

A.A. 2022/2023
Modulo di Algebra Lineare
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Contents

Lezione 01. Vettori geometrici nel piano cartesiano. Operazioni tra vettori: somma, prodotto per un numero, prodotto scalare, norma, distanza. Interpretazione geometrica del prodotto scalare in termini di angolo tra vettori.	8
Lezione 02. Coordinate polari nel piano. Formule di passaggio tra coordinate cartesiane e coordinate polari (e viceversa). Esercizi sulle coordinate polari.	11
Lezione 03. Rette nel piano: equazione cartesiana vs equazione parametrica. Passaggio da una rappresentazione all'altra. Significato dei coefficienti nei vari tipi di rappresentazione. Calcolo dell'angolo tra due rette.	15
Lezione 04. Sistemi lineari: risoluzione mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan. Esempi di applicazione (casi con soluzione unica, nessuna soluzione, infinite soluzioni). Esempi di studio di sistemi lineari con un parametro.	20
Lezione 05. Esercizi sulle rette nel piano. Rette parallele e perpendicolari. Mutua posizione di due rette nel piano. Calcolo dell'intersezione di due rette nel piano (date in varia forma) e dell'angolo che formano.	24
Lezione 06. Esercizi sulle rette nel piano. Come determinare una retta che passa per un punto e forma un angolo assegnato con una retta data. Distanza tra un punto ed una retta: formula e dimostrazione.	28
Lezione 07. Equazione parametrica di una retta nello spazio. Piani nello spazio: equazione cartesiana e parametrica. Significato geometrico dei coefficienti nell'equazione cartesiana. Passaggio dalla parametrica alla cartesiana. Formula per determinare un vettore nello spazio perpendicolare a due vettori dati.	32
Lezione 08. Mutua posizione di due piani nello spazio. Calcolo dell'eventuale retta intersezione e dell'angolo compreso. Mutua posizione di una retta ed un piano nello spazio. Calcolo dell'eventuale intersezione e dell'angolo tra una retta ed un piano. Distanza di un punto da una retta nello spazio.	35
Lezione 09. Mutua posizione di due rette nello spazio. Altezze di un triangolo nello spazio. Varie formule per l'area di un triangolo di cui sono noti i vertici nello spazio.	39
Lezione 10. Matrici e operazioni tra matrici: somma, prodotto per un numero, trasposta. Prodotto tra matrici. La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte (in ordine inverso). Matrice nulla e matrice identica. Caso speciale dei vettori riga e dei vettori colonna. Vari esempi sul prodotto di matrici.	43

Lezione 11. Spazi vettoriali: dimostrazione dell'unicità del vettore nullo. Esempi classici di strutture che sono spazi vettoriali e di strutture che non lo sono.	47
Lezione 12. Sottospazi vettoriali: come dimostrare che un sottoinsieme è o non è un sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi nel piano ed in spazi di polinomi. . . .	52
Lezione 13. Esercizi su vettori linearmente indipendenti, generatori, basi, componenti.	56
Lezione 14. Classificazione dei sottospazi vettoriali del piano e dello spazio. Definizione di Span ed enunciato del lemma di eliminazione. Esercizi su sottospazi vettoriali descritti come Span.	60
Lezione 15. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. Esempi ed esercizi. Due strategie per il calcolo dell'intersezione tra due piani nello spazio descritti come Span.	64
Lezione 16. Applicazioni lineari: definizione, Ker, Immagine, teorema Rank-Nullity. Matrice associata ad una applicazione lineare. Esempi di calcolo di Ker, Immagine, matrice associata tra le basi canoniche.	68
Lezione 17. Matrice associata ad una applicazione lineare tra basi strane. Esempi di applicazioni lineari tra spazi di polinomi o di matrici.	73
Lezione 18. Teorema di struttura delle applicazioni lineari. Esempi di studio dell'esistenza e dell'unicità di applicazioni lineari che soddisfano delle proprietà assegnate. . . .	78
Lezione 19. Costruzione della matrice di cambio di base e suo utilizzo. Calcolo della matrice inversa: formula esplicita in dimensione 2 e algoritmo di Gauss per il caso generale. Matrice inversa e cambi di base.	82
Lezione 20. Esercizi sui cambi di base e sulla scrittura della matrice associata ad una applicazione lineare usando basi assegnate in partenza ed arrivo.	87
Lezione 21. Calcolo di determinanti: formule per la dimensione 2 e 3 (Sarrus), algoritmo di Gauss e sviluppi di Laplace per la dimensione n. Esempi di calcolo. Interpretazione geometrica in dimensione 2 come area di un parallelogrammo. . .	92
Lezione 22. Determinante in dimensione 3 e volume del tetraedro. Proprietà dei determinanti (determinante dell'identità, della trasposta, dell'inversa, del prodotto). Sottomatrici. Rango di una matrice: enunciato dell'equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango.	96
Lezione 23. Giustificazione della formula per il calcolo di un vettore ortogonale a due vettori dati nello spazio. Calcolo di dimensioni e basi di sottospazi utilizzando anche rango e determinanti.	100
Lezione 24. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di matrici, Span, applicazioni lineari. Teorema di Rouché-Capelli. Struttura generale delle soluzioni di un sistema lineare (soluzione particolare più soluzione generale del sistema omogeneo associato). Studio di un sistema lineare parametrico.	104

Lezione 25. Regola di Cramer per risolvere un sistema lineare. Formula per la matrice inversa con i determinanti. Esempi di studio di sistemi lineari parametrici.	109
Lezione 26. Esercizi sui sottospazi vettoriali di spazi di matrici. Esempi di matrici non nulle con quadrato nullo.	114
Lezione 27. Somma diretta di sottospazi. Proiezioni su una somma diretta. Esercizi sulla somma di sottospazi ed esempio di calcolo delle matrici di proiezione. Ker e immagine delle matrici di proiezione.	118
Lezione 28. Esercizi sulla matrice associata ad una applicazione lineare e sui cambi di base.	122
Lezione 29. Esempio di applicazione lineare tra spazi di matrici. Esercizi su esistenza e caratterizzazione di applicazioni lineari che verificano determinate proprietà. . .	127
Lezione 30. Esempi finali su cambi di base e applicazioni lineari.	131
Lezione 31. Basi ortogonali e ortonormali. Componenti di un vettore rispetto a tali basi. Esercizi sulle basi ortonormali e ortogonali in 2 e 3 dimensioni.	136
Lezione 32. Algoritmo di Gram-Schmidt ed esempio di utilizzo. Basi ortogonali di sottospazi. Ortogonale di un sottospazio.	141
Lezione 33. Presentazione di sottospazi mediante equazioni cartesiane e come Span. Calcolo della matrice di proiezione ortogonale su un sottospazio e sull'ortogonale del sottospazio.	146
Lezione 34. Matrici ortogonali: definizioni equivalenti e principali proprietà. Ulteriori esercizi su basi e matrici ortogonali e ortonormali.	150
Lezione 35. Forma canonica di un'applicazione lineare potendo scegliere basi a piacere in partenza ed arrivo (dipende solo dal rango). Esempi di passaggio alla forma canonica.	154
Lezione 36. Introduzione motivazionale alle forme canoniche per applicazioni da uno spazio in sé (stessa base in partenza ed arrivo) o per matrici quadrate. Autovalori, autovettori, autospazio. Matrici simili. Esempio di diagonalizzazione 2×2	159
Lezione 37. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità. Esempi di diagonalizzazione sui reali e sui complessi.	164
Lezione 38. Esercizi sul calcolo di autovalori ed autovettori, con relative molteplicità algebriche e geometriche. Primo esempio di calcolo di una base Jordanizzante. . .	168
Lezione 39. Ricapitolazione dei principali fatti sulla forma di Jordan: blocchi di Jordan, matrici di Jordan, passaggio dalla forma di Jordan complessa alla forma di Jordan reale. Ricapitolazione generale sul problema delle forme canoniche. Primi esempi di calcolo di forme canoniche.	173

Lezione 40. Esempi in dimensione bassa di calcolo della forma canonica e di una possibile matrice di passaggio.	178
Lezione 41. Esercizi di ricapitolazione su diagonalizzazione, forma di Jordan, matrici simili, forme canoniche.	182
Lezione 42. Esercizi di ricapitolazione su diagonalizzazione, forma di Jordan, matrici simili, forme canoniche.	186
Lezione 43. Esercizi di ricapitolazione su diagonalizzazione, forma di Jordan, matrici simili, forme canoniche.	190
Lezione 44. Ricapitolazione della teoria sulle forme quadratiche: forme (semi)definite positive/negative e indefinite, matrice associata, segnatura. Primi esempi di studio del segno di una forma quadratica e di completamento dei quadrati.	195
Lezione 45. Esercizi sullo studio del segno di forme quadratiche e sul metodo di completamento dei quadrati.	200
Lezione 46. Descrizione del metodo di Cartesio per determinare il segno delle radici di un polinomio. Descrizione del metodo dei minori orlati di Sylvester. Possibilità di procedere in varie direzioni nell'utilizzo del metodo di Sylvester. Esempi di applicazione dei vari metodi.	204
Lezione 47. Studio della segnatura di forme quadratiche, anche con parametri.	209
Lezione 48. Esercizi di ricapitolazione sulle forme quadratiche, anche con parametri.	214
Lezione 49. Ricapitolazione della teoria sui prodotti scalari in generale: matrice associata, comportamento per cambi di base, matrici congruenti. Esercizi sui prodotti scalari in dimensione due.	218
Lezione 50. Esercizi sui prodotti scalari in dimensione tre. Verifica che certe espressioni definiscono o non definiscono un prodotto scalare.	223
Lezione 51. Esercizi sui prodotti scalari in spazi di polinomi o spazi di matrici: calcolo della matrice associata, della segnatura e di una base in cui la matrice associata assume la forma alla Sylvester.	227
Lezione 52. Esercizi sulle trasformazioni affini. Come determinare un'affinità che manda punti dati in punti dati, come trovare l'immagine e la controimmagine di una retta.	232
Lezione 53. Omotetie rispetto all'origine e rispetto ad un punto generico. Classificazione delle matrici 2×2 ortogonali, con relativi autovalori ed autovettori.	237
Lezione 54. Esercizi sulla scrittura dell'espressione di isometrie del piano. Simmetria centrale. Simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine o a una retta generica. Rotazione rispetto all'origine o ad un punto generico.	242

- Lezione 55.** Enunciato della classificazione delle isometrie del piano sulla base del luogo dei punti fissi. Esempi di classificazione di isometrie di cui è assegnata l'espressione. 247
- Lezione 56.** Ricapitolazione della teoria: classificazione delle isometrie dello spazio sulla base del luogo dei punti fissi. Primi esempi di isometrie dello spazio: simmetrie rispetto a piani paralleli ai piani coordinati e simmetrie centrali. 252
- Lezione 57.** Isometrie dello spazio: simmetrie rispetto a piani generici. Rotazioni rispetto a rette generiche. Orientazione di una base dello spazio. 256
- Lezione 58.** Esempi di studio di isometrie dello spazio a partire dalla loro espressione analitica. Rapporti tra proprietà geometriche (assi/angoli di rotazione, piani di simmetria) e proprietà algebriche (autovalori e autospazi). 261
- Lezione 59.** Due metodi per calcolare la distanza tra due rette sghembe nello spazio. Piano nello spazio che contiene una retta ed è parallelo ad un'altra retta. Studio di un'ellisse nel piano in posizione non canonica. Accenno alle funzioni trascendenti (ad esempio esponenziali) di una matrice. 265
- Lezione 60.** Cambi di basi in spazi di matrici, derivata seconda discreta, algoritmo jpeg. 270

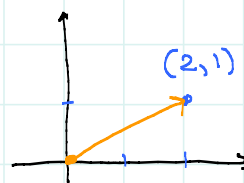
ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 01

Note Title

27/09/2022

- Geometria Analitica
 - Sistemi lineari
 - Spazi vettoriali e applic. lin.
 - Prodotti scalari
- } **MATRICI**

Vettori $\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano (x, y)
 $\mathbb{R}^3$ = spazio (x, y, z)
 $\mathbb{R}^n$ = spazio a n coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$



Possiamo indicare un vettore con una singola lettera

$$P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{U} = (1, 7, -3, 4) \in \mathbb{R}^4$$

Operazioni tra vettori:

- SOMMA (componente per componente)
- PRODOTTO PER UNO SCALARE (prodotto di un numero per un vettore)

↑
numero
- PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

→ NORMA : $\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

↑
lunghezza del vettore

↑
PITAGORA a n variabili

→ DISTANZA : $\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Esempi in $\mathbb{R}^2$ $\vec{v} = (2, 3)$ $\vec{w} = (1, -2)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (3, 1)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (1, 5)$$

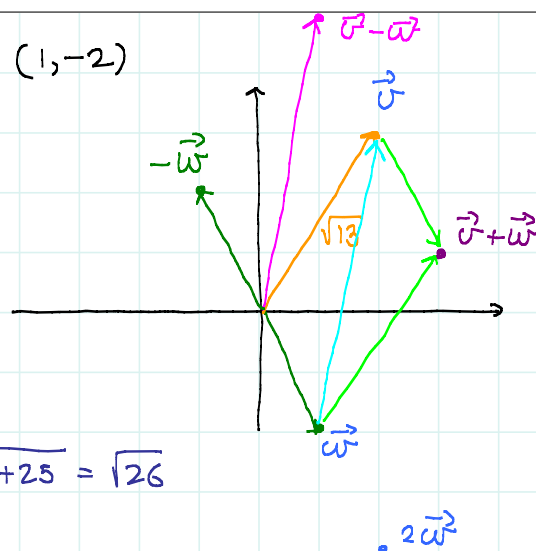
$$2\vec{w} = (2, -4)$$

$$-\vec{v} = (-2, -3)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|(1, 5)\| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 2 - 6 = -4$$



Come vedo $\vec{v} - \vec{w}$?

1° modo: è la somma tra $\vec{v}$ e $-\vec{w}$

2° modo: è quello che devo aggiungere a $\vec{w}$ per ottenere $\vec{v}$

$$\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$$

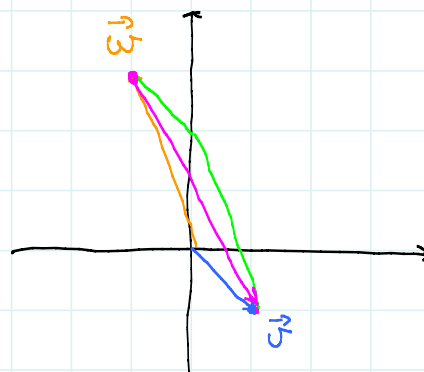
cioè possiamo pensarlo come il vettore che ha punto di applicazione in $\vec{w}$ e punta della freccia in $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (1, -1)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (0, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 3)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2, -4)$$



Significato geometrico del prodotto scalare

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

↑
angolo compreso

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Esempi $\vec{v} = (1, -1)$ $\vec{w} = (-1, 3)$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

($\cos \alpha < 0 \leadsto$ angolo tra i 2 vettori è ottuso)

Esercizio Consideriamo nello spazio i 3 punti

$$A = (1, 0, 2)$$

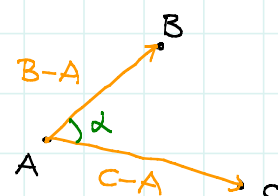
$$B = (0, -1, 1)$$

$$C = (-1, 3, 1)$$

Consideriamo il triangolo ABC.

Calcolare la lunghezza del lato BC

Calcolare il sin dell'angolo in A



$$\begin{aligned} \text{Lung. BC} &= \|\mathbf{B} - \mathbf{C}\| = \|(1, -4, 0)\| = \sqrt{1+16+0} = \sqrt{17} \\ &= \|\mathbf{C} - \mathbf{B}\| \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (-1, -1, -1) = \vec{v}$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = (-2, 3, -1) = \vec{w}$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{2 - 3 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = 0 \leadsto \text{il triangolo è rettangolo in A}$$

$$\leadsto \sin \alpha = 1$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$- \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$$

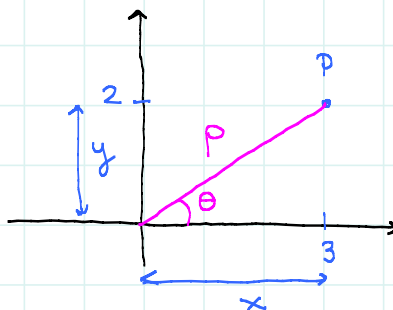
ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 02

Note Title

27/09/2022

Coord. polari nel piano (x, y) coord. cartesiane ρ, θ coord. polari $\uparrow$
RHO $\uparrow$
THETA ρ = distanza del punto dall'origine θ = angolo tra semiasse positivo delle x e vettore OP che congiunge l'origine al punto, calcolato in verso antiorarioFormule di passaggio

(trigonometria triang. rettangoli)

Se conosco ρ e θ :

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Se conosco x e y :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per il calcolo di θ osservo che

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

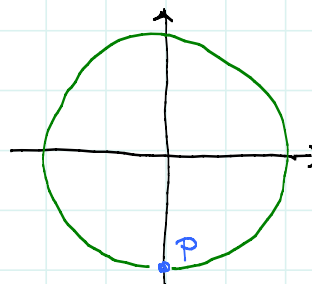
Questa va bene se
 $x \neq 0$

Oss. Per forza $\rho \geq 0$ e vale $\rho = 0$ se e solo se il punto $(0, 0)$.
L'angolo θ è definito, come in trigonometria, a meno di multipli di 2π (0 360°)

Il punto P ha $\theta = \frac{3\pi}{2}$, oppure

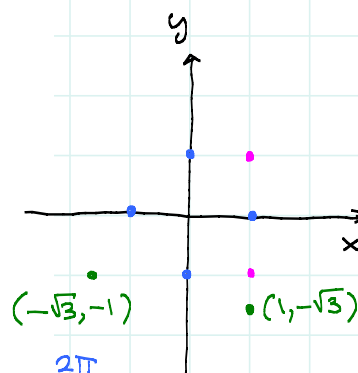
$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \text{ oppure}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{2}$$



x	y	ρ	θ
1	0	1	0
0	1	1	$\frac{\pi}{2}$
-1	0	1	π
0	-1	1	$-\frac{\pi}{2}$
1	1	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
1	-1	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
-4	4	$4\sqrt{2}$	$3\pi/4$
1	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{\pi}{3}$
0	0	0	N.D.
$-\sqrt{3}$	-1	2	$7\pi/6$

x	y	ρ	θ
0	2	2	$\pi/2$
-3	0	3	π
-1	0	1	$5\pi = \pi$
0	0	0	π
0	0	0	$\pi/4$
$\sqrt{3}$	1	2	$\pi/6$
0	-6	6	$-\pi/2$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$-4\pi/3$
-5	5	$5\sqrt{2}$	$3\pi/4$
	-2		$7\pi/6$



$$(-4, 4) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$(-1, 1) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$(-4, 4) = 4(-1, 1)$$

$$(1, -\sqrt{3}) \rightsquigarrow \rho = 2$$

$$\frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan \theta$$

$$(-\sqrt{3}, -1) \rightsquigarrow \rho = 2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta$$

$$\rho = 2 \quad \theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$x = \rho \cos \theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

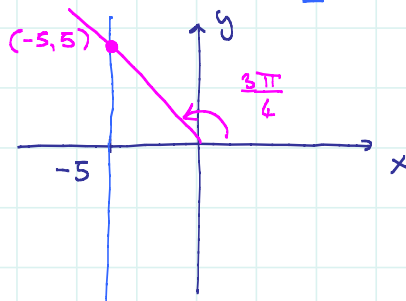
$$y = \rho \sin \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\rho = \sqrt{2} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$x = \rho \cos \theta = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \rho \sin \theta = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$x = -5 \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

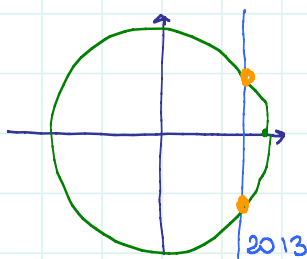


Relazioni	Soluzioni
$x = 2013, \rho = 2014$	2
$x = 2013, \rho = 2013$	1
$x = 2013, \rho = 2012$	0
$y = -2013, \rho = 2014$	2
$y = -2013, \rho = 2013$	1
$x = 2013y, \rho = 2$	2
$x + y = -3, \rho = 3$	
$x + y = -3, \rho = 4$	
$x - y = 3, \rho = 4$	

Relazioni	Soluzioni
$x + y = -3, \rho = 5$	
$x = 2013, \theta = \pi/4$	1
$x = 2013, \tan \theta = -1$	1
$x = -2013, \tan \theta = -1$	1
$x = 2013, \theta = 1$	1
$x = 2013, \theta = 2$	0
$x + y = 2013, \theta = 2\pi/3$	
$y = x^2, \rho = 7$	2
$y = x^2 - 7, \theta = 3$	

$(2013, 2013)$
 $(2013, -2013)$
 $(-2013, 2013)$
 $(2013, 2013 \tan 1)$

$x = 2013$
 $\rho = 2014$

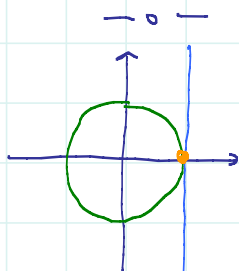


Come posso trovarle? $\sqrt{x^2 + y^2} = 2014 \leadsto x^2 + y^2 = 2014^2$

$\leadsto y^2 = 2014^2 - x^2 = 2014^2 - 2013^2 = (2014 + 2013)(2014 - 2013) = 4027$
 $a^2 - b^2 \quad (a+b) (a-b)$

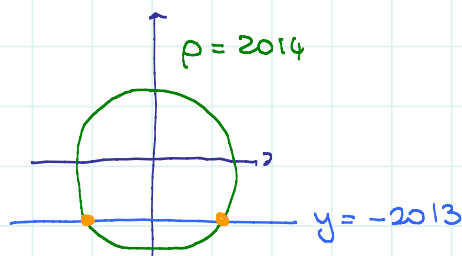
I due punti sono $(2013, \pm \sqrt{4027})$

$x = 2013$
 $\rho = 2013$



$\leadsto$ 1 sola soluzione
 $\leadsto (2013, 0)$

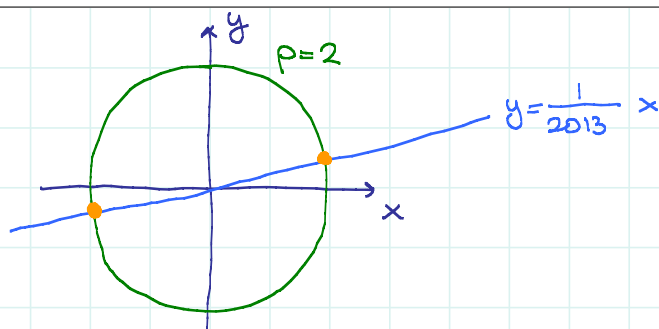
$y = -2013$
 $\rho = 2014$



$\leadsto (\pm \sqrt{4027}, -2013)$

$$x = 2013y$$

$$\rho = 2$$



Per trovarle, risolvo

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = \frac{1}{2013}x$$

risolvo

$$\tan \theta = -1$$

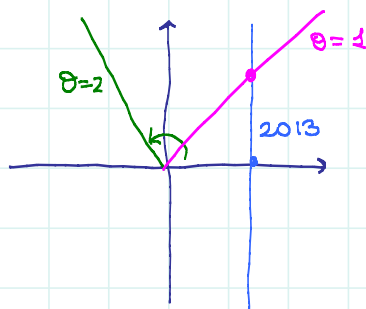
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

$$\frac{y}{x} = -1$$

$$y = -x$$

$$x = 2013 \quad \theta = 2$$

↑
radianti
è compreso tra
 90° e 180°



$x = 2013 \quad \theta = 1$ ~ una intersezione, ma chi è?

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

$$2013 = \rho \cos 1 \quad \leadsto \quad \rho = \frac{2013}{\cos 1} \quad \leadsto \quad y = \rho \sin \theta = \frac{2013}{\cos 1} \cdot \sin 1$$

$$= 2013 \tan 1$$

ALGEBRA

LINEARE

—

LEZIONE 03

Note Title

27/09/2022

Equazione della retta nel piano

- CARTESIANA
 - ↗ implicita $(ax+by+c=0)$
 - ↘ esplicita $(y=mx+n \text{ oppure } x=x_0)$
- PARAMETRICA $(a,b)+t(c,d)$

Esempio di equazione parametrica

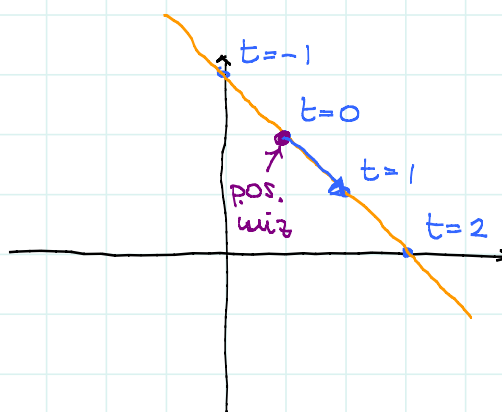
$$(1,2) + t(1,-1)$$

$$t=0 \rightsquigarrow (1,2)$$

$$t=1 \rightsquigarrow (2,1)$$

$$t=2 \rightsquigarrow (1,2) + (2,-2) = (3,0)$$

$$t=-1 \rightsquigarrow (1,2) - (1,-1) = (0,3)$$



Rappresenta il percorso di un ouino che al passare del tempo percorre una retta.

$(1,2)$ rappresenta il p.to iniziale

$(1,-1)$ rappresenta il verso in cui si muove l'ouino.

Oss. Descrizioni diverse possono determinare la stessa retta.

Ad esempio

$$(3,0) + t(1,-1)$$

(cambiato p.to di partenza)

$$(1,2) + t(2,-2)$$

(stessa partenza, velocità doppia)

$$(1,2) + t(-1,1)$$

(stessa partenza, vado al contrario)

$$(2,1) + t(-3,3)$$

$$(3,0) + t(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Dalla cartesiana alla parametrica:

→ scelgo due punti A e B sulla retta a caso

→ scrivo $A + t(B-A)$

↑ direzione applicata in A che punta verso B

$A + t(A-B)$ ← va bene pure questa

Dalla parametrica alla cartesiana $(1,2) + t(1,-1)$

1° modo Trovo 2 pti a caso $t=0 \rightsquigarrow (1,2) = P$
 $t=1 \rightsquigarrow (2,1) = Q$

Scrivo la retta per P e Q: $y = mx + n$

$$\begin{cases} 2 = m + n \\ 1 = 2m + n \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2^a \text{ eq.} - 1^a \text{ eq.} : \\ m = -1 \rightsquigarrow n = 3 \end{array}$$

$$y = -x + 3$$

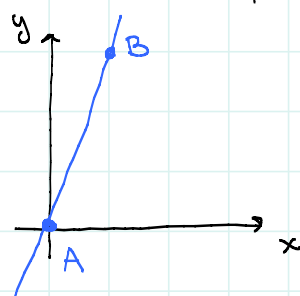
2° modo $(1,2) + t(1,-1) = (\underset{x}{1+t}, \underset{y}{2-t})$ "elimino t"

$$1+t = x \rightsquigarrow t = x-1 \rightsquigarrow y = 2-t = 2-(x-1) = 3-x \rightsquigarrow y = 3-x$$

Esempio Determinare l'angolo che la retta $y = 3x$ forma con la retta $2x + 5y + 7 = 0$

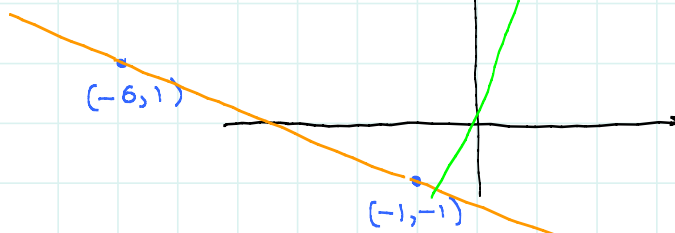
Strategia: scrivo le due rette in parametrica e calcolo l'angolo tra le direzioni.

Passiamo in parametrica



$$(0,0) + t(1,3)$$

A B-A



$$(-2, 3t+5) = (-2, 5) + t(0, 3) \quad \leadsto x = -2$$

↑
va verso l'alto

$$x = -2$$

$$y = 3t + 5$$

Cartesiana	Parametrica	a	b
$y = 2x$	$(a+t, bt)$	0	2
$y = 2x$	$(a+2t, bt)$	0	4
$y = 2x$	$(a+t, 3+bt)$	$\frac{3}{2}$	2
$x - y + 3 = 0$	$(a+bt, 2-5t)$		
$x - y + 3 = 0$	$(2-5t, a+bt)$		
$x - y + 3 = 0$	$(1, a) + t(1, b)$		
$x - y + 3 = 0$	$(2, a) + t(2, b)$		
$x - y + 3 = 0$	$(2, a) + t(b, 2)$		
$x + y + 3 = 0$	$(2, a) + t(b, 2)$		

Cartesiana	Parametrica	a	b
$3x + 2y = 7$	$(1, a) + t(1, b)$		
$3x + 2y = 7$	$(1, a) + t(b, 1)$		
$3x + 2y = 7$	$(2, a) + t(b, 2)$		
$x = 3$	$(a, 5) + t(b, 7)$		
$y + 2 = 0$	$(t+a, bt-2)$	tutti buoni	0
$y + 2 = 0$	$(t+a, bt+2)$		
$3x - 2y = 7$	$(a+t, 3-bt)$		
$\pi x - 2y = 3$	$(a+bt, t+1)$		
$x - 2\pi y = 3$	$(a+bt, t+1)$		

$y = 2x$ Voglio scriverla come $(a+t, bt) = (a, 0) + t(1, b)$

↑
p.to pendenza
 $(0, 0) + t(1, 2)$



Voglio scriverla come $(a+2t, bt) = (a, 0) + t(2, b)$

$(0, 0) + t(2, 4)$

$$(a+t, 3+bt) = (a, 3) + t(1, b)$$

$$\left(\frac{3}{2}, 3\right) + t(1, 2)$$

Metodo bavino Sostituisco la parametrica nella cartesiana

$$y = 2x$$

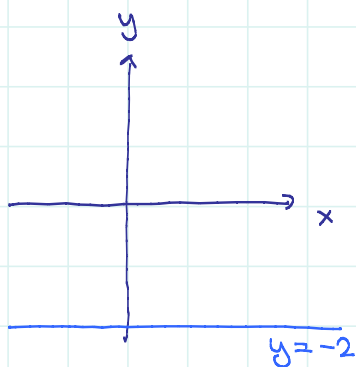
uguaglio i coeff.

$$3+bt = 2a+2t$$

$$b = 2 \quad (\text{coeff. di } t)$$

$$3 = 2a \quad (\text{termine noto})$$

$y+2=0$ che voglio scrivere come $(t+a, bt-2)$



$(a, -2) + t(1, b)$
↑ ↑
tutti i valori $(1, 0)$
di a vanno
bene !!

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 04

Note Title

30/09/2022

SISTEMI LINEARI

Tre possibilità tra cui decidere

- soluzione unica (non trovarla)
- nessuna soluzione
- infinite soluzioni che dipendono da un po' di parametri (non trovare "espressione generale" che le descrive)

Metodi : • Algoritmo di GAUSS (o GAUSS-JORDAN)
• matrici a scala
• PIVOT

Operazioni consentite : ① Scambiare tra di loro due righe
② Sostituire una riga R_i con la
riga $aR_i + R_j$ ($i \neq j$) con

[2.1] GENERALE : $a \neq 0$

[2.2] ULTRA-ORTODOSSA : $a = 1$

Idea centrale: se prendo un sistema, e faccio una delle 2 op.,
otengo un nuovo sistema che ha le stesse soluzioni
di quello iniziale.

Quindi si procede fino a quando si ottiene un
sistema con matrice a scala, che si sa risolvere.

Esempio 1

① $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ 2R_2 - R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7y = 9 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{9}{7} \rightsquigarrow 2x = 3y + 5 = \frac{27}{7} + 5 = \frac{62}{7} \rightsquigarrow x = \frac{31}{7}$$

$$\textcircled{2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 20 \end{cases}$$

NO SOLUTION!

$$\textcircled{3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A questo posso scegliere y come mi pare e trovare x di conseguenza:

$$y = t \rightsquigarrow 2x = 3y + 5 = 3t + 5 \rightsquigarrow x = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$$

Soluzione generale: $(x, y) = \left(\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}, t \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + t \left(\frac{3}{2}, 1 \right)$

$\uparrow$
parametro libero

$$= \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + t (3, 2)$$

$$= \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + t (-6, -4)$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$y = t, 2x = y - 3 = t - 3$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}, t \right) = \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) + t \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-2z=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ y-3z=0 \\ 0=0 \end{array}$$

$$z=t, \quad y=3t, \quad x=2-y-z=2-3t-t=2-4t$$

$$(x, y, z) = (2-4t, 3t, t) = (2, 0, 0) + t(-4, 3, 1)$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y+2z=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x+y+z=2 \quad \leadsto x=2 \\ y-3z=0 \quad \leadsto y=0 \\ -4z=0 \quad \leadsto z=0 \end{array} \quad \text{SOL. UNICA}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+y+3z=5 \\ x+2y-z=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \leadsto 0=1 \quad \text{NESSUNA SOLUZIONE} \quad \text{☹️}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[3R_2 - R_1]{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3\lambda + 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$3x - y = 2$$

$$(3\lambda + 1)y = 1$$

A solo 2 casi

• Se $3\lambda + 1 = 0$, cioè $\lambda = -\frac{1}{3}$, allora NO SOL

• Se $3\lambda + 1 \neq 0$, allora ricavo y e poi
ricavo $x \rightsquigarrow$ soluz. unica

— 0 — 0 —

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{2R_1 - 3R_2 \\ R_1 - 3R_3}]{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & \lambda \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -7 & 2 - 3\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & -9 - 3\lambda \end{array} \right) \quad 0 = -9 - 3\lambda$$

• Se $\lambda \neq -3$, allora NO SOLUZ.

• Se $\lambda = -3$, allora soluz. unica grazie alle prime 2 righe.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & 2 \end{array} \right)$$

• Se $\lambda + 1 = 0$, cioè $\lambda = -1$, allora NO SOL

• Se $\lambda \neq -1$, allora SOLUZ. UNICA

— 0 — 0 —

ALGEBRA

LINEARE

-

LEZIONE 05

Note Title

30/09/2022

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - y - 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & \lambda \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda - 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda - 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow 0 = \lambda + 2$$

- Se $\lambda + 2 \neq 0$, cioè $\lambda \neq -2$, allora NO SOLUZIONI
- Se $\lambda = -2$, allora soluzione unica data dalle prime 3 equas.

$$z = 1 \rightsquigarrow 2y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{2} ; \quad x - y + z = 1 \rightsquigarrow x = y - z + 1 = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \leftarrow \text{FARE LA VERIFICA PER SOSTITUZIONE}$$

— 0 — 0 —

GAUSS-JORDAN. Mettiamo che siamo arrivati a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1 - R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[2R_1 + R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Quando ritorno a sistema, in ogni riga c'è una sola variabile!

$$2x = 1 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}$$

$$z = 1 \rightsquigarrow z = 1$$

— 0 — 0 —

Sono date 2 rette r_1 ed r_2 , descritte in vari modi.

