

$$x^2 + ay^2 + 3z^2 + 6xy - yz,$$

- (e) nulla sul sottospazio generato da $(1, 2, 3)$,
- (f) definita positiva su almeno un sottospazio di dimensione 2,
- (g) definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 1,
- (h) definita positiva sul sottospazio generato da $(1, 1, 3)$ e $(0, 2, 1)$.

(e) Basta sostituire $(1, 2, 3)$ e imporre che venga 0

$$q(1, 2, 3) = 1 + 4a + 27 + 12 - 6 = 0 \quad \leadsto \text{trovo } a$$

(f) Almeno due segni + nella segnatura $(+++ , ++- , ++0)$

(g) Almeno un segno -

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & a & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-3-2 in modo da avere il parametro sdo alla fine

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1 \quad \text{Det } 2 \times 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Det } 3 \times 3 &= 3a - 27 - \frac{1}{4} = 3a - \frac{108 + 1}{4} \\ &= 3a - \frac{109}{4} \end{aligned}$$

• Se $3a - \frac{109}{4} > 0$, cioè $a > \frac{109}{12}$, allora i segni sono $\underbrace{+++}_{PPP}$ quindi segnatura $+++$

• Se $a < \frac{109}{12}$, allora $\underbrace{++-}_{PPV}$, quindi segnatura $+-$

• Se $a = \frac{109}{12}$, allora la segnatura è $++0$, perché possiamo fare almeno 3 cose

→ trovare gli autovalori

→ completare i quadrati

→ osservare che $q(x, y, z)$ è definita positiva in

$$\text{Span}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

che ha dimensione = 2.

(e) Sottospazio generato da $(1,1,3)$ e $(0,2,1)$, cioè
 $\text{Span}((1,1,3), (0,2,1))$

Scrivo l'equazione cartesiana del s.sp.

$$\begin{array}{ccc} + & * & * \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (-5, -1, 2) \quad [\text{Verifico che è ortogonale :}]$$

$$\rightsquigarrow 5x + y - 2z = 0, \text{ cioè } y = 2z - 5x$$

Sostituisco y nella formula di q :

$$\begin{aligned} q(x, 2z - 5x, z) &= x^2 + a(2z - 5x)^2 + 3z^2 + 6x(2z - 5x) - (2z - 5x)z \\ &= \text{svolgendo i conti viene una forma} \\ &\text{nelle variabili } x \text{ e } z, \text{ e questa deve} \\ &\text{essere definita positiva.} \end{aligned}$$

2° modo Tutti gli elementi del s.sp. sono del tipo
 $t(1,1,3) + s(0,2,1) = (t, t+2s, 3t+s)$

Quindi deve succedere che

$$q(t, t+2s, 3t+s)$$

deve essere def. pos. come forma in (t, s)

[Verificare che venga uguale nei due modi !.]

$$x^2 - y^2 + az^2 - w^2$$

$$x^2 + ay^2 - w^2$$

$$\rightarrow a > 0 : ++--$$

$$\rightarrow a < 0 : +---$$

$$\rightarrow a = 0 : +- - 0$$

$$\rightarrow a > 0 : ++ - 0$$

$$\rightarrow a < 0 : + - - 0$$

$$\rightarrow a = 0 : + - 0 0$$

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - w^2 - 2xz + ayw$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & a/2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sylvester 1-2-3-4

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -2 + 1 = -1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -1$$

$$\text{Det } 4 \times 4 = -1(-1) + \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot 1$$

Laplace

$$4^{\text{a}} \text{ riga} = 1 - \frac{a^2}{4} = \frac{4-a^2}{4}$$

- Se $-2 < a < 2$, allora $\text{Det } 4 \times 4 > 0$, quindi Sylvester dice

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - & + \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \\ P & V & P & V & \end{array}, \text{ quindi segnatura } ++--$$

- Se $a < -2$ oppure $a > 2$, allora $\text{Det } 4 \times 4 < 0$, quindi

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - & - \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \\ P & V & P & P & \end{array}, \text{ quindi segnatura } +++-$$

- Se $a = \pm 2$, allora dico che la segnatura è $++-0$.

Perché? Di sicuro c'è uno 0, perché $\text{Det} = 0$.

Considero la forma ristretta alle prime 3 variabili, cioè a

$$\text{Span}((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)).$$

Resta la forma (quando metto $w=0$) data dalla matrice

3×3 in alto a sx. Quella non ha il parametro e ha

segnatura $++-$ per Sylvester fatto fino al 3×3 .

Quindi già sappiamo che, guardando solo le prime 3

variabili, c'è un s.sp. di dim 2 su cui è def. pos. e

" " " " 1 " " " neg.

$$-0-0-$$

$$ax^2 + w^2 + 2ayz + 2xz$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Non c'è un modo facile di fare Sylvester.

Facciamo il Det della matrice

$$\text{Det} = 1(-a^3) = -a^3$$

Caso $a=0$

Resta $w^2 + 2xz = w^2 + (x + \frac{1}{2}z)^2 - (x - \frac{1}{2}z)^2$
 $\leadsto$ segnatura $++-0$

Caso $a < 0$

$\text{Det} > 0$, quindi le possibilità sono

~~++++~~

++--

~~-- --~~

Osserviamo che $q(0,0,0,1) = 1$

$q(1,0,0,0) = a < 0$

Caso $a > 0$

$\text{Det} < 0$, quindi le possibilità sono

+++ -

+ ---

Osserviamo che, ristretta a $\text{Span}((1,0,0,0), (0,0,0,1))$ diventa $ax^2 + w^2$, che essendo $a > 0$ è def. positiva.

Quindi è def. pos. almeno su un s.sp. di dim. 2, quindi la segnatura è $+++ -$

Alternativa per il caso $a=0$

$$w^2 + 2xz = w^2 + x^2 + z^2 + 2xz - x^2 - z^2$$

$$= w^2 + (x+z)^2 - x^2 - z^2 \leadsto ++--$$

NON SONO LIN. INDIP.!!

↑ NO!!!

— 0 — 0 —