

Interpretazioni geometriche

$$\boxed{2 \times 2} \quad \text{Area triangolo} = \frac{1}{2} |\text{Det}| \quad (\text{vedi les. precedente})$$

$$\boxed{3 \times 3} \quad \text{Volume tetraedro} = \frac{1}{6} |\text{Det}|$$

↑
che ha vertici in
(0, 0, 0)
(a, b, c)
(d, e, f)
(g, h, i)

Per dimostrarlo bisognerebbe
fare il conto partendo da

$$\begin{aligned} \text{Vol (tetraedro)} &= \\ &= \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot \text{altezza} \end{aligned}$$

Oss. $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow \text{Volume} = 0 \Leftrightarrow$ i 3 vettori sono lin. dip.

Alcune proprietà del Determinante

$$\textcircled{1} \quad \text{Det} (\text{Id}) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \text{TEOREMA DI BINET:} \quad \text{Det} (A \cdot B) = \text{Det} (A) \cdot \text{Det} (B)$$

↑ ↑
matrici $n \times n$ della stessa dim.

$$\textcircled{3} \quad \text{Se esiste } A^{-1}, \text{ allora } \text{Det} (A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det} (A)}$$

(Segue dal punto precedente perché $A \cdot A^{-1} = \text{Id}$ e quindi

$$1 = \text{Det} (\text{Id}) = \text{Det} (A A^{-1}) = \text{Det} (A) \cdot \text{Det} (A^{-1})$$

e da qui ricavo)

$$\textcircled{4} \quad \text{Det} (A) = \text{Det} (A^t)$$

(Dando per buono Laplace è ovvio: lo sviluppo di $\text{Det} (A)$ rispetto alla prima riga = sviluppo di $\text{Det} (A^t)$ risp. alla 1ª colonna.)

$$\textcircled{5} \quad \text{Det di una matrice triangolare superiore o inferiore} = \text{prodotto degli elementi sulla diagonale}$$

(quasi ovvio dando per buono Laplace)

Triangolare superiore = tutti o sotto la diagonale principale

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Triangolare inferiore = analogo

- ⑥ Se lavoro alla GAUSS, come cambia il Det "on the road"
- se scambio righe, cambia di segno
 - se faccio oper. addizionale ($R_i \rightsquigarrow R_i + a R_j$) non cambia
 - se faccio oper. non addizionale ($R_i \rightsquigarrow b R_i + a R_j$) viene moltiplicato per b (quindi se posso fare, ma devo tenerne conto)

GRANDI TENTAZIONI FALSE

- ① $\text{Det}(A+B)$ in generale NON è $\text{Det}(A) + \text{Det}(B)$
- ② $\text{Det}(3A)$ NON è in generale $3 \text{Det}(A)$.

Vale però che

$$\text{Det}(3A) = 3^n \text{Det}(A)$$

$\uparrow$
 n è la dim. della matrice

Esercizio Quanto fa $\text{Det}(-I)$?

$$\text{Det}(-I) = \text{Det}((-1) \cdot I) = (-1)^n \text{Det}(I) = (-1)^n$$

$\uparrow$
 n

Esercizio I vettori $(0,1,2)$, $(1,1,1)$, e $(3,1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?

1° modo superbovino

Verifico che sono lin. indep. e che sono generatori

2° modo più raffinato Verifico SOLO che sono lin. indep.

(.fatto gen.: se sono in numero giusto e sono lin. indep., allora sono base)

3° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 0 + 2 + 3 - 6 - 2 - 0 = -3 \neq 0$$

$\leadsto$ ok ☺

Li metto a riga o colonna nella matrice? CHI SE NE FREGA!
(il Det NON cambia)

— 0 — 0 —

RANGO Prende in INPUT una matrice $m \times n$ (qualunque)

In OUTPUT: un intero ≥ 0

Cos'è questo intero?

Ci sono 3 definizioni equivalenti

- ① Il max numero di righe lin. indep. (dim. span. righe)
- ② Il max numero di colonne lin. indep. (dim. span. colonne)
- ③ La massima dimensione di una sottomatrice quadrata con $\text{Det} \neq 0$

SOTTOMATRICE

È una qualunque matrice che si ottiene a partire da quella data cancellando un po' di righe e colonne a scelta

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una sottomatrice } 2 \times 2$$

In questo caso le possibili sottomatrici 2×2 sono 18. Devo scegliere

→ la riga da cancellare ($\leadsto$ 3 modi)

→ le 2 colonne da cancellare ($\leadsto$ 6 modi)

Quindi cosa vuol dire che il rango di una matrice è 2?

Vuol dire due cose

- Che tutte le sottomatrici $(2+1) \times (2+1)$ hanno $\text{Det} = 0$
- Che esiste una sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$.
 $\uparrow$ almeno

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 2$$

Si vede in tanti modi

1° modo Guardo le righe

$$\text{Span}(R_1, R_2, R_3) = \text{Span}(R_1, R_2)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
lin. indep.

2° modo Guardo le colonne

$$\text{Span}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Span}(C_1, C_2)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
lin. indep.

3° modo Devo trovare una sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$

Ma devo dir. anche che tutte le 3×3 hanno $\text{Det} = 0$.

Quante sono le 3×3 ? Sono 4, perché le ottengo eliminando una qualunque delle 4 colonne, quindi dovrei fare 4 determinanti 3×3 ...

Altra propr. del Determinante

- ⑦ Se una matrice ha 2 righe o 2 colonne uguali, allora $\text{Det} = 0$
- ⑧ Se alcune righe (o alcune colonne) sono LIN. DIP., allora per forza $\text{Det} = 0$.

(Tutti questi fatti seguono se si dà per buono GAUSS: alla fine trovo una riga tutta nulla, e quando moltiplico gli el. della diag. viene 0)

— 0 — 0 —