Per prima cosa si chiede di determinare l'equazione cartesiana della parallela ad r_1 passante per l'origine (scrivendola nella forma $y = mx + n$ o $x = x_0$). Successivamente si chiede di stabilire se r_1 ed r_2 sono coincidenti (C), distinte e parallele (P), oppure incidenti (I). Nel caso in cui siano incidenti, trovare il punto di intersezione ed il coseno dell'angolo θ che formano (si intende che θ è l'ampiezza dei 2 angoli minori tra i 4 che le rette formano intersecandosi).

r_1	r_2	Parallela	C-P-I	Intersezione	$\cos \theta$
$y = 3x + 2$	$y - 3x + 2 = 0$				
$y = 3x + 2$	$(t - 1, 3t - 1)$				
$y = 3x + 2$	$(t + 1, 3t - 1)$				
$(2, 3) + t(-1, 2)$	$(2t + 3, 1 - 4t)$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$3x - 2y + 5 = 0$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$3x + 2y - 5 = 0$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$-3x + 2y + 5 = 0$				

Date due rette r_1 ed r_2 , queste possono essere

- incidenti
- parallele e distinte
- coincidenti



Se conosco le eq. cartesiane, come trovo in che caso sono?

Le metto a sistema e risolvo:

→ soluz. unica $\leadsto$ incidenti

→ nessuna soluzione $\leadsto$ par. e distinte

→ ∞ soluz. $\leadsto$ stessa retta.

Rette $\parallel$ e $\perp$

- Parallele = stesso coeff. angolare (poi possono essere coincidenti o distinte)

- Perpendicolari

$$y = m_1 x + m_1$$

$$y = m_2 x + m_2$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

con qualche variante se sono $\parallel$ agli assi

In parametrica

$$(a_1, b_1) + t(c_1, d_1)$$

$$(a_2, b_2) + t(c_2, d_2)$$

Sono perpendicolari $\Leftrightarrow \langle (c_1, d_1), (c_2, d_2) \rangle = 0 \Leftrightarrow c_1 c_2 + d_1 d_2 = 0$

parallele

$\Leftrightarrow (c_2, d_2)$ è multiplo di (c_1, d_1)

① $y = 3x + 2$ r_1 Parallela a r_2 per l'origine $y = 3x$
 $y - 3x + 2 = 0$ r_2

$-3x + y = 2$ $\leadsto$ parallele e distinte
 $-3x + y = -2$ (se sottraggo viene $0 = 4$)

② $y = 3x + 2$ r_1
 $(t-1, 3t-1)$ r_2

Intersezione 1° modo

$t-1 = x \leadsto t = x+1$

$3t-1 = y$ $y = 3t-1 = 3x+3-1 = 3x+2$
 $\Rightarrow$ SONO COINCIDENTI!

Intersezione 2° modo

Sostituisco la parametrica di r_2 dentro la cartesiana di r_1 .

$3t-1 = 3(t-1)+2$

$3t-1 = 3t-1$

$0 = 0$ $\smile$

③ $y = 3x + 2$
 $(t+1, 3t-1)$

1° modo

$x = t+1$

$t = x-1$

$y = 3t-1$

$y = 3x-3-1 = 3x-4$

Parallele e distinte

2° modo

$3t-1 = 3(t+1)+2$

$3t-1 = 3t+3+2$

$-1 = 5$

$y = 3x + 2$

$\begin{cases} (2,3) + t(-1,2) \\ (2t+3, 1-4t) \end{cases}$ r_1 r_2

Parallela ad r_1 passante per origine

1° modo: passo in cartesiana...

2° modo: $(0,0) + t(-1,2) = (-t, 2t)$

$y = -2x$

Eventuale intersezione

1° modo: vado in cartesiana e metto a sistema

2° modo: senza passare in cartesiana!

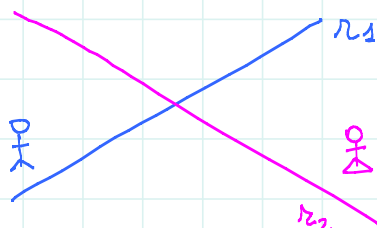
$$(2,3) + t(-1,2)$$

$$(2-t, 3+2t)$$

$$(3,1) + t(2,-4)$$

$$(3+2t, 1-4t)$$

Le direzioni sono multiple, quindi sono coincidenti oppure parallele e distinte.



$$2-t = 3+2s$$

$$3+2t = 1-4s$$

Immagino che ci sia un p.to in cui l'uomo passa al tempo t e il donnino passa al tempo s .

$$\begin{cases} 2s+t = -1 \\ 4s+2t = -2 \end{cases} \Rightarrow \infty \text{ soluzioni}$$

r_1	r_2
$y+7=0$	$(2-t, 6+t)$
$(1,-2)+t(2,-1)$	$(-1,2)+t(1,-2)$
$(1,3)+t(1,1)$	$(2-3t, 3t)$

Parallela ad r_1 per l'origine: $y=0$

Intersezione tra r_1 ed r_2

$$6+t+7=0 \quad t=-13$$

$\leadsto (15, -7)$ (sostituito t in r_2)

$$r_1 = (1, -2) + t(2, -1)$$

$$r_2 = (-1, 2) + t(1, -2)$$

Parallela ad r_1 per origine:

$$(0,0) + t(2,-1) = (2t, -t)$$

$$y = -\frac{1}{2}x \leadsto x+2y=0$$

Intersezione

$$(1+2t, -2-t)$$

$$\begin{cases} 1+2t = -1+s \\ -2-t = 2-2s \end{cases}$$

$$(-1+t, 2-2t)$$

$$-2-t = 2-2s$$

$$\begin{cases} s-2t = 2 \\ 2s-t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} s-2t = 2 \\ 3t = 0 \end{cases}$$

$$t=0 \quad s=2$$

VERIFICA: $t=0$ in $r_1 \leadsto (1, -2)$

$s=2$ in $r_2 \leadsto (1, -2)$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 06

Note Title

03/10/2022

Sono dati una retta r (in vari modi) ed un punto (x_0, y_0) . Si chiede di determinare l'equazione della parallela e della perpendicolare ad r passanti per (x_0, y_0) , e della perpendicolare ad r passante per l'origine. Fornire la risposta nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

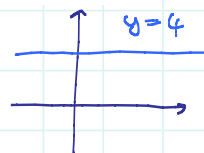
Retta r	(x_0, y_0)	Parallela	Perpendicolare	Perpend. origine	
$y = 2x$	$(1, 1)$	$y = 2x - 1$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = -\frac{1}{2}x$	1
$2x + y = 3$	$(1, 1)$	$y = -2x + 3$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}x$	2
$x = -7$	$(2, 3)$	$x = 2$	$y = 3$	$y = 0$	3
$4 - y = 0$	$(-3, 2)$	$y = 2$	$x = -3$	$x = 0$	4
$(2, 3) + t(-1, -1)$	$(5, 5)$	$y = x$	$y = -x + 10$	$y = -x$	5
$(3 + t, 2t + 5)$	$(-2, 1)$				6
$y = 1 \leftarrow (1, 1) - t(2, 0)$	$(3, -4)$	$y = -4$	$x = 3$	$x = 0$	7
$y = x + 1 \leftarrow (t, t + 1)$	$(-1, 0)$	$y = x + 1$	$y = -x - 1$	$y = -x$	8

② $y = -2x + 3$

③



④



⑤ $(2, 3) + t(-1, -1)$

1° modo $\leadsto$ passo in contemporanea

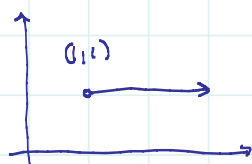
⑥ ...

