

Esercizi1. Spazio vettoriale: $M_{2 \times 2}$ con elemento generico A . Relazioni da esaminare:

$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{2} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\textcircled{3} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{4} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $A^2 = A$, $\textcircled{5} A^t = 2A$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = A$.

(2bis) NO S.SP.
 NO S.SP. (va male tutto)

$\textcircled{1}$ $A =$ matrici 2×2 tali che $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

È un s.sp.? Se sì, trovare dimensione e una base

→ S.sp. Sì

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

Stessa cosa per il prodotto.

→ Dim. e base. Brevino puro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Impongo le cond.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0 \text{ e } b=0$$

Quindi il s.sp. contiene tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow$ base $\uparrow$

Oss. L'esercizio equivale a considerare i vettori

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = 0\}$$

Oss. Di basi ne esistono tante, ad esempio pure

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(Stanno nello spazio, sono in numero giusto, sono lin. indep.)

Oss. Possiamo pensare $A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ come un'applic. Lin. che manda matrici in matrici.

Il s.sp. richiesto è il ker.

Quindi Im avrà $\dim = 2$. Chi è una base dell'immagine?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ Se $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, è vero che $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

No! $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} !$

In termini di applicazioni, se lo pensiamo con la stessa base in partenza ed arrivo, abbiamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

$$f(v_1) = 0 \quad f(v_2) = v_1$$

Ma allora

$f(f(v_1)) = 0$ e $f(f(v_2)) = f(v_1) = 0$, quindi facendo due volte f ottengo sempre 0.

Analogamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La loro somma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'insieme delle matrici 2×2 t.c. $A^2 = 0$ non è un s.sp. perché fallisce la somma, cioè

$$\exists A_1 \text{ t.c. } A_1^2 = 0 \quad \exists A_2 \text{ t.c. } A_2^2 = 0 \quad \text{ma} \quad (A_1 + A_2)^2 \neq 0.$$

Oss. Il prodotto va bene; se $A^2 = 0$ allora $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2 = 0$.

$$\textcircled{4} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S. spaziale? Direi di sì (solita verifica)

Dim e base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2b & 3a+b \\ 4c+2d & 3c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 4a+2b & -3a-2b+2c = 0 \\ \cancel{b}+2d = 3a+\cancel{b} & 3a-2d = 0 \leftarrow \text{sono uguali} \\ 3a+4c = 4c+2d & 3a-2d = 0 \leftarrow \\ 3b+4d = 3c+d & b-c+d = 0 \end{cases}$$

Volevamo sì può risolvere alla GAUSS, o più semplicemente

$$d = 3t \leadsto a = 2t \leadsto b - c = -3t \quad (1^{\text{a}} \text{ equ.})$$

$$-2b+2c = 6t \quad (1^{\text{a}} \text{ equ.}) \leftarrow \text{uguale alla prec.}$$

Quindi $c = s$ e otteniamo $b = s - 3t$.

Conclusione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & s-3t \\ s & 3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ base $\leadsto$ dim = $\uparrow$ 2

Sarebbe opportuno verificare che i due elementi della base
rispettino le condizioni che definivano il S.sp.

— 0 — 0 —

$\textcircled{5} \quad A^t = 2A \quad \text{S.sp. ?} \quad \text{Certo! Solite verifiche}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2a \\ c = 2b \\ b = 2c \\ d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 4c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Quindi è il s.sp. costituito dalla sola matrice nulla! (Dim = 0)

— 0 —

2. Spazio vettoriale: $M_{2 \times 3}$ con elemento generico A . Relazioni da esaminare:

② $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A,$ NO S.SP. (1,2)A = (0,2,0),

$$A \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il prod. è OK
SI sp. ed
è quello con solo
matrice nulla

NO S.SP., ed è
pure l'insieme vuoto!

Come sono fatte TUTTE le matrici 2×3 t.c. $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Bovino

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf \\ ad+be+cf & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Guardando la sola diagonale principale, vediamo che deve essere

$$a=b=c=0 \quad d=e=f=0$$

Quindi resta solo la matrice nulla!!!

① $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un s.sp.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+2b+3c = 0 \\ d+2e+3f = 0 \end{cases}$$

Quindi il s.sp. ha dim 4 con parametri liberi b, c, e, f
dai quali determiniamo a, d

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —