

Due rette nello spazio possono essere

- coincidenti
- incidenti (si intersecano in un pto)
- parallele e distinte (nessuna intersezione, ma stessa direzione)
- SGHEMBE (nessuna intersezione e direzioni diverse)

Operativamente quando i due vettori direzione

- se sono l'uno multiplo dell'altro saranno o parallele o coincidenti (interseco e vedo)
- altrimenti saranno incidenti o sghembe (interseco e vedo)

Per intersecare 2 rette nello spazio, le scrivo con 2 parametri t ed s e faccio il sistema.

Esempio

	r_1	r_2
①	$(1, 1, 3) \quad (1, 1, -4)$	$(0, 0, 2) \quad (0, 0, 1)$
②	$(1, 1, 3) \quad (1, 1, -4)$	$(2, 0, 2) \quad (2, -1, 2)$

$r_1: (1, 1, 3) + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ (retta verticale)
 $r_2: (0, 0, 1) + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ o parallele o coincidenti

$r_1: (1, 1, 3+t)$ $r_2: (0, 0, 1+s)$

$$\begin{cases} 1=0 \\ 1=0 \\ 3+t=1+s \end{cases} \quad \text{NON HA SOLUZIONI} \Rightarrow \text{sono parallele}$$

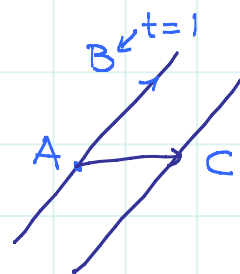
Scrivere la cartesiana del piano che le contiene entrambe

Superbrivino: prendo un pto su una retta e 2 pti sull'altra, poi faccio il piano

leggermente + furbo, ma in realtà analogo

$$(1, 1, 3) + t(0, 0, 1) + s(1, 1, 2)$$

differenza dei
due p.ti di
partenza



$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

→ se voglio passo in cartesiana

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & (1, 1, 3) + t(0, 0, 1) & r_1 \\ & (2, 0, 2) + t(0, 1, 0) & r_2 \end{aligned}$$

Direzioni davvero diverse → sghembe o incidenti
le interseco

$$(1, 1, 3+t) \quad (2, s, 2)$$

$$\begin{cases} 1 = 2 \\ 1 = s \\ 3+t = 2 \end{cases} \leftarrow \text{NO SOLUZIONI} = \text{SGHEMBE}$$



6. Consideriamo il triangolo con vertici nei punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$.

- Determinare le coordinate dei punti medi dei lati e del baricentro.
- Determinare l'area del triangolo.
- Determinare le coordinate dei piedi delle altezze e dell'ortocentro (punto di intersezione delle altezze).
- Determinare il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai 3 vertici.
- Determinare le coordinate del circocentro (il centro della circonferenza circoscritta).

(a) Punti medi dei lati.

Come trovo il p.to medio di AB?



$$M = A + \frac{B-A}{2} = \frac{2A+B-A}{2} = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2} \right)$$

(c) Piedoli delle altezze

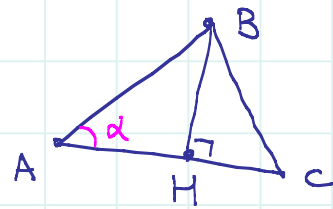
Facciamo altezza uscente da B

Strategia

→ scrivo retta AC

→ scrivo piano per B e perp. ad AC

→ interseco e trovo H



$$\text{retta AC: } (1, 1, 2) + t(0, 1, 1) = (1, 1+t, 2+t)$$

$$\text{piano: } y+z=2$$

$$\text{interseco: } 1+t+2+t=2 \leadsto 2t=-1 \leadsto t=-\frac{1}{2}$$

$$H = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$B = (2, 3, -1)$$

Verifica: deve succedere che

$$BH \perp AC$$

$$\uparrow \quad \quad \uparrow$$
$$(0, 1, 1)$$

$$BH = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) \leadsto \langle BH, AC \rangle = 0 \quad \ddot{\smile}$$

(b) Area del triangolo

$$\boxed{1^{\circ} \text{ modo}} \quad \text{Area} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{2}}$$

$$\boxed{2^{\circ} \text{ modo}} \quad \text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \|(1, 2, -3)\| \cdot \|(0, 1, 1)\| \cdot \sin \alpha$$

$\uparrow$
angolo compreso

$$= \frac{1}{2} \sqrt{14} \sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 2, -3), (0, 1, 1) \rangle}{\| \dots \| \cdot \| \dots \|}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\langle \dots, \dots \rangle^2}{\| \dots \|^2 \cdot \| \dots \|^2}} = \frac{\sqrt{\| \dots \|^2 \cdot \| \dots \|^2 - \langle \dots, \dots \rangle^2}}{\| \dots \| \cdot \| \dots \|}$$

Quando vado a moltiplicare trovo

$$\frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 2 - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Riassumendo, alla fine

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \langle AB, AC \rangle^2}$$

3° modo Calcola AB e AC come sopra. Faccio la formula misteriosa con AB e AC e trovo un certo vettore v .
Ora

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|v\|$$

Nel nostro caso : $AB = (1, 2, -3)$
 $AC = (0, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5, -1, 1) = v$$

$$\frac{1}{2} \|v\| = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

La dimostrazione è un conto : scrivo $AB = (a_1, a_2, a_3)$
 $AC = (b_1, b_2, b_3)$

Scrivo v con le sue componenti $v = (a_2 b_3 - a_3 b_2, \dots, \dots)$

Verifico che $\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \langle AB, AC \rangle^2} = \|v\|$

$$A = (3, 2, 1), \quad B = (0, 1, 1),$$

Voglio 2 piani che hanno come intersezione la retta AB

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ 3a + 2b + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

Risolve e trovo 2 piani (sono ∞ , e basta prenderne 2).

— o — o —