2° modo $\leadsto (5, 5) + t(-1, -1)$

$(5, 5) + t(1, 1)$

⑦ $(1, 1) - t(2, 0) \leadsto y = 1$

$(1 - 2t, 1)$
 $\begin{matrix} x & y \end{matrix}$

Fatto geometrico

$ax + by = 0$

$\langle (a, b), (x, y) \rangle = 0$

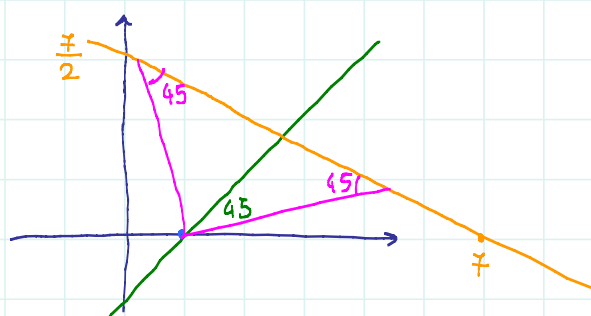
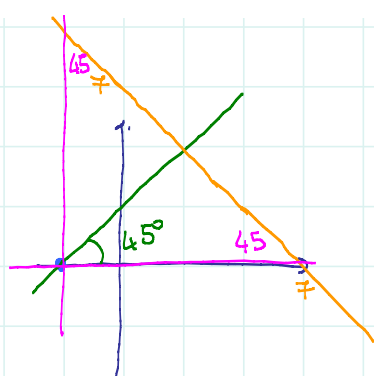
 (a, b) è un vettore perp. alla retta

$ax + by + c = 0$, quindi (a, b) è un vettore $\perp$ alla retta, che ora però non passa per l'origine se $c \neq 0$.

Si chiede di determinare la retta r_1 passante per (x_0, y_0) che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x , e le rette r_2 ed r_3 che passano per (x_0, y_0) e formano un angolo θ con la retta data r . Fornire le risposte nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

(x_0, y_0)	θ	Retta r	Retta r_1	Rette r_2 ed r_3
$(-1, 0)$	45°	$x + y = 7$	$y = x + 1$	$x = 1$ $y = 0$
$(1, 0)$	45°	$x + 2y = 7$	$y = x - 1$	
$(2, 3)$	$-\pi/3$	$x = 4$		
$(2, 3)$	$\pi/3$	$2x + y = 3$		
$(2, -1)$	30°	$(1, 1) + t(3, 4)$		
$(0, 0)$	$-\pi/4$	$(-t, 3t)$		
$(0, 1)$	$\arccos(1/3)$	$3x + y = 1$		
$(5, 3)$	$\arctan(1/2)$	$(2t + 1, -t + 4)$		
$(3, -1)$	$\arccos(-1/3)$	$(2t - 1, t)$		

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨



② Le due rette che sto cercando saranno del tipo $(1, 0) + t(a, b)$
La retta data è $(7, 0) + t(2, -1)$

Devo imporre $\cos \theta = \frac{\langle (a, b), (2, -1) \rangle}{\| (a, b) \| \cdot \| (2, -1) \|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
" $\cos 45^\circ$

$$\frac{2a - b}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2(2a - b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

$$8a^2 - 8ab + 2b^2 = 5a^2 + 5b^2 \rightsquigarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0$$

Divido per b^2 (dopo aver osservato che $b=0$ non è soluzione)

$$3 \frac{a^2}{b^2} - 8 \frac{a}{b} - 3 = 0 \quad 3t^2 - 8t - 3 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{25}}{3} < \frac{3}{-1/3}$$

Morale $\frac{a}{b} = 3$ $(a, b) = (3, 1)$ $(1, 0) + t(3, 1) \rightsquigarrow$ congesiana
 $\frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$ $(a, b) = (1, -3)$ $(1, 0) + t(1, -3)$

⑦ Punto : $(0,1)$

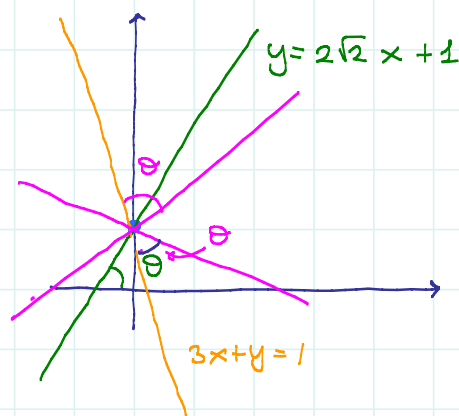
$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \rightsquigarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$3x + y = 1$$

Ora coeff. angolare = $\tan\theta$

Se conosco $\cos\theta$, come trovo $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 3 = 2\sqrt{2}$$



Come sono fatte r_2 ed r_3 ? Sono del tipo $(0,1) + t(a,b)$
mentre quella data è $(0,1) + t(-1,3)$

Basta imporre

$$\frac{\langle (a,b), (-1,3) \rangle}{\| (a,b) \| \cdot \| (-1,3) \|} = \cos\theta = \pm \frac{1}{3}$$

$$\frac{-a+3b}{\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{10}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$9(a-3b)^2 = 10(a^2+b^2)$$

$$9a^2 - 54ab + 81b^2 = 10a^2 + 10b^2$$

$\rightsquigarrow$ divido per b^2 e risolvo.

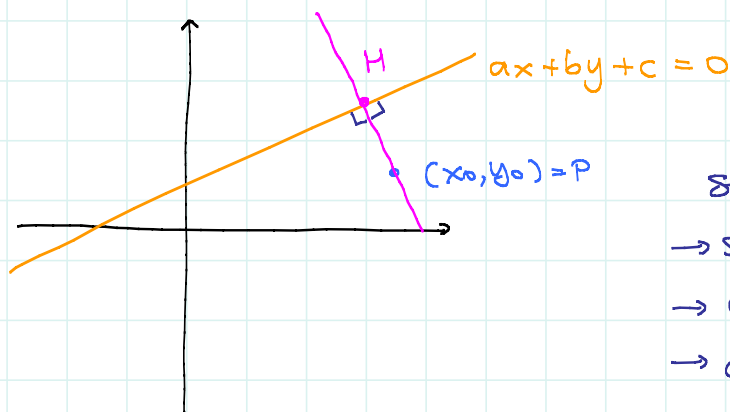
— 0 — 0 —

Distanza p.to - retta

Retta $ax + by + c = 0$

P.to (x_0, y_0)

Voglio trovare la distanza del punto dalla retta.



Strategia:

- $\rightarrow$ scrivo la $\perp$ ad r passante per P
- $\rightarrow$ interseco con la retta data $\rightsquigarrow H$
- $\rightarrow$ calcolo la distanza PH

→ Perpendicolare : $(x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + at, y_0 + bt)$

→ intersezione: $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$

$$(a^2 + b^2)t + ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\Rightarrow t = - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} = t_0$$

$$H = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0)$$

→ distanza $PH = \|H - P\| = \|(at_0, bt_0)\|$

$$= |t_0| \cdot \|(a, b)\| = |t_0| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Conclusione

$$\text{distanza} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 07

Note Title

03/10/2022

Rette nello spazio

$$\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{p.to di partenza}} + t \underbrace{(a, b, c)}_{\text{direzione}}$$

Piani nello spazio

Forma cartesiana : $ax + by + cz = 0$ ← piano passa per l'origine
 $ax + by + cz + d = 0$ ← piano in generale

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle$$

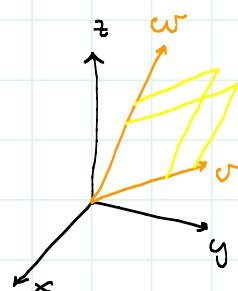
↑
vettore $\perp$ al piano

Forma parametrica : → se passa per l'origine

$$t\vec{v} + s\vec{w}$$

↑ ↑
vettori dati che
non sono uno
multiplo dell'altro

è il piano che passa per l'origine e contiene
le due rette date dai multipli di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



→ se non passa per l'origine : $P_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$
 ↑
"p.to base"

Distanza p.to da un piano : $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{piano : } ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{distanza : } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(esattamente lo stesso conto che si faceva nel piano).

Parametrica	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$		
$(t - s, 2t - 3s, 1 - t - 2s)$		
$(1, -1, 1) + t(2, 0, 2) + s(0, 1, 0)$		
$(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) + s(0, 2, 0)$		
$(1 + t - 2s, 1 + 2t + 3s, -2 + t - 2s)$		

①

Conosco un piano in parametrica e voglio passare in cartesiana

1°: metodo bonino

$$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$$

$$= (1 + 3t + s, -1 + 2s, 2 + t)$$

$\begin{matrix} & x & y & z \end{matrix}$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{sostituisco}$$

$$a + 3at + as - b + 2bs + 2c + ct + d = 0$$

$$(3a + c)t + (a + 2b)s + (a - b + 2c + d) = 0$$

Impongo che i 3 coeff. si annullino

$$3a + c = 0$$

$$a + 2b = 0$$

$$a - b + 2c + d = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

↑

$$3a + c = 0$$

$$6b - c = 0$$

$$9c + 6d = 0$$

$$d = t \quad c = -\frac{2}{3}d = -\frac{2}{3}t$$

$$b = \frac{c}{6} = \frac{1}{6} \left(-\frac{2}{3}t \right) = -\frac{1}{9}t$$

$$a = -\frac{c}{3} = \frac{2}{9}t$$

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{2}{9}t, -\frac{1}{9}t, -\frac{2}{3}t, t \right) \quad \text{scelgo } t = 9$$

$$(2, -1, -6, 9)$$

$$\leadsto 2x - y - 6z + 9 = 0$$

2° modo Uso la formula MISTERIOSA

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

VETTORE CHE È PERPENDICOLARE
A I DUE VETTORI DATI !!

Come puoi scoprirlo: risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} u_1 x + u_2 y + u_3 z &= 0 \\ w_1 x + w_2 y + w_3 z &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare (a, b, c) del piano, basta usare la formula con i due vettori che sono moltiplicati per t ed s . Nell'esempio

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2, 1, 6) \rightsquigarrow -2x + y + 6z = d$$

↑
impongo il
passaggio per
 $(1, -1, 2)$
 $\rightsquigarrow d = 9$

L'equazione è $-2x + y + 6z = 9$

Parametrica	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$		
$(t - s, 2t - 3s, 1 - t - 2s)$		
$(1, -1, 1) + t(2, 0, 2) + s(0, 1, 0)$		
$(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) + s(0, 2, 0)$		
$(1 + t - 2s, 1 + 2t + 3s, -2 + t - 2s)$		

↑ ↑

$$(1, 1, -2) + t(1, 2, 1) + s(-2, 3, -2)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-7, 0, 7)$$

$$\begin{aligned} -7x + 7z &= d \\ -7x + 7z &= -21 \\ -x + z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

VERIFICO A MENTE SOSTITUENDO x, y, z (dove viene $0=0$).

ALGEBRA

LINEARE

—

LEZIONE 08

Note Title

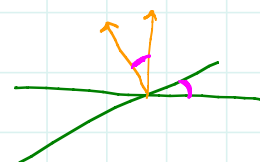
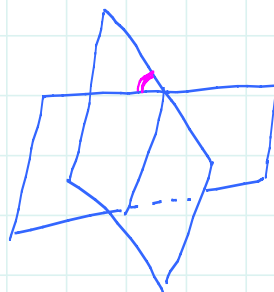
04/10/2022

Due piani nello spazio possono essere

- incidenti (si intersecano in una retta formando un certo angolo)
- paralleli e distinti (non si intersecano)
- coincidenti

Come decido? Metto a sistema le eq. cartesiane

Angolo tra 2 piani: per definirlo prendo un piano $\perp$ alla retta intersezione.



I due piani dati intersecano questo 3° piano lungo due rette. L'angolo tra le 2 rette è quello che cerco.

Operativamente: angolo tra 2 piani = angolo tra i vettori $\perp$ ai piani
= (a, b, c) della cartesiana

Esempi

$x + y - 2z = 4$	$x + y - 2z = 5$		
$(1, 1, -1) + t(-2, 1, 0) + s(-3, 0, 1)$	$x + 2y + 3z = 0$		
$(-3, 0, 1) + t(0, -3, 2) + s(2, 2, -2)$	$x + 2y + 3z = 0$		

← Paralleli e distinti

← Coincidenti

← Coincidenti

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow x + 2y + 3z = 0$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (2, +4, 6) \rightarrow 2x + 4y + 6z = 0$$

$$\begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+2y-3z = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x+y-z = 5 \\ y-2z = -1 \end{matrix}$$

$$z = t, \quad y = 2t-1, \quad x = 5-y+z = 5-2t+1+t = 6-t$$

$$(x, y, z) = (6-t, 2t-1, t) = (6, -1, 0) + t(-1, 2, 1)$$

parametrica della retta
intersezione

Angolo tra i 2 piani

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 1, -1), (1, 2, -3) \rangle}{\| \cdot \| \cdot \| \cdot \|} = \frac{1+2+3}{\sqrt{3} \sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Una retta e un piano possono essere

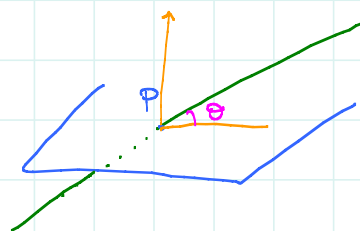
→ incidenti (calcolare p.to intersezione e angolo)

→ paralleli

→ retta contenuta nel piano

Se θ è l'angolo tra retta e piano,
allora

$90^\circ - \theta$ = angolo tra (a, b, c) del piano e direzione retta



	A	B	C	D	E			
1	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(0,1,1)			
2	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(2,2,2)	(1,1,1)			
3	(1,0,2)	(-1,1,5)	(0,2,5)	(2,0,1)	(0,-3,0)			
4	(2,0,1)	(0,0,3)	(4,0,1)	(1,1,5)	(0,1,6)			

① Eq. cartesiane del piano : $x+y+z = 1$ (verifica diretta)

Eq. param. retta $(1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) = (1-t, 1, t)$
 $D + t(E-D)$

Sostituisco: $1-t+1+t = 1 \rightsquigarrow 2 = 1 \rightsquigarrow$ nessuna soluz.
 $\rightsquigarrow$ retta $\parallel$ piano

$$\textcircled{2} \quad x+y+z=1 \quad (2,2,2)+t(1,1,1)=(2+t,2+t,2+t)$$

$$2+t+2+t+2+t=1 \quad \leadsto \quad 3t=-5 \quad \leadsto \quad t=-\frac{5}{3} \quad \leadsto \quad \text{sostituisco nella param.}$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Nota: la retta posso scriverla anche come (t,t,t)

$$3 \quad \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline (1,0,2) & (-1,1,5) & (0,2,5) & (2,0,1) & (0,-3,0) & \\ \hline (2,0,1) & (0,0,3) & (4,0,1) & (1,1,5) & (0,1,6) & \\ \hline \end{array}$$

$$A+t(B-A)+s(C-A)=(1,0,2)+t(-2,1,3)+s(-1,2,3)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \leadsto (-3, 3, -3) \quad x-y+z=3$$

VERIFICA

$$\text{Parametrica retta: } (2,0,1)+t(+2,+3,+1)=(2+2t,3t,1+t)$$

$$2+2t-3t+1+t=3 \quad \leadsto \quad 3=3 \quad \leadsto \quad \text{La retta è contenuta nel piano.}$$

A	B	C
(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)
(-1,-2,3)	(1,3,0)	(0,0,0)
(0,0,0)	(2,-4,6)	(-1,2,-3)

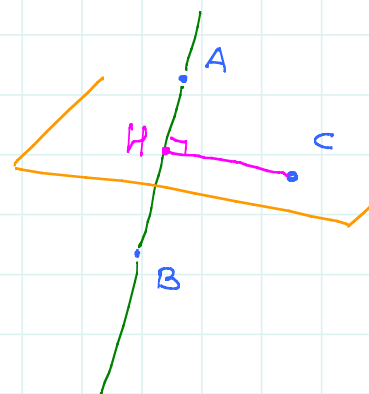
Calcolare il piano che passa per C ed è $\perp$ alla retta AB

$$\text{Retta AB: } (1,0,0)+t(-1,1,0)=(1-t,t,0)$$

Cerco il piano per C e $\perp$ alla retta

(a,b,c) del piano
= direzione della retta

$$-x+y=0 \quad \text{oppure} \quad x-y=0$$



Intersecando retta AB con questo piano ottengo

$$1-t-t=0 \quad 2t=1 \quad t=\frac{1}{2}$$

$\leadsto (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = H \leftarrow$ è il punto della retta AB più vicino a C!!

Quindi HC è la distanza tra il p.to C e la retta AB.

Approccio alternativo: il generico p.to della retta AB è

$$P = (1-t, t, 0)$$

La distanza di P da C, fatta al quadrato, è

$$PC^2 = \|(1-t, t, 0) - (0, 0, 1)\|^2$$

$$= \|(1-t, t, -1)\|^2 = (1-t)^2 + t^2 + 1 = 1 - 2t + t^2 + t^2 + 1 \\ = 2t^2 - 2t + 2$$

Quando è minimo? $4t - 2 = 0 \leadsto \boxed{t = \frac{1}{2}}$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 09

Note Title

04/10/2022

Due rette nello spazio possono essere

- coincidenti
- incidenti (si intersecano in un pto)
- parallele e distinte (nessuna intersezione, una stessa direzione)
- SGHEMBE (nessuna intersezione e direzioni diverse)

Operativamente quando i due vettori direzione

- se sono l'uno multiplo dell'altro saranno o parallele o coincidenti (interseco e vedo)
- altrimenti saranno incidenti o sghembe (interseco e vedo)

Per intersecare 2 rette nello spazio, le scrivo con 2 parametri t ed s e faccio il sistema.

