

MATRICI ORTOGONALI

Prop. Data una matrice quadrata $n \times n$, che chiamiamo A , sono equivalenti i seguenti 3 fatti

- (1) le righe di A sono ortonormali
- (2) le colonne " " "
- (3) $A^{-1} = A^t$ o volendo $AA^t = Id$

Def. Se succede uno qualunque dei 3 fatti, allora succedono tutti, e A si dice matrice ORTOGONALE

Idea della dim $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

Quando faccio $AA^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{pmatrix}$

Moltiplicare le matrici è equivalente a fare prod. scalari tra righe

Per le colonne è uguale considerando $A^t A = Id$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}}_A$$

Moltiplicare $A^t A$ è equivalente a fare i possibili prodotti scalari tra colonne.

— o — o —

Proprietà delle matrici ortogonali

① $A^{-1} = A^t$ se A è ortogonale (Definizione)

② $\det(A) = \pm 1$ se A è ortogonale

$$AA^t = \text{Id} \rightsquigarrow \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(\text{Id}) = 1$$
$$[\det(A)]^2 = 1 \rightsquigarrow \det(A) = \pm 1$$

③ Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali (e coincidono)

④ Se A e B sono ortogonali, allora AB è ortogonale? SI

Controlliamo quanto fa $(AB)(AB)^t$. Ora

$$(AB) \cdot (AB)^t = AB \cdot \underbrace{B^t A^t}_{\text{Id}} = AA^t = \text{Id} \quad \checkmark$$

⑤ Se A e B sono ortogonali, allora $A+B$ è ortogonale? NO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ che NON è ortogonale}$$

Esempi Matrice 2×2 ortogonale

Posso prendere base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ e usarla come righe

$$\underbrace{(1, 2), (-2, 1)}_{\text{Base ortogonale}} \quad \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{\text{Base ortonormale}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \text{matrice ortogonale}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1} = A^t$$

Piccola osservazione

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa ha righe e colonne ~~orto~~ GONALI, anche se sono ortonormali

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

In questo caso l'inversa si ottiene facendo $\frac{1}{5} B^t$

Esempio Prendiamo 3 vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$

$(1, 2, -1)$

$(0, 1, 2)$

* * *

1 2 -1 $\leadsto (5, -2, 1)$

0 1 2

Audavamo messi
a righe, oppure dopo fare
 $A^t A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Per avere l'inversa di A basta dividere

→ la prima colonna di A^t per 26

→ seconda 9

→ terza 9

— 0 — 0 —

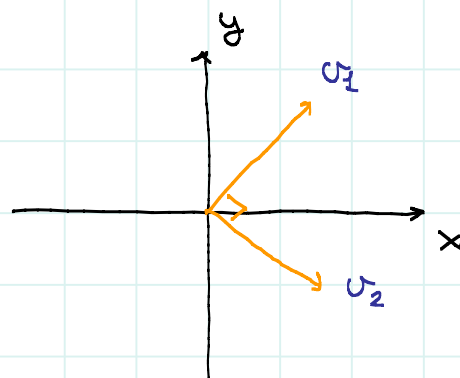
Esercizio 1 Trovare base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui
tutti i vettori (che poi sono 2)
hanno la stessa prima componente

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Esercizio 2 Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$

v_1, v_2, v_3 base ortonormale con la prima componente uguale.

La cerco del tipo

$$\begin{aligned}v_1 &= (a, b, c) \\v_2 &= (a, b, -c) \\v_3 &= (a, ?, ?)\end{aligned}$$

Deve succedere che

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = 0 \\a^2 + b^2 - c^2 &= 0 & \langle v_1, v_2 \rangle &= 0\end{aligned}$$

Da queste deduciamo che

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \quad c^2 = \frac{1}{2} \quad \leadsto \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ad esempio}$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ a & b & c \\ a & b & -c \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{c} (-2bc, \dots, \dots) \\ \uparrow \\ a \end{array} \quad \leadsto \quad a = -2b \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}b$$

Quindi ora sappiamo che $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ e $a^2 = 2b^2$

$$\leadsto 3b^2 = \frac{1}{2} \quad \leadsto \quad b^2 = \frac{1}{6} \quad \leadsto \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \leadsto \quad a = -\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vediamo se funziona $v_1 = (a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$v_2 = (a, b, -c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = 1 \quad \langle v_3, v_1 \rangle = 0 \quad \langle v_3, v_2 \rangle = 0$$

Ovviamente se voglio la prima comp. pos. posso cambiare i segni

Oss. Se li uso come righe di una matrice, ottengo una 3×3 ortogonale, la cui inversa è la trasposta.

— o — o —