~trasformazione~~
 $1 \frac{\alpha+1}{2} \alpha$

Devo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log n}{n} \right]^\alpha \cdot n^{\frac{\alpha+1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log^\alpha n}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \quad \text{perché i log perdono dalle potenze}$$

Visto che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, ho che $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitivamente,

quindi $a_n \leq b_n$ definitivamente, quindi se $\sum b_n < +\infty$ anche $\sum a_n < +\infty$

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha$ $\overset{0}{-} \quad \overset{0}{-} \quad \overset{0}{-}$

La serie è a termini positivi perché $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$ e $\sin x$ in quella zona è positivo.

$$\left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha \sim \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha/2}}, \quad \text{quindi converge} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1, \quad \text{quindi} \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{\alpha/2}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha}{\frac{1}{n^{\alpha/2}}} = \left[\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right]^\alpha \rightarrow 1, \quad \text{quindi stesso comportamento.}$$

Esercizio 4 $\sum \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)^\alpha$

Brutale: $\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3n^3}$
 $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

quindi $\left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)^\alpha \sim \frac{1}{3^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{3\alpha}}$ e questa converge $\Leftrightarrow 3\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{3}$.

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{n^{3\alpha}}$ e dopo un po' si ritrova il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$$

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 9^n}{3^n + \alpha^n}$

Caso facile: $\alpha > 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{9^n}{\alpha^n} = \left(\frac{9}{\alpha}\right)^n$ geometrica che converge
 per $\frac{9}{\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 9$.
 almeno se $\alpha > 3$

Rigrosso. Distinguo i casi

- $\alpha \leq 3$... e qui non ho nemmeno la condizione nec.
- $\alpha > 3$... e qui faccio il confronto asintotico con $\frac{9^n}{\alpha^n}$.

Esercizio 6 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

Provo con E-ATA: $(\log n)^{\log n} = \frac{e^{\log n \cdot \log(\log n)}}{n^{\log(\log n)}}$

Quindi

$$\frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \frac{1}{n^{\log(\log n)}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad (\text{Ho messo un esponente definitivamente piccolo})$$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\Rightarrow$ la serie data converge.

Commento precorsistico

$$A^{\log B} = B^{\log A}$$

Scritti come esponenziali diventano $e^{\log B \cdot \log A} = e^{\log A \cdot \log B}$

Esercizio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\arctan n} \right)^n \quad (\alpha > 0)$

Radice : $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\alpha}{\arctan n} \rightarrow \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{\pi}$

Quindi : • se $\frac{2\alpha}{\pi} > 1$, cioè $\alpha > \frac{\pi}{2}$ la serie diverge

• se $\frac{2\alpha}{\pi} < 1$, cioè $\alpha < \frac{\pi}{2}$ la serie converge

• se $\frac{2\alpha}{\pi} = 1$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2}$, allora la radice dire
BON e devo sostituire. Ottengo

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\arctan n} \right)^n \geq 1$$

↑
perché denominatore $\leq \frac{\pi}{2}$

Se $a_n \geq 1$ sempre, allora non c'è la condizione necessaria, quindi la serie diverge.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 045

Titolo nota

02/12/2010

Teorema di esistenza degli zeri Sia $[a, b]$ un intervallo, e sia
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto).

Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Oss.1 Il punto c non è obbligato ad essere unico.
 Possono anche essere infiniti.

Oss.2 È essenziale che $f(x)$ sia continua (se può saltare il teorema non è più vero)

Dim.: possiamo sempre supporre che sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
 (altrimenti cambio $f(x)$ con $-f(x)$). Pongo

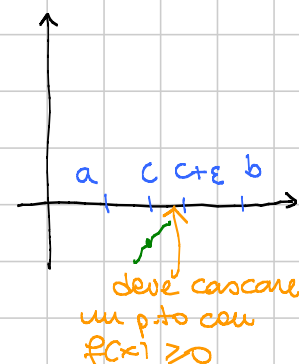
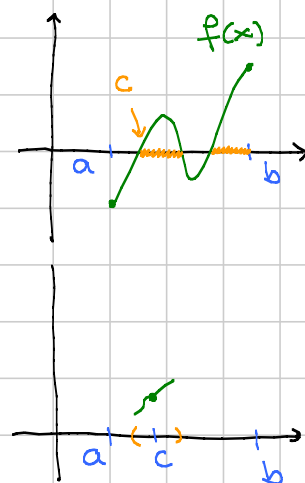
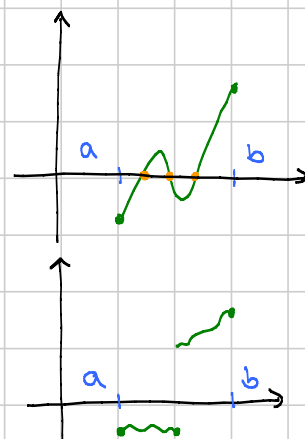
$$c = \inf \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$$

Dico che $f(c) = 0$. Lo dimostro per assurdo.

Supponiamo che sia $f(c) > 0$. Allora per continuità $f(x) > 0$ anche un po' prima di c . Ma allora c non è l'inf degli x in cui $f \geq 0$.

Supponiamo ora che sia $f(c) < 0$. Allora per continuità $f(x)$ resta negativa anche un po' dopo c . Questo è assurdo perché se c è l'inf, allora ci sono punti in cui $f(x) \geq 0$ vicini quanto voglio a c .

— o — o —

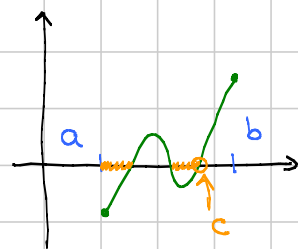


Oss. Potrei definire il p.to c come

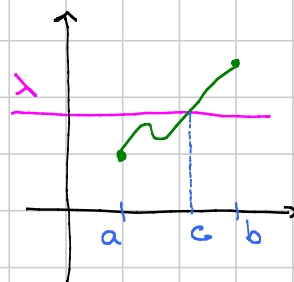
$$c = \sup \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$$

 Veniva lo stesso c ?

— o — o —



Corollario 1 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Supponiamo che $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$.
 Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$.
 (Teorema di esistenza dei valori intermedi)



[Dim.: basta applicare l'esistenza degli zeri alla
 funzione $g(x) = f(x) - \lambda$]

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$\sin x + \log x = 10$$

 ha almeno una soluzione reale

Basta trovare un intervallo $[a, b]$ ai cui estremi la funzione
 assume valori < 10 e > 10 . Ovviamente $f(x) = \sin x + \log x$.

Prendo $a = 1$: $f(1) = \sin 1 < 10$

Prendo $b = e^{100}$: $f(e^{100}) = \sin e^{100} + \log e^{100} = \sin \dots + 100 > 10$

Quindi nell'intervallo $[1, e^{100}]$ c'è almeno una soluzione.

Esempio 2 Consideriamo $f(x) = x^7 + \cos x + 13 \log(5 + x^2)$
 Domanda: $f(x)$ è surgettiva?

Cosa devo fare per dimostrare che è surgettiva? Devo dimostrare che
 $f(x) = \lambda$ ha soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Osserviamo ora che $f(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Queste 3 informazioni implicano la surgettività.

Infatti: fisso $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poiché $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$,

esiste un p.to a in cui $f(a) < \lambda$.

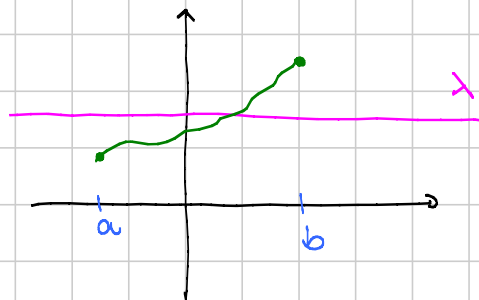
Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$,

esiste un p.to $b > a$ in cui $f(b) > \lambda$

(infatti $f(x) > \lambda \quad \forall x \geq k$).

Quindi per il teorema di esistenza dei valori intermedi esiste $c \in (a, b)$

t.c. $f(c) = \lambda$.



Quindi l'esistenza dell'intervallo $[a, b]$ su cui applicare il teorema è data dalla definizione di limite.

Esempio 3 L'equazione $\sin x + \log x = 0$ ha almeno una soluzione reale.

Considero $f(x) = \sin x + \log x$. Questa è continua in $(0, +\infty)$.

Inoltre

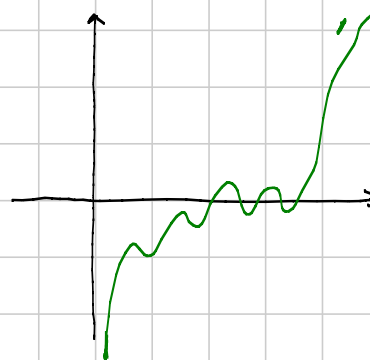
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Queste informazioni bastano per concludere che $f(x)$ è surgettiva, quindi

$$f(x) = \lambda$$

ha soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.



Esempio 4 L'equazione $\log(1+x^2) - \cos x = 0$
ha almeno 2 soluzioni.

Fatti importanti

- è continua in tutto $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Ora sappiamo che esiste almeno una soluzione $c > 0$

Per dimostrare che esiste almeno una soluzione $c < 0$ ci sono due modi.

1° modo: calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2° modo: osservare che $f(x)$ è pari, quindi se $f(c) = 0$, allora $f(-c) = f(c) = 0$.

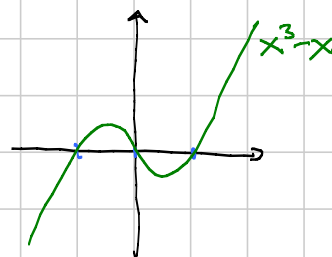
Esempio 5 Sia $p(x)$ un polinomio di grado DISPARI. Allora, visto come funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di sicuro suriettivo.

Infatti i limiti a $\pm\infty$ sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$.

(occhio: $p(x) = -3x^7 + x^4 + 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$)

Non è detto che $p(x)$ sia invertivo. Ad esempio

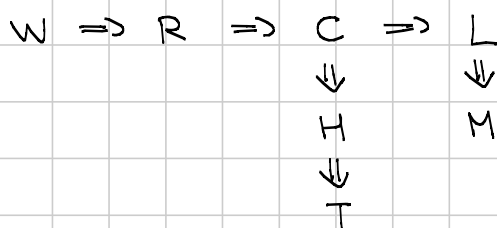
$p(x) = x^3 - x$ si annulla per $x = 0, 1, -1$



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 046

Titolo nota

02/12/2010

IndiceWEIERSTRASS $\Rightarrow$ ROLLE $\Rightarrow$ CAUCHY $\Rightarrow$ LAGRANGE $\Downarrow$ $\Downarrow$

HÔPITAL

MONOTONIA

guarda vista

 $\Downarrow$

TAYLOR

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$ (ii) $\exists x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$.I punti x_0 che verificano la (ii) sono detti punti di massimo.Oss. M è "una y ", cioè la massima quota raggiunta dalla funzione. Non è obbligato ad esistere, ma quando esiste è unico.Il pto di max. è "una x ". Esiste se e solo se esiste M e non è obbligato ad essere unico.

— o — o —

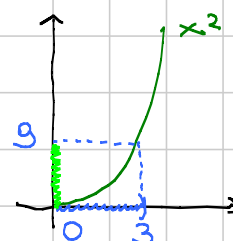
Definizioni analoghe valgono per minimo e punti di minimo.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $A = [0, 3]$.

$$\min \{ f(x) : x \in A \} = 0 \quad \text{pto di min: } x = 0$$

$$\max \{ f(x) : x \in A \} \text{ N.E.} \quad \sup \{ f(x) : x \in A \} = 9$$



Teorema di Weierstrass Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
 ↓ intervallo (quindi limitato)
 estremi COMPRESI

Allora max e min esistono per forza.

Esempio 2 $f(x) = \arctan x$ $A = [1, +\infty)$

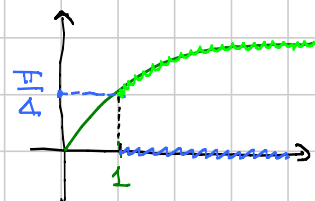
Non posso applicare W. perché l'insieme non è un intervallo

$$\min \{ \arctan x : x \in [1, +\infty) \} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

P.to di minimo: $x=1$.

$$\max \{ \arctan x : x \in [1, +\infty) \} \text{ N.E.}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad \} = \frac{\pi}{2}$$



Ricerca di punti di max / min. Supponiamo di sapere che
 max / min esistono in $[a, b]$

Allora i candidati ad essere p.ti di max / min ricadono in una di queste 3 categorie

- ① Punti stazionari interni: p.ti $x \in (a, b)$ b.c. $f'(x) = 0$
- ② Punti singolari interni: p.ti $x \in (a, b)$ b.c. $f'(x)$ non esiste
- ③ Bordo: $x=a$ e $x=b$.

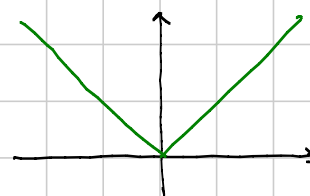
Esempio 3 $f(x) = |x|$ $A = [-2, 2]$

$$\min \{ f(x) : x \in [-2, 2] \} = 0$$

P.to di min: $x=0$ (categoria ②)

$$\max \{ f(x) : x \in [-2, 2] \} = 2$$

P.ti di max: $x=-2$ e $x=2$ (categoria ③)



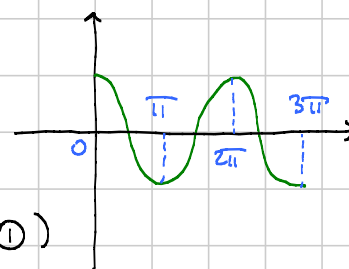
Esempio 4 $f(x) = \cos x$ $A = [0, 3\pi]$

$$\max \{ \cos x : x \in [0, 3\pi] \} = 1$$

p.ti di max: $x=0$ (categoria ③) e $x=2\pi$ (cat. ①)

$$\min \{ \cos x : x \in [0, 3\pi] \} = -1$$

p.ti di min: $x=\pi$ (cat. ①) e $x=3\pi$ (cat. ③).



