

FORME QUADRATICHE

$$q(x, y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{a}x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{b}y^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{2c}xy$$

(due variabili)

$$q(x, y, z) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{a}x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{b}y^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{c}z^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{2d}xy + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{2e}yz + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. dati}}}{2f}xz$$

(tre variabili)

Stessa cosa in n variabile**CLASSIFICAZIONE**Una forma quadratica $q(x)$ in $\mathbb{R}^n$ si dice $\uparrow$ vettore→ definita positiva se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ $\uparrow$ vettore→ " negativa $q(x) < 0$ "→ semidefinita positiva se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ → " negativa se $q(x) \leq 0$ "

→ indefinita se non rientra nei casi precedenti, cioè

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } q(x_1) > 0$$

$$\exists x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } q(x_2) < 0$$

Oss. Ogni forma quadratica rientra in almeno una delle categorie di sopra.Achtung! Le forme def. positive sono anche semidef. pos.
negative " neg.

Domanda: data una forma, in quale categoria rientra?

SEGNAZIONE

Sono 3 numeretti (n_+, n_-, n_0) tali che

$$n_+ + n_- + n_0 = n$$

↑ dimensione spazio in cui è definita $q(x)$

e definiti in questo modo:

→ n_+ = massima dimensione di un sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c.

" $q(x)$ è definita pos. in V " cioè $q(v) > 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$

→ n_- = massima... $q(v) < 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$

→ n_0 = definito per differenza

Domanda: data una forma, trovare la segnatura.

Matrice associata ad una forma quadratica

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

↑
matrice
simmetrica

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 3xz - 4yz$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑
x y z

Anche in questo caso

$$(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q(x, y, z)$$

— 0 — 0 —

Quattro metodi per calcolare la segnatura

- ① Segno autovalori (m_+ = numero autovalori pos.
 m_- = numero autovalori neg.
 m_0 = " " nulli)

Il problema è che bisogna calcolare gli autovalori

- ② Completamento dei quadrati

- ③ SYLVESTER

- ④ CARTESIO

Oss. $\rightarrow q(x)$ è def. positiva $\Leftrightarrow m_+ = n$ (e quindi $m_- = m_0 = 0$)
 $\rightarrow$ " " negativa $\Leftrightarrow m_- = n$
 $\rightarrow q(x)$ è semidef. pos. $\Leftrightarrow m_- = 0$ (non c'è nulla di < 0)
 $\rightarrow$ " " neg. $\Leftrightarrow m_+ = 0$ " > 0
 $\rightarrow q(x)$ è indefinita $\Leftrightarrow m_+ \geq 1$ e $m_- \geq 1$
(c'è qualcosa di > 0 e qualcosa di < 0)
— 0 — 0 —

Completamento dei quadrati

Ogni forma quadratica $q(x)$ di n variabili si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni lin. indep.

Allora

- $\rightarrow m_+$ = numero di quadrati con il segno +
 $\rightarrow m_-$ = " " " " " "
 $\rightarrow m_0$ = per differenza

Notazione $+++--0$ vuol dire $m_+ = 3$, $m_- = 2$, $m_0 = 1$

Esempi

$$x^2 + y^2$$

++

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3x^2 + y^2$$

++

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y^2$$

+ -

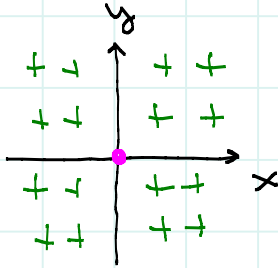
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 - 3y^2$$

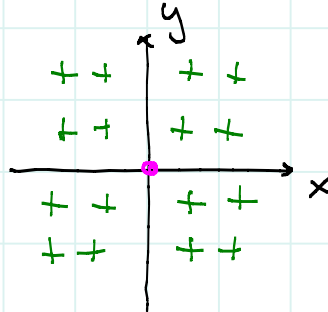
+ -

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

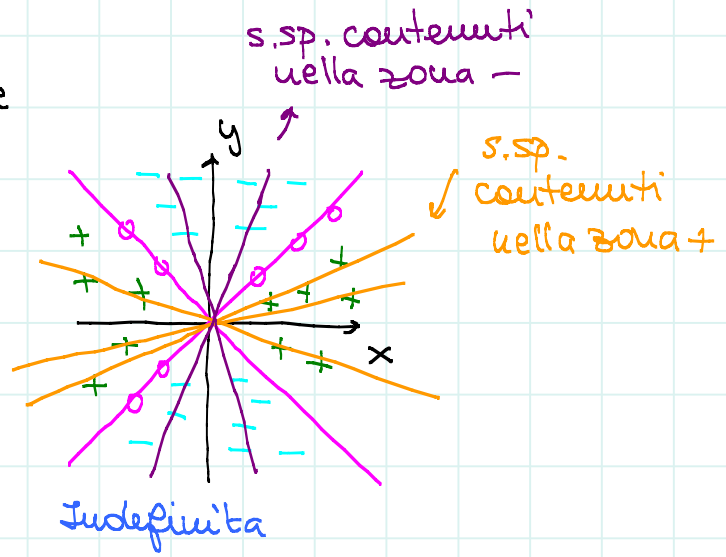
Chiediamoci dove sono +, - e nulle



Defin. pos.



Defin. pos.

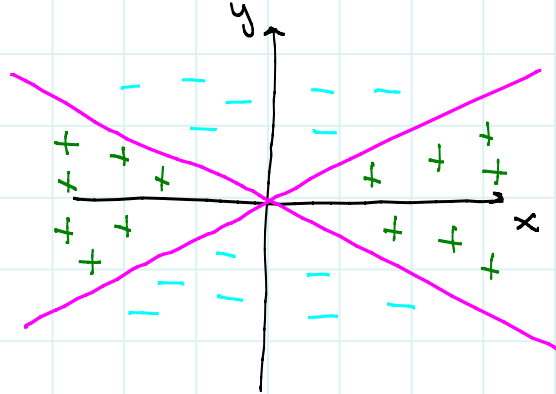


Indefinita

$$2x^2 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^2$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$$



$$x^2 + y^2 + xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 2$$

$$P = \frac{3}{4}$$

++

Def. pos.

(semi def. pos.)

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 2$$

+ 0

Semi def. pos.

(no def. pos)

$$(x+y)^2$$

↑
una sola
espressione
con segno
+

$$x^2 + y^2 + 3xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 2$$

$$P = -\frac{5}{4}$$

+ -

indefinita

$$x^2 + 2y^2 + 3xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$S = 3$$

$$P = -\frac{1}{4}$$

+ -

indefinita

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Dove si annulla ?

$$\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad \leadsto \quad x + \frac{3}{2}y = \begin{matrix} \nearrow \frac{y}{2} \\ \searrow -\frac{y}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leadsto x + y = 0 \\ \leadsto x + 2y = 0 \end{matrix}$$

