

SOTTO SPAZI VETTORIALI

Sia V uno sp. vett. e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme.

Si dice che W è un sotto sp. vettoriale se

è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per un numero, cioè

$$\rightarrow \forall w_1 \in W, \forall w_2 \in W \text{ si ha che } w_1 + w_2 \in W$$

$$\rightarrow \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ si ha che } \lambda w \in W$$

Oss. A questo punto W diventa a sua volta uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni che "eredita" da V .

Esercizio 1 Qui $V = \mathbb{R}^2$ e i W sono descritti dalle relazioni dove

1. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^2$ con elemento generico (x, y) . Relazioni da esaminare:

$$x + y = 3, \quad 2x + 3y = 0, \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad xy \geq 0,$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x = y, \quad \text{SI}$$

$$x = 0, \quad \text{SI}$$

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad \text{NO}$$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad \text{NO}$$

(mult. $\lambda < 0$)

mult. per $\lambda = 0$

mult. per λ grandi

→ Come dimostro che W è un sottospazio?

Devo dimostrare che la somma e il prodotto hanno la proprietà richiesta SEMPRE ($\forall w_1, \forall w_2, \dots$)

→ Come dimostro che W non è un sottospazio?

Basta che trovo una singola eccezione, alla somma o al prodotto.

1.1 $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=3 \}$

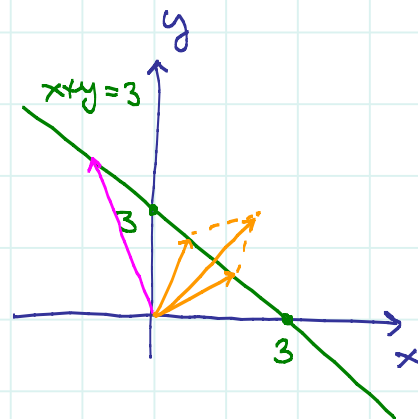
No!

$(3,0) \in W$ $(1,2) \in W$ ma $(4,2) \notin W$ quindi la somma può andare male.

Anche il prodotto va male:

$w = (1,2) \in W$ ma $7w = (7,14) \notin W$

Si poteva vedere anche geom.



1.2 $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0 \}$

Sì!

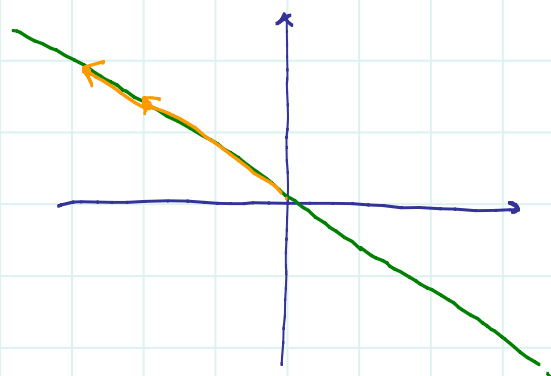
Devo fare una dimostrazione che somma e prodotto vanno bene SEMPRE

• Somma $w_1 \in W$ $w_1 = (x_1, y_1)$ con $2x_1 + 3y_1 = 0$
 $w_2 \in W$ $w_2 = (x_2, y_2)$ con $2x_2 + 3y_2 = 0$
 $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \stackrel{?}{\in} W$

Controllo se $2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) \stackrel{?}{=} 0$
 $\underbrace{(2x_1 + 3y_1)}_0 + \underbrace{(2x_2 + 3y_2)}_0 = 0 \quad \checkmark$

• Prodotto $w \in W$ $w = (x, y)$ con $2x + 3y = 0$
 $\lambda \in \mathbb{R}$
 $\lambda w = (\lambda x, \lambda y) \stackrel{?}{\in} W$

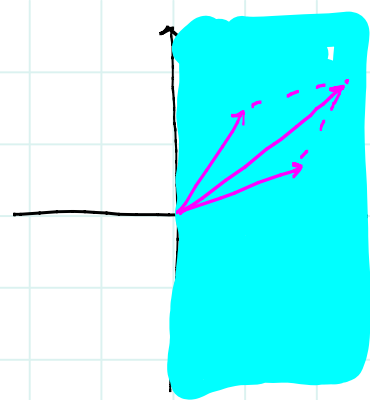
Controllo se $2(\lambda x) + 3(\lambda y) \stackrel{?}{=} 0$
 $\lambda \underbrace{(2x + 3y)}_0 = 0 \quad \checkmark$



Si vede anche geometricamente

1.3 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

No! $w = (1, 6) \in W$ ma
 $-3w = (-3, -18) \notin W$



Valgono in realtà questi due fatti

→ se $w_1 \in W$ e $w_2 \in W$, allora $w_1 + w_2 \in W$,
 quindi la somma andrebbe bene

$$w_1 = (x_1, y_1) \text{ con } x_1 \geq 0$$

$$w_2 = (x_2, y_2) \text{ con } x_2 \geq 0$$

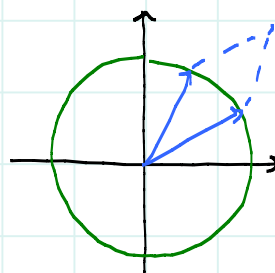
$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W \text{ perché } x_1 + x_2 \geq 0.$$

→ se $w \in W$ e $\lambda \geq 0$, allora $\lambda w \in W$

L'unica cosa che va male è il prodotto per λ negativi.

1.4 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

No! Va male sia la somma
 sia il prodotto



1.5 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

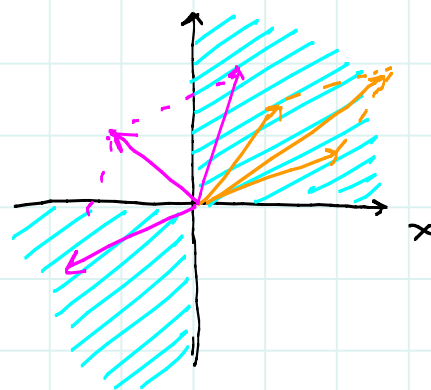
NON è un s.sp. vet.

→ La mult. andrebbe anche bene
 (verificarlo algebricamente)

→ La somma va male, ad esempio

$$w_1 = (1, 2) \in W \quad w_2 = (-2, -1) \in W$$

$$w_1 + w_2 = (-1, 1) \notin W$$



Oss. Se $0 \notin W$, allora W non è sottospazio

(basta osservare che la mult. per $\lambda = 0$ va male)

$$p(0) = 5, \quad p(5) = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(5) = 5, \quad p(0) = p(5),$$

$$p(5) = p(\pi) = 0, \quad p(\pi) = p(0) = 5, \quad p(0) \cdot p(\pi) = 0, \quad p(9) \leq 0,$$

NO NO NO

$$p(x) = p(-x), \quad p(x) + p(2x) = 5x, \quad p(x) = p(x^2), \quad 7p(x) = p(7x).$$

SI NO SI SI: verifica per bene!

1 $p(0) = 5$ NO! (male sia somma, sia prodotto)

2 $p(5) = 0$ SI! (vedi lezione prec.)

3 $p(0) = 0$ SI!

4 $p(5) = 5$ NO!

5 $p(0) = p(5)$ SI!

→ somma: se $p_1(0) = p_1(5)$ e $p_2(0) = p_2(5)$, è vero che $p_1(0) + p_2(0) = p_1(5) + p_2(5)$? SI!

→ prodotto: se $p(0) = p(5)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, è vero che $\lambda p(0) = \lambda p(5)$? SI!

6 $p(5) = p(\pi) = 0$ SI!

8 $p(0) \cdot p(\pi) = 0$ NO!

Il prodotto andrebbe bene

La somma può andare male

Prendo $p_1(x)$ con $p_1(0) = 0$ e $p_1(\pi) = 3$. Allora $p_1 \in W$

" $p_2(x)$ con $p_2(0) = 5$ e $p_2(\pi) = 0$. Allora $p_2 \in W$

Cosa posso dire della somma?

$$(p_1 + p_2)(0) = 5 \quad \text{e} \quad (p_1 + p_2)(\pi) = 3, \quad \text{quindi} \quad p_1 + p_2 \notin W$$

Parente di questo: $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \}$

Non è un sottosp. per colpa della somma

$$(1, 0) \in W, \quad (0, 5) \in W \quad \text{ma} \quad (1, 5) \notin W$$