Dim. (della ricerca di p.ti di max/min).

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia x_0 un p.to di max (esiste per W.).

Dove si può trovare x_0 ?

- Sul bordo, quindi è in categoria ③
- In (a, b) e $f'(x_0)$ non esiste, quindi è in categoria ②
- In (a, b) e $f'(x_0)$ esiste, e in questo caso voglio dimostrare che $f'(x_0) = 0$. Considero il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{che segue ha?}$$

Il numeratore è sempre ≤ 0 perché x_0 è un p.to di max, cioè $f(x_0) \geq f(x_0+h)$, quindi $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$. Quindi

Per $h > 0$ ho che $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$, quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Per $h < 0$ ho che rapp. increm. ≥ 0 , quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

concludo dopo
video

Quindi l'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

(Ho usato che $f'(x_0)$ esiste quando ho detto che il limite per $h \rightarrow 0^+$ e per $h \rightarrow 0^-$ esistono e sono uguali.)

Esempio 5 $f(x) = x^2 - x^3$ $A = [0, 1]$

Max e min esisto per W. Candidati:

- ① $f'(x) = 0$; $2x - 3x^2 = 0$; $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ unico in $(0, 1)$
- ② $f'(x)$ non esiste: $\emptyset$
- ③ $x = 0$ e $x = 1$.

Quindi i candidati ad essere pti di max / min sono

$$x=0, x=\frac{2}{3}, x=1.$$

Basta sostituire nella funzione !!!

$$x=0 \rightsquigarrow f(0)=0$$

$$x=\frac{2}{3} \rightsquigarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{12-8}{27} = \frac{4}{27}$$

$$x=1 \rightsquigarrow f(1) = 1-1=0$$

Quindi

$$\max \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = \frac{4}{27} \quad \text{P.to di max : } x = \frac{2}{3}$$

$$\min \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = 0 \quad \text{P.ti di min : } x=0 \text{ e } x=1.$$

— 0 — 0 —

Esempio 6 $\max \{ \log(3 + \cos R(\sin^2 x + 5)) : x \in \mathbb{R} \}$

Esiste? W. non lo posso usare (forse...)

Però... $f(x)$ è continua e periodica. Un periodo è 2π .

Di conseguenza

$$\begin{aligned} & \max \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} \quad (\text{questo esiste per W.}) \\ &= \max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Idee per il minimo.

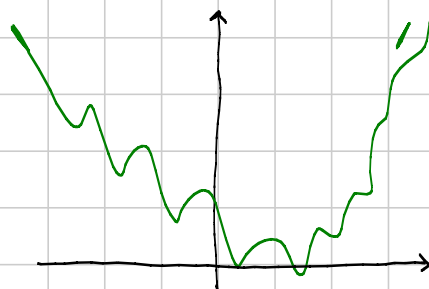
— 0 — 0 —

Esempio 7 $\min \{ x^2 + \sin(x^5 + 7) : x \in \mathbb{R} \}$

Esiste? W. non lo posso usare (forse...)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Questo basta per garantire l'esistenza del minimo.



ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 047

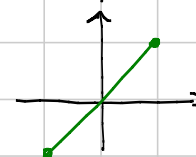
Titolo nota

02/12/2010

Teoremi sulle funzioni continue e derivabili

$$W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$$

$$\begin{array}{c} \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} M \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{array}$$
Teorema di ROLLE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo(i) f continua in $[a, b]$ (ii) f derivabile in (a, b) (se è derivabile in $[a, b]$, meglio)(iii) $f(a) = f(b)$.Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.Osservazioni ① f serve che sia continua e che sia derivabile per ogni $x \in (a, b)$.Basta prendere $f(x) = |x|$
in $[-1, 1]$ ② Serve che $f(a) = f(b)$.Altrimenti basta prendere $f(x) = x$ Dim.: Sia c il punto di max (questo esiste per W.).Se $c \in (a, b)$, allora di sicuro $f'(c) = 0$ (non può essere che $f'(c)$ non esiste per l'ipotesi (ii)).Potrebbe però essere che c sta sul bordo.Prendo allora come c il p.to di minimo (o uno dei p.ti di minimo). Se $c \in (a, b)$ ho finito.L'unico caso "sfortunato" è se sia il max, sia il minimo vengono assunti sul bordo. Ma in tal caso per l'ipotesi (iii) la funzione è costante, ed in questo caso $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$.

— o — o —

Oss. Sostanzialmente, se $f(a) = f(b)$ non può essere che a e b siano gli unici punti di max/min.

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a,b]$,

(ii) f e g derivabili in (a,b) .

Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c) \quad \text{1ª tesi}$$

Se inoltre supponiamo che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora posso dividere e riscrivere la tesi come

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{2ª tesi}$$

Dico: Considero la funzione

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

Vediamo le proprietà di $\varphi(x)$.

(i) È continua in $[a,b]$ perché lo sono $f(x)$ e $g(x)$

(ii) " derivabile in (a,b) " " " "

(iii) dico che $\varphi(a) = \varphi(b)$. Infatti

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) \\ &= f(b) g(a) - g(b) f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) \\ &= -f(a) g(b) + g(a) f(b) \end{aligned}$$

Quindi posso applicare il teorema di ROLLE alla funzione $\varphi(x)$.

Otengo che $\exists c \in (a,b)$ tale che $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$(f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = 0$$

e questa è la prima tesi.

Per passare dalla prima tesi alla seconda tesi devo

• dividere per $g'(c)$ e questo posso farlo perché è $\neq 0$ grazie all'ipotesi (iii)

- dividere per $g(b) - g(a)$. Perché è $\neq 0$? Se fosse uguale a 0, avrei che $g(b) = g(a)$, quindi potrei applicare Rolle a $g(x)$ e avrei che esiste un p.to in (a,b) in cui g' si annulla, il che è contro l'ipotesi (iii).

— 0 — 0 —

Oss. Prendo $[a,b] = [-1,1]$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x^3$
 le ipotesi (i) e (ii) sono banalmente soddisfatte, ma non posso dividere per $g(b) - g(a) = 1 - 1 = 0$.

Prendo ora $g(x) = x^3$ e $f(x) = x^2$. Ora posso dividere per $g(b) - g(a)$. Faccio il conto

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{0}{2} = 0$$

Esiste un p.to $c \in (-1,1)$ con $0 = \frac{f'(c)}{g'(c)}$? NO!

Dovrebbe essere $f'(c) = 0$, cioè $c = 0$, quindi si annulla anche $g'(c)$ e diventa $\frac{0}{0}$.

Quindi se l'ipotesi (iii) non è soddisfatta, non è detto che la 2ª tesi si possa scrivere.

— 0 — 0 —

Teorema di Lagrange Sia $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b) .

Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che

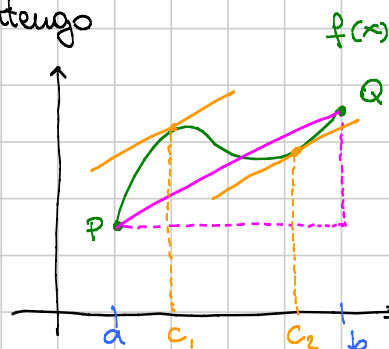
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Interpretazione geometrica Divido per $b-a$, e ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) = \text{coeff. angolare retta tg. nel p.to } c$$

coeff. angolare
retta PQ

Lagrange! esiste un p.to c
 in cui la retta tg. è //
 alla retta PQ



Dim. 1 Applico Cauchy con $g(x) = x$. L'ipotesi (ii) è verificata perché $g'(x) = 1 \neq 0$ sempre. Quindi la 2ª tesi di Cauchy è:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

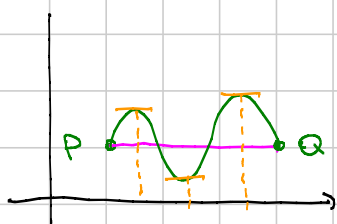
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1} \quad \text{e questa è la tesi di Lagrange.}$$

Dim. 2 Chiamo $\varphi(x) = f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x$,
o meglio

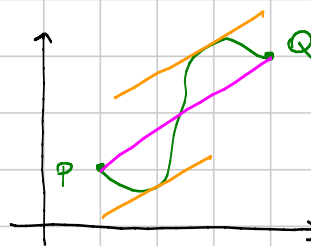
$$\varphi(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{retta parallela alla retta PQ}} x$$

Si verifica che $\varphi(a) = \varphi(b)$, cioè ho "radolizzato" la figura. Applicando Rolle a $\varphi(x)$ ottengo che esiste $c \in (a, b)$ con $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{cioè Lagrange}$$



ROLLE



LAGRANGE

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 048

Titolo nota

02/12/2010

Hôpital Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che stiamo facendo limiti per $x \rightarrow x_0^+$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma del tipo $\frac{0}{0}$

Supponiamo inoltre f e g continue e derivabili e $g'(x) \neq 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dim. Dire che la forma è del tipo $\frac{0}{0}$ è un po' come dire che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$.

Applico Cauchy nell'intervallo $[x_0, x]$
 $[a, b]$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & c_x & x \\ | & | & | \end{array}$$

Otteniamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Occhio: c dipende da x , quindi lo indico con c_x

Ora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \stackrel{\substack{\text{pongo} \\ y = c_x}}{\downarrow} = \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Infatti $\boxed{x_0} < \textcircled{c_x} < \boxed{x}$, quindi $c_x \rightarrow x_0^+$ per i carabinieri.

— o — o — o —

Teoremi di Monotonia Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

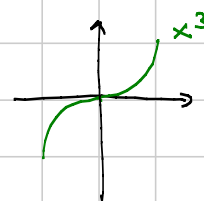
- (i) f continua in $[a, b]$,
- (ii) f derivabile in (a, b) .

Allora si hanno le seguenti implicazioni

- ① $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strettamente crescente in $[a, b]$
- ② $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ debolmente " in $[a, b]$
- ③ f strett. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ **NO!!!!**
- ④ f debolm. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- ③' f strett. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Esempio $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$

Allora $f(x)$ è strett. crescente, ma
 $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$.



Dim.: Prendiamo 2 punti qualunque
 tra a e b . Allora per Lagrange si ha



$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} f'(\alpha)$$

Se $f'(x) > 0$ sempre, allora $f'(\alpha) > 0$, quindi $f(d) - f(c) > 0$,
 cioè $f(d) > f(c)$. Questo implica la stretta crescenza.

Se invece $f'(x) \geq 0$ sempre, allora $f'(\alpha) \geq 0$, quindi
 $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$, cioè debole crescenza.
 Questa dimostra ① e ②.

Per dimostrare ③ e ④, che sono in fondo la stessa cosa,
 suppongo f strettamente crescente e calcolo i rapporti
 incrementali

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \frac{+}{+}$$



Quindi $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$

" $f'(x_0)$

↑ la disuguaglianza stretta non passa al limite.

Se f è debolmente crescente, allora il rapporto incrementale è solo ≥ 0 , e passando al limite ottengo ancora $f'(x) \geq 0$.

Osservazione Per $R \rightarrow 0^+$ i rapporti incrementali sono $\frac{+}{+}$
 Per $R \rightarrow 0^-$ " " " " $\frac{-}{-}$

Esempio 1 Quante soluzioni ha $3x + \cos x = 2010$?

Pongo $f(x) = 3x + \cos x$. È continua, è derivabile

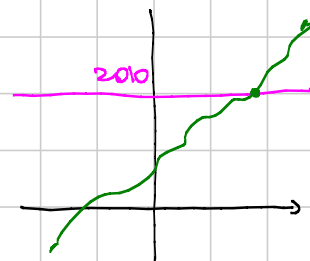
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Queste informazioni ci dicono che l'equazione ha almeno una soluzione, anzi la funzione $f(x)$ è surgettiva

Calcolo la derivata e ottengo

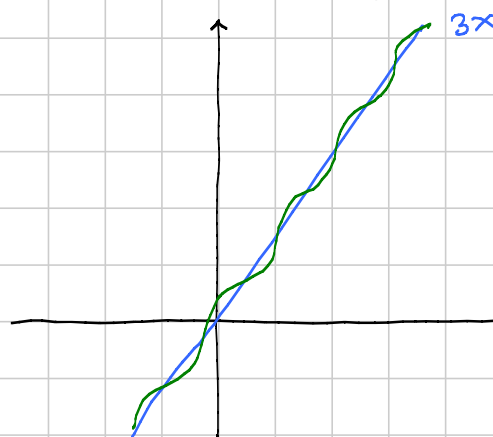
$$f'(x) = 3 - \sin x \geq 2 > 0$$



Per il teorema di monotonia, $f'(x) > 0$ sempre $\Rightarrow f$ strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Ma $f(x)$ strett. crescente $\Rightarrow f(x)$ iniettiva $\Rightarrow$ la soluzione è unica.

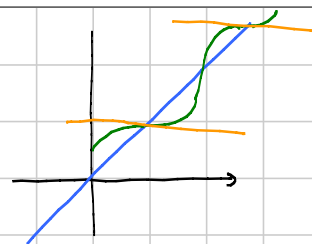
Non solo: abbiamo dimostrato che f è bigettiva.



Esempio 2 $f(x) = x + \cos x$

Banalmente surgettiva.

È iniettiva? È strett. crescente?



$$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \quad \text{però si può annullare}$$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ debolmente crescente in $\mathbb{R}$.

È pure strettamente crescente? Sì!

Se fosse debolmente crescente, ma non strettamente, allora esisterebbe un tratto piatto, ma allora ci

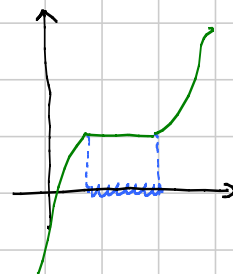
sarebbe un intero intervallo in cui

$f'(x) = 0$, ma nel nostro caso $f'(x) = 0$

solo in un po' di punti

($f'(x) \geq 0$ con ANNULLAMENTO SPORADICO

$\Rightarrow f$ strett. crescente).



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 049

Titolo nota

04/12/2010

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

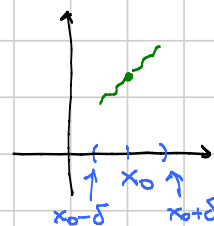
Capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to x_0 dato.

