

Forme canoniche Obiettivo: data $f: V \rightarrow V$ lineare, trovare base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in cui la matrice associata ad f risulta "bella" (stessa base in partenza ed arrivo).

Introduzione motivazionale

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Calcolare } A^{2022}$$

O si fanno tutte le potenze intermedie e ci si inventa qualcosa...
Supponiamo che esista M matrice 2×2 invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora $(M^{-1} A M)(M^{-1} A M) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} A M$$

$$M^{-1} A^2 M$$

Posso continuare facendolo 3 volte

$$M^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} A M = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} A^3 M$$

Più in generale

$$M^{-1} A^{2022} M = \begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 3^{2022} \end{pmatrix}$$

Da qui posso ricavare $A^{2022} = M \begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 3^{2022} \end{pmatrix} M^{-1}$

Se so trovare M ho finito.

Cosa vuol dire fare $M^{-1} A M$? Vuol dire la stessa applicazione in una base diversa (M = matrice cambio base).

Cosa deve succedere nella nuova base?

$$f(v_1) = 2v_1$$

$$f(v_3) = 2v_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$A \quad v_1 = 2v_1$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$
$$v_1 = (x, y) = (1, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$
$$v_2 = (x, y) = (2, -1)$$

Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

Def. Sia A matrice $n \times n$.

- Si dice che λ è autovalore di A se esiste $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$ t.c.

$$Av = \lambda v$$

- I corrispondenti v si chiamano autovettori

- Dato un autovalore λ , l'insieme di tutti i $v \in \mathbb{R}^n$ tali che

$Av = \lambda v$ (compreso quello nullo) si dice autospazio di λ , ed è un s.sp. vettoriale.

Come trovo autovalori / autovettori / autospazi

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda Id) v = 0$$

$\uparrow v \neq 0$

$$\Leftrightarrow A - \lambda Id \text{ ha un ker} \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda Id) = 0$$

Nell' esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(A - \lambda Id)} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$\uparrow$
polinomio di grado n
detto polinomio
CARATTERISTICO

$$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Una volta trovati gli autovalori, per trovare autovettori / autospazi
risolvo il sistema lineare $Av = \lambda v$

Piccola scorciatoia: posso in alternativa trovare il ker di $A - \lambda Id$

Nell' esempio

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}(\underbrace{(1, -1)}_{1^a C - 2^a C}) = \text{autospazio di } 2$$

$$\boxed{\lambda = 3}$$

$$A - 3Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((2, -1)) = \text{autospazio di } -2$$

Proprietà generale valida in dimensione n :

→ prodotto autovalori = determinante

→ somma autovalori = traccia (somma el.
sulla diagonale)

} contati con
multiplicità

Nel caso del Det la dim. è semplice. Se

$$M^{-1} A M = D \text{ diagonale}$$

allora

$$\text{Det}(M^{-1} A M) = \text{Det}(D) = \text{prod. autovalori}$$

$$\frac{\text{Det}(M^{-1}) \text{Det}(A) \cdot \cancel{\text{Det}(M)}}{\cancel{\text{Det}(M)}}$$

— o — o —

Def. Due matrici A e B (quadrate $n \times n$) si dicono **SIMILI** se esiste M invertibile tale che

$$B = M^{-1} A M$$

(curiosamente: A e B rappresentano la stessa applic., solo in basi diverse)

La matrice A si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale

Proprietà principali. Due matrici simili hanno

→ stesso polinomio caratt.

→ stesso determinante

→ stessa traccia

→ stessi autovalori

→ stessa forma canonica.

— o — o —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} = 3$$

$$\text{Det} = 2$$

$$\text{Tr} = 3$$

$$\text{Det} = 2$$

$$\text{tr} = 3$$

$$\text{Det} = 2$$

$$\text{Tr} = 2$$

$$\text{Det} = -5$$

$$\text{Tr} = 3$$

$$\text{Det} = 2$$

$$\text{Tr} = 3$$

$$\text{Det} = 2$$

Di queste 6 matrici, 5 sono simili tra di loro.

Trovare l'intrusa.

Tutte le altre sono diagonalizzabili e hanno forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Prendiamo l'ultima

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((2, -1))$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((9, -4))$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se facciamo il conto

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzare una matrice = trovare la forma canonica diagonale (se questa esiste) ed una M che realizza il passaggio.

Se prendiamo come B la quinta matrice, troveremo M_1 t.c.

$$M_1^{-1} B M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1} A M$$

similitudine tra A e B

$$\text{Ma allora} \quad B = \underbrace{M_1 M^{-1}}_{\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}} A \underbrace{M M_1^{-1}}_{\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}}$$