

→ Matrice di cambio di base

→ Matrice INVERSA

CAMBIO DI BASE

Setting : V sp. vett. di dim. finita

$\{v_1, \dots, v_m\}$ base di V

$\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ altra base di V .

Domanda : se conosco le comp. di un vettore v rispetto alla prima base, come trovo le comp. di v rispetto alla seconda ?

Risposta : si usa una matrice $M_{m \times m}$ detta "di cambio di base".

$$\text{Se } v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

allora $x = (x_1, \dots, x_m)^t$ (come colonna), allora

$$y = Mx$$

è una colonna le cui componenti soddisfanno

$$v = y_1 \hat{v}_1 + \dots + y_m \hat{v}_m$$

In INPUT : comp. rispetto alla prima base

In OUTPUT : " " " seconda "

Come si costruisce M ? È la solita "battaglia navale". Scrivo

$$v_1 = a_1 \hat{v}_1 + \dots + a_m \hat{v}_m \quad \rightsquigarrow a_1, \dots, a_m \text{ sono la prima colonna di } M$$

1° della 1ª base

$$v_2 = b_1 \hat{v}_1 + \dots + b_m \hat{v}_m \quad \rightsquigarrow b_1, \dots, b_m \text{ sono la seconda colonna di } M$$

e così via.

Perché funziona?

Osservazione fondamentale: quando calcolo Mx
 $n \times n$ $\nwarrow$ $\swarrow$ colonna lunga n

in realtà sto calcolando la comb. lin. delle COLONNE di M
che ha come coeff. $x_1, \dots, x_n$ (le comp. di x)

Esempio $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dato il fatto generale, quando calcoliamo Mx stiamo facendo
la comb. lineare delle colonne di M con coeff $x_1, \dots, x_n$, ma
le colonne di M sono proprio $\underset{-o-}{u_1}, \dots, \underset{-o-}{u_n}$ scritti nella nuova base.

Esempio $V = \mathbb{R}^2$

$$\{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\} = \{(0, 1), (3, -1)\}$$

Voglio la matrice di cambio base $\{u_1, u_2\} \rightarrow \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$

$$(1, 2) = a(0, 1) + b(3, -1)$$

$$3b = 1$$

$$\leadsto b = \frac{1}{3}$$

$$a - b = 2$$

$$\leadsto a = \frac{7}{3}$$

$$(1, 3) = a(0, 1) + b(3, -1)$$

$$3b = 1$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$a - b = 3$$

$$a = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Prendiamo $v = (2, 5)$. Le sue comp. risp.

alla prima base sono $(1, 1)$ perché $(2, 5) = 1 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 3)$

Chi sono le comp. risp. alla seconda base?

1° modo: risolvendo $(2,5) = a(0,1) + b(3,-1)$

2° modo $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
↑ componenti cercate

Verifica: $\frac{17}{3}(0,1) + \frac{2}{3}(3,-1) = (2,5)$ ☺
— 0 — 0 —

MATRICE INVERSA

Sia A una matrice $n \times n$ (quindi $\square$)

Cerco una matrice B , sempre $n \times n$, tale che

$$AB = BA = Id$$

Come faccio a vedere se esiste ed eventualmente trovarla?

Caso facile 2x2

$$B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

↑
 B esiste se denom. $\neq 0$

Si verifica che funziona moltiplicando

Nel caso generale ci sono 2 metodi

→ formula con i determinanti

→ alla GAUSS, in questo modo

• Parto da $(A | Id)$ come matrice $n \times 2n$

• Lavoro alla GAUSS fino a far venire Id a sx, cioè $(Id | B)$

• Quello che resta a destra è la B !

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ~ con la formula $\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

inversa di A !!

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ 19R_2 \\ -5R_3}]{\substack{19R_1 - 3R_3 \\ \downarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 19 & 38 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & -76 & 0 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 38 & 0 & 0 & -6 & 8 & 24 \\ 0 & -76 & 0 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right) = \begin{array}{l} \text{Divido la prima per 38} \\ \text{" seconda per -76} \\ \text{" \cdot terza per 19} \end{array}$$

A cosa ci serve la matrice inversa?

Se A cambia componenti da $\{v_1, \dots, v_m\}$ a $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$,
chi fa il cambio inverso da $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ a $\{v_1, \dots, v_m\}$?

La matrice inversa!

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la base

$$\{v_1, v_2\} = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

Scrivere il cambio di base dalla canonica alla nuova base

Osservazione

$$(1, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(1, 4) = 1 \cdot (1, 0) + 4(0, 1)$$

$\uparrow$
VECCHIA

$\uparrow$
NUOVA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

Quindi la M scritta cambia dalla $\{(1,3), (1,4)\}$ alla canonica

Quella che mi serve è M^{-1}

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ cambia dalla $\{(1,0), (0,1)\}$ alla $\{(1,3), (1,4)\}$

Riprova

$$(2, -3) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. risp. alla canonica}}}{2} (1,0) - 3 (0,1)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$11(1,3) - 9(1,4) = (2, -3)$$