Monotonia 1 Sia $f(x)$ una funzione. Supponiamo che $f'(x_0) > 0$.

(segno della derivata in un p.to) Allora $\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$$



Achtung! Non ho detto che $f(x)$ è crescente, anche solo debolmente, in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

[Dim.: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$]

Visto che il limite è > 0 , vuol dire che il rapporto incrementale è > 0 per valori di h "vicini ad $h=0$ ", cioè $\exists \delta > 0$ t.c. rapp. increm. > 0 $\forall h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$.

Per $h \in (0, \delta]$ ho che denom. > 0 , quindi numer. > 0 , quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$, quindi un po' a dx di x_0 f vale più che in x_0 .
Per $h \in [-\delta, 0)$ ho che denom. < 0 , quindi numer. < 0 , quindi $f(x_0 + h) < f(x_0)$.]

— 0 — 0 —

Oss. Grazie a monotonia 1 so come è fatta la funzione vicino ad un p.to x_0 in cui $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$.

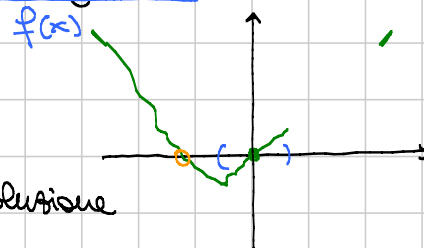
— 0 — 0 —

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione $\sin x + \log(1+x^2) = 0$ ha almeno due soluzioni reali.

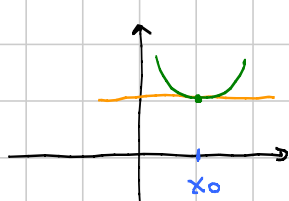
$x=0$ è una solus. $f'(x) = \cos x + \frac{2x}{1+x^2}$

$f'(0) = 1 \Rightarrow$ un po' prima di $x=0$ ho

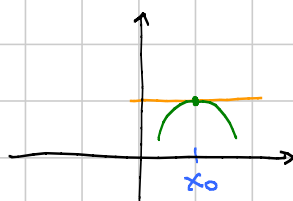
che $f(x) < 0$. A questo punto c'è un'altra soluzione $x < 0$.



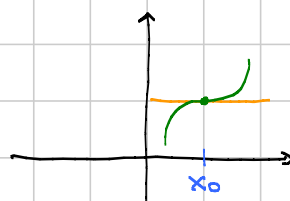
Studio locale di un p.to stazionario. Supponiamo ora che $f'(x_0) = 0$. Allora ci sono 5 possibili comportamenti



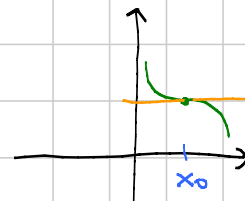
p.to di min.
locale (relativo)



p.to di max
locale



p.to di flesso a
tangente orizzontale
ascendente



p.to di fl.
a tg. orizz.
discendente

La quinta situazione è patologica

Criterio delle derivate successive Supponiamo che in x_0 si annullino le prime k derivate di f , ma non la $(k+1)$ -esima, cioè
 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0$ $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$.

Allora ci sono varie possibilità

k pari

- $\nearrow f^{(k+1)}(x_0) > 0$ flesso a tang. orizz. ascendente
- $\searrow f^{(k+1)}(x_0) < 0$ " " " discendente

k dispari

- $\nearrow f^{(k+1)}(x_0) > 0$ p.to di minimo relativo
- $\searrow f^{(k+1)}(x_0) < 0$ p.to di massimo relativo

Oss. La quinta possibilità può presentarsi solo quando ci sono derivate che non esistono, oppure esistono ma sono tutte nulle.

[Dim.] Ci sono 4 casi. Supponiamo k dispari e $f^{(k+1)}(x_0) > 0$. Per la formula di Taylor con centro in x_0 avremo che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} R^{k+1} + o(R^{k+1})$$

tutti i termini intermedi si annullano,

Ne segue che (porto $f(x_0)$ a sx e divido per R^{k+1})

$$\frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R^{k+1}} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} + \frac{o(R^{k+1})}{R^{k+1}}$$

↓
0

Questo ci dice che la frazione a sinistra tende, per $R \rightarrow 0$, ad un limite positivo (perché ho supposto $f^{(k+1)}(x_0) > 0$).

Ma allora la frazione è > 0 per ogni $R \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$.

Essendo $k+1$ pari, avremo che il denominatore R^{k+1} è sempre positivo per $R \neq 0$ (R^{pari}). Quindi anche il numeratore è sempre positivo, quindi

$$f(x_0+R) > f(x_0) \quad \forall R \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

Quindi appena mi sposto la funzione vale di più, quindi x_0 è un pto di minimo locale.

— o — o —

Per esercizio fare gli altri 3 casi.

— o — o —

Il criterio delle derivate successive si può riassumere dicendo che

una funzione si comporta vicino ad un pto x_0 come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 2 L'equazione $\sin x^4 - \sin x^2 = 0$ ha almeno 3 soluzioni reali.

Pongo $f(x) = \sin x^4 - \sin x^2$.

Infatti $f(0) = 0$, poi f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$



Studio locale in $x=0$: $f(x) = \underbrace{-x^2}_{\text{viene fuori da } \sin x^2} + o(x^2) \Rightarrow f(x) \text{ si comporta vicino a } x=0 \text{ come } -x^2, \text{ quindi max. locale}$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 050

Titolo nota

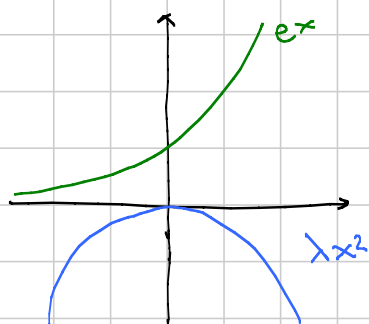
04/12/2010

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI Stabilire come è fatto il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto l'insieme di definizione.

Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

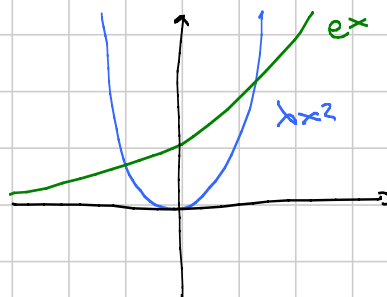
Modo sbagliato di farlo. Sovrapporre i grafici



$\lambda < 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

$\lambda \leq 0 \rightarrow 0$ soluzioni

$\lambda > 0 \rightarrow 2$ soluzioni



$\lambda > 0 \Rightarrow$ due soluzioni

Achtung! MAI fidarsi della sovrapposizione di 2 grafici!

Modo più corretto: isolare il parametro

$$e^x = \lambda x^2$$

divido per x^2

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$



magari dopo aver osservato che $x=0$ non è mai soluzione, quindi dividendo non perdo soluzioni

Ora studio $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ e poi vado ad intersecare con rette parallele all'asse x .

