

- (e) nulla sul sottospazio generato da $(1, 2, 3)$,
- (f) definita positiva su almeno un sottospazio di dimensione 2,
- (g) definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 1,
- (h) definita positiva sul sottospazio generato da $(1, 1, 3)$ e $(0, 2, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $a > -\frac{4}{9}$, cioè quando segnatura $++-$

(g) serve almeno un segno $-$ e questo è vero $\forall a$

(e) Basta imporre $q(1, 2, 3) = 0$

$$1 + a \cdot 4 + 18 + 24 = 0 \leadsto \text{Trovo } a$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 6×2 4×2

(Achtung! Per venire o da qualche parte, non serve che ci sia l'autovalore nullo. Basta che da parti con il $+$ si semplifichino con quelle con il $-$)

(e) $\text{Span}(\overset{v_1}{(1, 1, 3)}, \overset{v_2}{(0, 2, 1)})$ vogliamo che in questo s.sp. sia definita positiva.

1° modo Mi scrivo la matrice della forma ristretta al sottospazio

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_A & \langle v_1, v_2 \rangle_A \\ \langle v_2, v_1 \rangle_A & \langle v_2, v_2 \rangle_A \end{pmatrix}$$

Impongo che la matrice sia def. pos. cioè (essendo 2×2)

$$\text{Tr} > 0 \text{ e } \text{Det} > 0$$

2° modo I punti dello span si scrivono come

$$t(1, 1, 3) + s(0, 2, 1) = (t, t+2s, 3t+s)$$

Adesso calcolo

$q(t, t+2s, 3t+s)$ = forma quadratica nelle variabili (t, s)
e imposto che questa sia def. pos. (provare a trovare la matrice)

3° modo Scrivo il piano in Cartesiana

$$\begin{vmatrix} * & + & * \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow (-5, -1, 2) \rightsquigarrow 5x + y - 2z = 0$$

cioè valevole $y = 2z - 5x$

Adesso calcolo $q(x, 2z - 5x, z)$ e impongo che sia > 0 tranne che per $x = 0 = z$

$$\begin{aligned} q(x, 2z - 5x, z) &= x^2 + a(2z - 5x) + 6xz + 4(2z - 5x)z \\ &= \text{forma in } x \text{ e } z \text{ che posso studiare.} \\ &\quad \text{---o---o---} \end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$(p(0) + 2p(1))(q(0) + 2q(1)),$$

L'espressione definisce un prodotto scalare?

- ① Coppia di pol. $p(x)$ e $q(x) \rightarrow$ numero ☺
- ② Simmetrica? ☺
- ③ Se al posto di p metto λp ☺
- ④ Se al posto di p metto $p_1 + p_2$ ☺

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= (3a_0 + 2a_1 + 2a_2)(3b_0 + 2b_1 + 2b_2) \\ &= \underline{9a_0b_0} + 6(a_0b_1 + b_0a_1) + 6(a_0b_2 + b_0a_2) \\ &\quad + \underline{4a_1b_1} + \underline{4a_2b_2} + 4(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

La matrice associata al prodotto scalare è

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{matrix}$

Alternativa bovina (di più)

$$\langle x, x \rangle = (0+2)(0+2) = 4 \quad \ddot{\smile}$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = (0+2)(1+2) = 6 \quad \ddot{\smile}$$

Analogamente trovo tutto il resto

Stabilire se è def. positivo

Sylvester 1-2-3 $\ddot{\smile}$ 2-3-1 $\ddot{\smile}$ Va sempre male al 2×2

Questo comunque ci dice che non può essere positivo ovunque (già solo rispetto a Span $(1, x)$ si può annullare)

$$\text{Det} = 36 \cdot 4 + 36 \cdot 4 + 36 \cdot 4$$

$$- 36 \cdot 4 - 36 \cdot 4 - 36 \cdot 4 \quad (\text{c'erano due righe uguali} \quad \ddot{\smile})$$

$$= 0$$

Sicuramente c'è uno 0. Le possibilità sono

++0

+-0

--0

Tr > 0

0 ancora più zeri

No: perché il rango dovrebbe essere 1

$$\langle p, p \rangle = (p(0) + 2p(1))^2 \geq 0$$

quindi non possiamo avere una direzione di negatività
l'unica possibilità è ++0.

Alternativa: la forma quadratica associata è

$$q(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12xy + 12xz + 8yz$$

$$= (3x + 2y + 2z)^2$$

il che dice che la segnatura è +00

Quindi: era sbagliato dire che il rango non è 1

(è 1 perché le colonne sono tutte multiple di $(3, 2, 2)$)

La Sylvester è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una base Sylvesterizzante è

$$v_2 = \begin{pmatrix} x - x^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑

base di ker

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑

2-3x

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑

se è indep. dagli altri, diviso per la costante giusta

Esercizio DIVERSO

Forma canonica di

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1} A M$$

Come trovo la M di passaggio?

Seconda e terza colonna sono autovettori di $\lambda=0$ ~ base di $\ker$

Prima colonna = autovettore di $\lambda=17$

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 & 6 \\ 6 & -13 & 4 \\ 6 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

Con un po' di pazienza trovo un elemento del $\ker$

Se voglio posso fare la M ortogonale

— 0 — 0 —