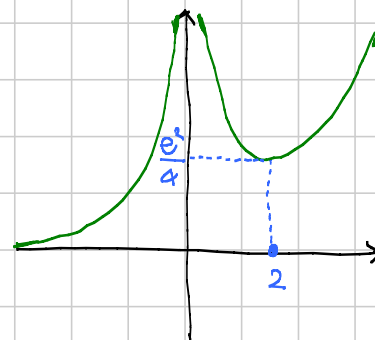
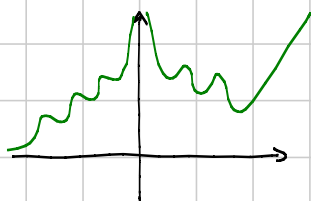
- ① Simmetrie : in questo caso nessuna.
 ② Zona di definizione : $x \neq 0$ + continuità nella stessa zona
 ③ Limiti agli estremi della zona di definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- ④ Zeri e segno (dove si annulla e dove è >0 oppure <0) : in questo caso è sempre >0 per ogni $x \neq 0$.

Cerchiamo di capire come è fatto il grafico.
 Ci aspettiamo un andamento così $\rightarrow$
 ma non possiamo escludere che sia così !



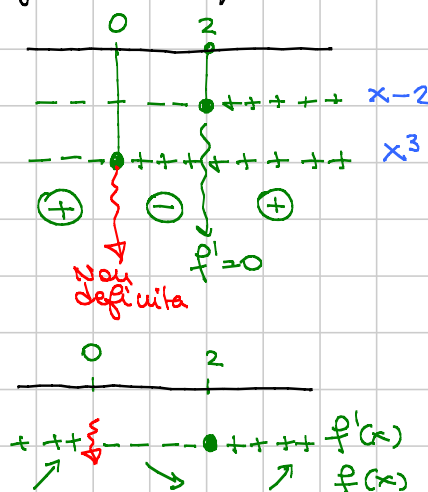
- ⑤ Derivabilità e segno della derivata : $f(x)$ è derivabile $\forall x \neq 0$ e

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \frac{x^2 - 2x}{x^4} = e^x \frac{x-2}{x^3}$$

Studio il segno della derivata (disuguaglianze da percorso!), cioè capire dove è >0 , $=0$, <0 , non definita. In questo caso basta studiare $\frac{x-2}{x^3}$!

Quindi

$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x > 2 \\ =0 & \text{per } x = 2 \\ <0 & \text{per } 0 < x < 2 \end{cases}$$



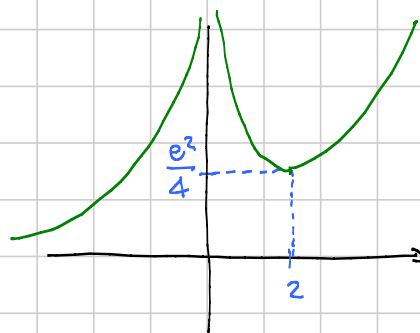
Ora siamo in grado di rispondere alla domanda di partenza, relativa al numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$

$$\lambda \leq 0 \rightarrow 0 \text{ soluzioni}$$

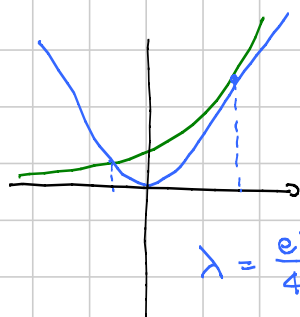
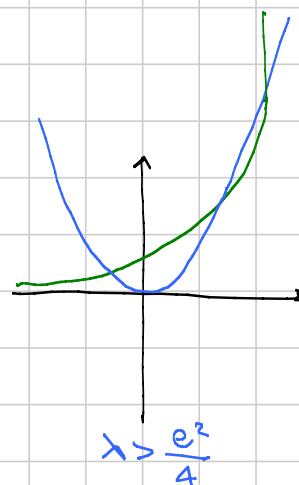
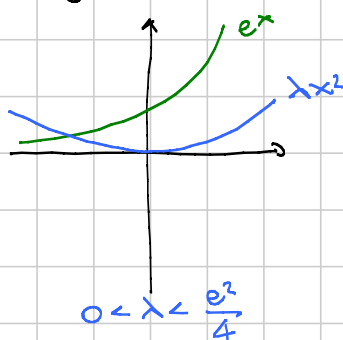
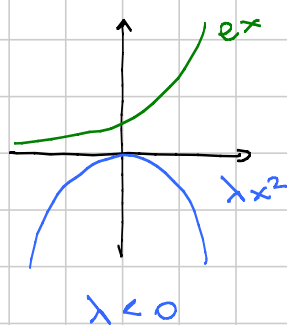
$$0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightarrow 1 \text{ soluzione (negativa)}$$

$$\lambda = \frac{e^2}{4} \rightarrow 2 \text{ soluzioni (1 neg., 1 pos.)}$$

$$\lambda > \frac{e^2}{4} \rightarrow 3 \text{ soluzioni (1 neg., 2 pos.)}$$



Reinterpretazione dei 2 grafici sovrapposti



parabola ed esponenziale tangenti. Il valore di λ per cui c'è tangenza si vede solo ricavando λ .

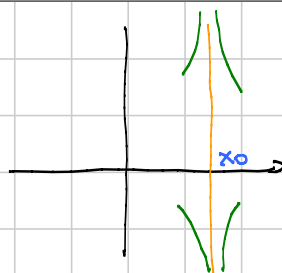
Ulteriori elementi che può essere utile vedere nel grafico.

⑥ Asintoti Orizzontali Si dice che una retta $y = l$ è asintoto orizzontale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
 " " $f(x)$ " $x \rightarrow -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Per trovare gli asintoti orizzontali basta fare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. In questo caso la retta $y=0$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow -\infty$

Verticali

Una retta verticale $x = x_0$ è
 asintoto verticale per una
 certa $f(x)$ se accade almeno
 una di queste 4 possibilità



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Nell'esempio la retta $x=0$ è asintoto verticale.

Altro esempio di calcolo di asintoti $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Nessuna simmetria, definita e continua $\forall x \neq 0$.

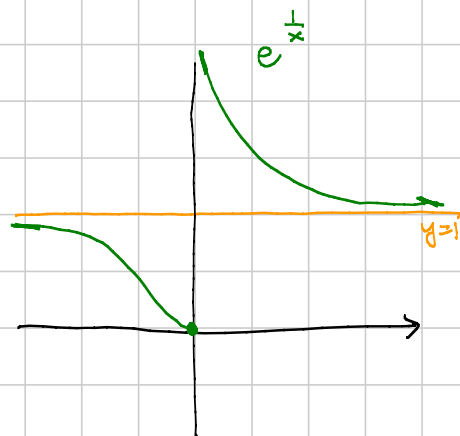
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+ \leadsto \text{asintoto orizz. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^- \leadsto \text{asintoto orizz. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [e^{+\infty}] = +\infty \leadsto \text{asint. vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty}] = 0$$

$f(x) > 0$ dove definita



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 051

Titolo nota

04/12/2010

Esempio 1 Risolvere la disequazione

$$x + 2 \sin x \geq 0$$

oppure l'eq. $x + 2 \sin x = 0$ Studio la funzione $f(x) = x + 2 \sin x$.

- ① Simmetrie: dispari
- ② Definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ③ Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ed essendo dispari $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- ④ Zeri e segno: per ora non si riesce a fare: PAZIENZA!
- ⑤ Monotonia, cioè segno della derivata.

$$f'(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

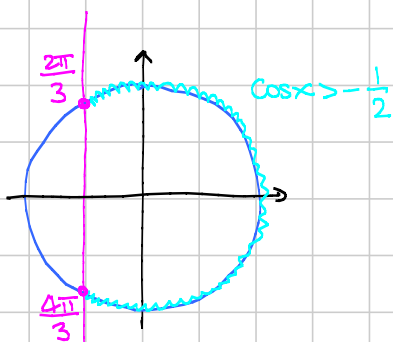
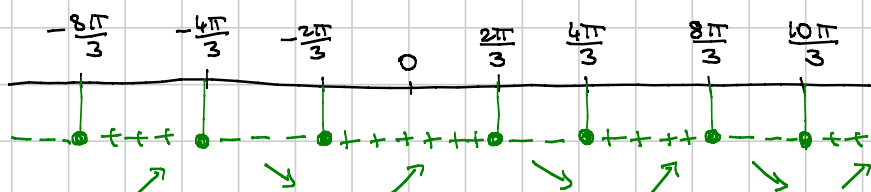
$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

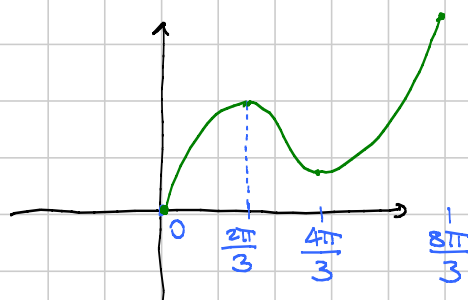
Quindi il segno di $f'(x)$ si può rappresentare così:Quindi $f(x)$ alterna zone di crescita e decrescita.Osservazione

$$f(x) > 0 \text{ quando } x > 2$$

$$f(x) < 0 \text{ quando } x < -2$$

Quindi eventuali soluzioni di $f(x) = 0$ si trovano per $x \in [-2, 2]$, quindi se uno deve risolvere $f(x) = 0$ o anche $f(x) > 0$ basta studiare il grafico in $[-2, 2]$.

Domanda: $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ è maggiore o minore di zero?



$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{4\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0 \end{aligned}$$

A quel punto la funzione non diventa più negativa perché siamo già per $x > 2$. Sugli $x < 0$ la situazione è simmetrica.

Ora sappiamo che $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Esempio 3 Risolvere la disequazione $x \geq \log(1+x)$

Modo sbagliato (pericoloso): sovrapporre i 2 grafici

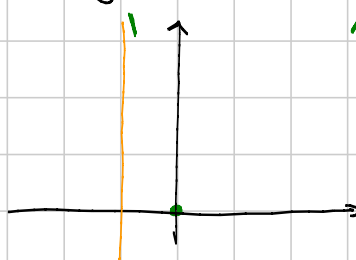


Modo corretto: porto tutto dalla stessa parte e studio la funzione $f(x) = x - \log(1+x)$ (devo risolvere $f(x) \geq 0$)

Nessuna simmetria, definita e continua per ogni $x > -1$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad [-1 - (-\infty)]$$

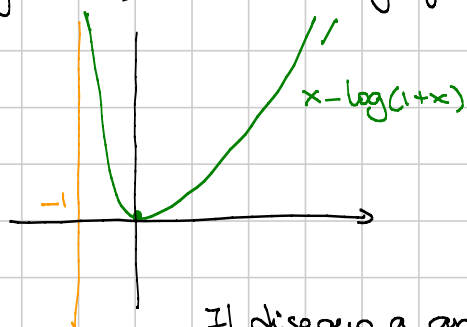


$f(x) \geq 0$ non si risolve per ora: PAZIENZA.

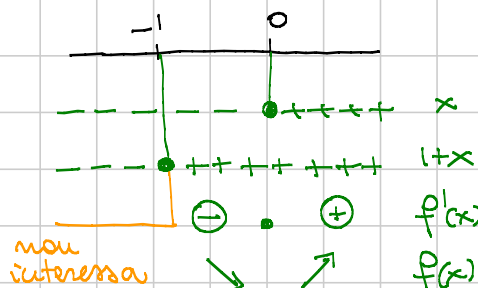
Studio del segno di $f'(x)$, definita per ogni $x > -1$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{\cancel{1+x}-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Abbiamo scoperto che $f(x)$ decresce in $(-1, 0)$ e poi cresce in $(0, +\infty)$. Quindi in $x=0$ c'è un minimo (locale e anche globale). Quindi il grafico corretto è



Quindi $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > -1$
quindi
 $x \geq \log(1+x) \quad \forall x > -1.$



Il disegno a grafici sovrapposti era sbagliato

Esempio 4 Risolvere
 $x \geq \arctan x^2$

Come è fatta $\arctan x^2$?

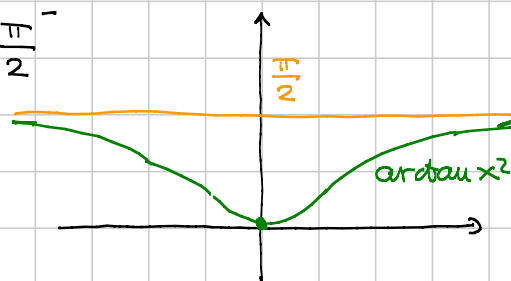
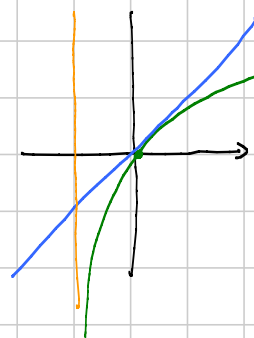
Pari, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x^2 = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

quindi vicino a $x=0$ si comporta come x^2



Studio ora $f(x) = x - \arctan x^2$.

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Noni studiare $f'(x) = 0$ e $f'(x) > 0$, ma non sono capace (per ora...)

Rilancio: studio a sua volta $g(x) = 1+x^4-2x$.

$$g'(x) = 4x^3 - 2 = 2(2x^3 - 1)$$

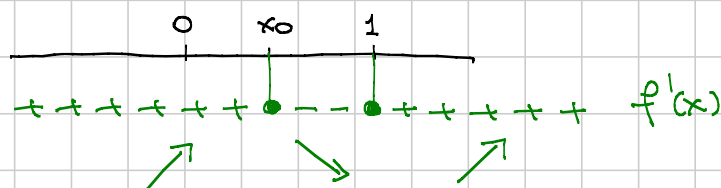
Quindi

$$g'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ e } g'(x) > 0 \text{ per } x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

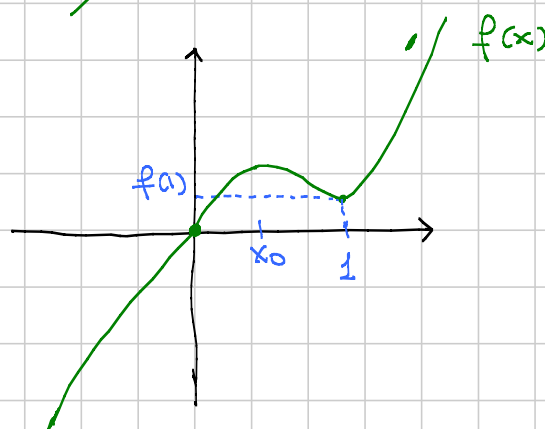
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 1 - \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2}} < 0$$

Quindi



$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

È bastato controllare $f(1)$ per sapere che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 052

Titolo nota

04/12/2010

DISUGUAGLIANZE CLASSICHE

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \geq 0$$

In tutte vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow x = 0$

$$x \geq \log(1+x) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x \geq 0$$

già fatto

Tutte queste disuguaglianze si possono dimostrare con opportuni studi di funzione

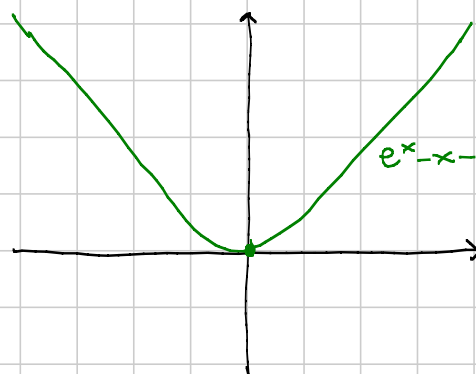
Esempio 1 Dimostrare che $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e vale il segno di uguale $\Leftrightarrow x = 0$.

Studio $f(x) = e^x - x - 1$. Nessuna simmetria, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [e^{-\infty} - (-\infty) - 1] = +\infty$$

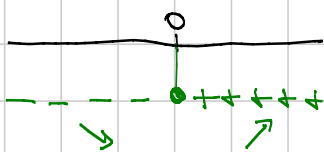
$$= 0 + \infty - 1$$



Derivata: $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$



$f'(x)$
 $f(x)$

— 0 — 0 —

Quindi $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
quindi
 $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2 $\sin x \leq x$.

Studio $f(x) = x - \sin x$

Dispari, definita e continua ovunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$f(0) = 0$. Quando il segno di $f'(x)$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico (cioè non si annulla in un intero intervallo).

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. crescente.

Ora sappiamo che $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$, quindi

$$\sin x < x \quad \text{per } x > 0$$

$$\sin x = x \quad \text{per } x = 0$$

$$\sin x > x \quad \text{per } x < 0$$

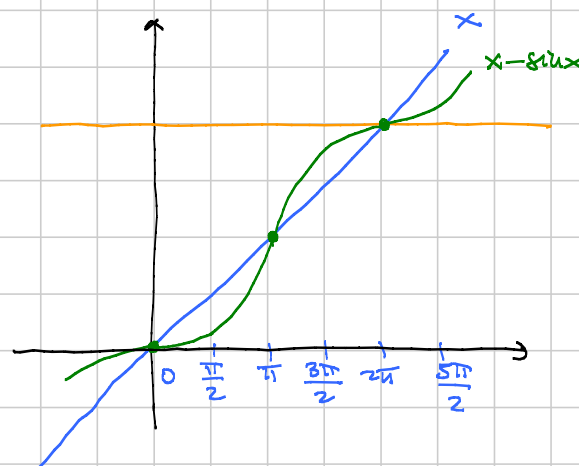
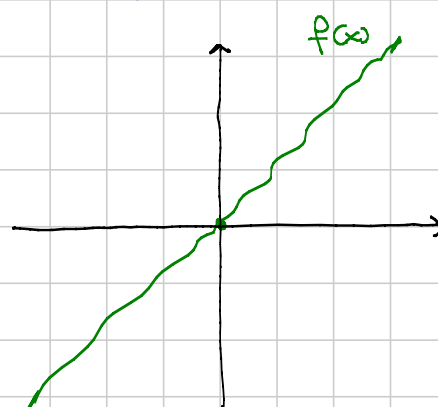
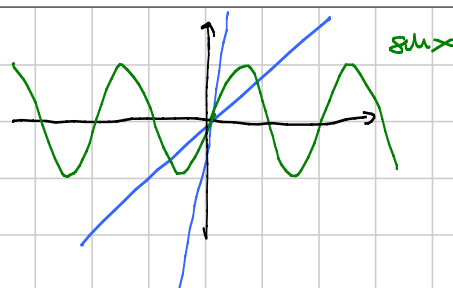
Domanda: com'è fatto il grafico di $f(x) = x - \sin x$ vicino a $x=0$?

Quando Taylor: $f(x) = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Quindi vicino a $x=0$ la funzione

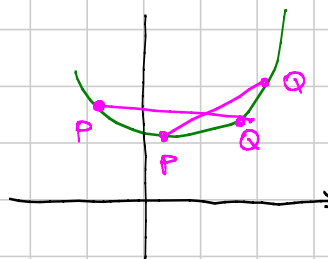
$f(x)$ si comporta come $\frac{1}{6}x^3$.

Nota bene: $x=0$ è un p.to stazionario, cioè tangente orizzontale.



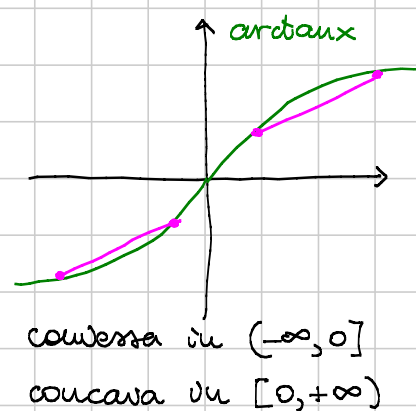
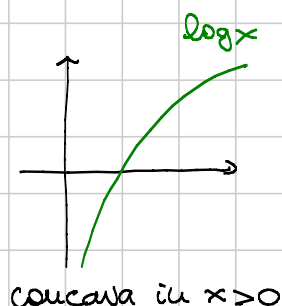
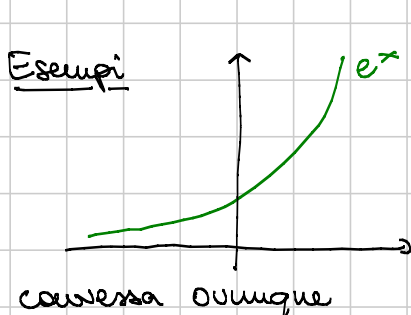
Concavità e convessità. Una funzione è convessa in un intervallo se

geometricamente: per ogni coppia di punti P e Q del tratto di grafico corrispondente si ha che il segmento PQ sta sopra il grafico.



La funzione è concava se il segmento PQ sta sempre sotto.

Esempi



In $x=0$ c'è un cambio da convessa a concava. I p.ti in cui succede questo (o il viceversa) sono detti p.ti di flesso. Cosa succede nei p.ti di flesso?

- Le funzioni convexe stanno sopra le proprie rette tangenti
- Le funzioni concave stanno sotto le proprie rette tangenti
- In un p.to di flesso, da una parte la funzione sta sopra la retta tangente, dall'altra sta sotto. Quindi la retta tangente in un p.to di flesso "attraversa il grafico."