Esempio

	r_1	r_2
①	$(1, 1, 3) \quad (1, 1, -4)$	$(0, 0, 2) \quad (0, 0, 1)$
②	$(1, 1, 3) \quad (1, 1, -4)$	$(2, 0, 2) \quad (2, -1, 2)$

$$r_1: (1, 1, 3) + t(0, 0, 1) \quad \text{(retta verticale)}$$

$$r_2: (0, 0, 1) + t(0, 0, 1) \quad \text{o parallele o coincidenti}$$

$$r_1: (1, 1, 3+t) \quad r_2: (0, 0, 1+s)$$

$$\begin{cases} 1=0 \\ 1=0 \\ 3+t=1+s \end{cases} \quad \text{NON HA SOLUZIONI} \Rightarrow \text{sono parallele}$$

Scrivere la cartaniana del piano che le contiene entrambe

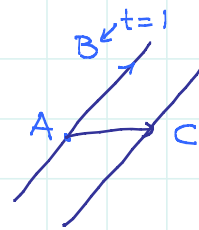
Superbravino: prendo un p.to su una retta e 2 p.ti sull'altra, poi faccio il piano

Leggermente + furbo, ma in realtà analogo

$$(1, 1, 3) + t(0, 0, 1) + s(1, 1, 2)$$

differenza dei
due p.ti di
partenza

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

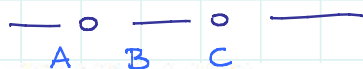


→ se voglio passo in cartesiana

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & (1, 1, 3) + t(0, 0, 1) & r_1 \\ & (2, 0, 2) + t(0, 1, 0) & r_2 \end{aligned}$$

Direzioni davvero diverse → sghembe o incidenti
le interseco

$$\begin{cases} 1 = 2 \\ 1 = 0 \\ 3 + t = 2 \end{cases} \leftarrow \text{NO SOLUZIONI} = \text{SGHEMBE}$$



6. Consideriamo il triangolo con vertici nei punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$.

- Determinare le coordinate dei punti medi dei lati e del baricentro.
- Determinare l'area del triangolo.
- Determinare le coordinate dei piedi delle altezze e dell'ortocentro (punto di intersezione delle altezze).
- Determinare il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai 3 vertici.
- Determinare le coordinate del circocentro (il centro della circonferenza circoscritta).

(a) Punti medi dei lati.

Come trovo il p.to medio di AB?



$$M = A + \frac{B-A}{2} = \frac{2A+B-A}{2} = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

(c) Pivoli delle altezze

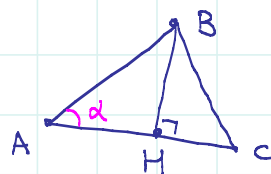
Facciamo altezza uscente da B

Strategia

→ scrivo retta AC

→ scrivo piano per B e perp. ad AC

→ interseco e trovo H



$$\text{retta AC: } (1, 1, 2) + t(0, 1, 1) = (1, 1+t, 2+t)$$

$$\text{piano: } y+z=2$$

$$\text{interseco: } 1+t+2+t=2 \leadsto 2t=-1 \leadsto t=-\frac{1}{2}$$

$$H = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$B = (2, 3, -1)$$

Verifica: deve succedere che

$$BH \perp AC$$

$$BH = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) \leadsto \langle BH, AC \rangle = 0 \quad \checkmark$$

(b) Area del triangolo

$$\boxed{1^{\circ} \text{ modo}} \quad \text{Area} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{2}}$$

$$\boxed{2^{\circ} \text{ modo}} \quad \text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \|(1, 2, -3)\| \cdot \|(0, 1, 1)\| \cdot \sin \alpha$$

↑
angolo
compreso

$$= \frac{1}{2} \sqrt{14} \sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 2, -3), (0, 1, 1) \rangle}{\| \dots \| \cdot \| \dots \|}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\langle \dots, \dots \rangle^2}{\| \dots \|^2 \cdot \| \dots \|^2}} = \frac{\sqrt{\| \dots \|^2 \| \dots \|^2 - \langle \dots, \dots \rangle^2}}{\| \dots \| \cdot \| \dots \|}$$

Quando vado a moltiplicare trovo

$$\frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 2 - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Riassumendo, alla fine

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \langle AB, AC \rangle^2}$$

3° modo Calcola AB e AC come sopra. Faccio la formula misteriosa con AB e AC e trovo un certo vettore v . Ora

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|v\|$$

Nel nostro caso: $AB = (1, 2, -3)$
 $AC = (0, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5, -1, 1) = v$$

$$\frac{1}{2} \|v\| = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

La dimostrazione è un conto: scrivo $AB = (a_1, a_2, a_3)$

$$AC = (b_1, b_2, b_3)$$

Scrivo v con le sue componenti $v = (a_1 b_3 - a_3 b_1, \dots, \dots)$

Verifico che $\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \langle AB, AC \rangle^2} = \|v\|$

$$A = (3, 2, 1),$$

$$B = (0, 1, 1),$$

Voglio 2 piani che hanno come intersezione la retta AB

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} 3a + 2b + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

Risolve e trovo 2 piani (sono ∞ , e basta prenderne 2).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

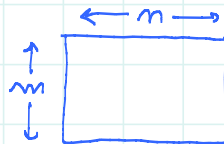
—

LEZIONE 10

Note Title

04/10/2022

Matrice = tabella rettangolare di numeri

Matrice $m \times n$ = m righe
 n colonne

Le posizioni si contano a partire da alto sx

1,1 1,2 1,3

A è una matrice

2,1 2,2 2,3

 $a_{i,j}$ = elemento in riga i e colonna j

Operazioni tra matrici

→ SOMMA : $A+B$ (si può fare se hanno la stessa dim. e si fa sommando termine a termine)

→ PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN NUMERO

(si moltiplicano tutti gli el. per quel numero)

→ TRASPOSTA : sia A una matrice allora A^t (talvolta tA)è la matrice ottenuta scambiando righe e colonne
(le due dimensioni si invertano)

→ PRODOTTO TRA DUE MATRICI

Data A matrice $m \times m$ e B matrice $m \times k$ si definisce il
prodotto AB come la matrice $m \times k$ definita da

$$\underbrace{(AB)_{i,j}}_{\substack{\text{termine di posto } i,j \\ \text{nella matrice prodotto}}} = \sum_{l=1}^m A_{i,l} \cdot B_{l,j}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A B

$$A \quad 3 \times 2 \quad B \quad 2 \times 2$$

$$AB \quad 3 \times 2$$

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Achtung! Il prodotto NON è commutativo !!

(in generale può succedere che AB si può fare e BA no, ma anche se si possono fare entrambi possono essere diversi)

Quando si può calcolare sia AB sia BA ?

Quando le due matrici sono quadrate, o più in generale $m \times n$ e $n \times m$

Casi speciali

A = vettore riga

B = vettore colonna

AB ha senso se riga e la colonna hanno lo stesso numero di elementi. Il risultato viene un numero che è il prod. scalare

$$1 \times n \quad n \times 1 \quad \square$$

Posso fare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà

$$(AB)^t = B^t A^t$$

osservare che le dimensioni sono compatibili

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare, quando esistono, le seguenti matrici:

$2A$	SI	$-B$	SI	$2x^t$	$-2, 2, 4$	$-A^t$	SI
$A+B$	NO	$A+C$	NO	$C-A$	NO	$A-3A$	$-2A$
$A+A^t$	NO	$B-2B^t$	SI	C^t-C	SI	x^t+x	NO
Ax	SI	Bx	NO	Cx	SI	x^tC	SI
AB	NO	BA	SI	BC	NO	CB	NO
AC	SI	CA	NO	Ax	SI	xA	NO
AA^t	SI 2×2	A^tA	SI 3×3	A^tx	NO	x^tA	NO
A^2	NO	B^2	SI 2×2	C^2	SI 3×3	x^2	NO
x^tCx	SI 1×1	BAx	SI 2×1	A^2A^t	NO	AA^tA	SI 2×3
ACx	SI 2×1	x^tAC	NO	x^tx	SI 1×1	xx^t	SI 3×3

Hanno senso le operazioni

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{x^t}^t \boxed{C} = \overbrace{x^t C}$$

$$\boxed{A} \boxed{A^t} = \boxed{}$$

Quali matrici si possono fare al quadrato? Solo le $n \times n$
 $n \times \textcircled{m}$ $\textcircled{m} \times n$

Fatto (che si potrebbe dimostrare): il prodotto di matrici è ASSOCIATIVO
 cioè se le dim. sono compatibili

$$(AB)C = A(BC)$$

$$x^t C x \quad \overbrace{x^t \boxed{C} x}^{x^t} = \boxed{}$$

$$\boxed{} \boxed{} \boxed{} = \boxed{} \boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{} \boxed{} \boxed{} = \boxed{} \boxed{} = \boxed{}$$

Matrice nulla : quella con tutti 0
(esiste per ogni coppia di dimensioni)

Matrice identica : esiste solo quadrata ed è quella che ha
 $\rightarrow 1$ sulla diag. principale $\nwarrow$
 $\rightarrow 0$ altrove

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà $Id \cdot A = A \cdot Id = A$ se le dim. sono compatibili

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 11

Note Title

11/10/2022

SPAZI VETTORIALI Per le definizioni, vedi lezioni 2021/22

Moralmente: è un insieme di "VETTORI" sul quale possiamo fare due operazioni

→ VETTORE + VETTORE = VETTORE

(commutativa, associativa, esistenza 0, esistenza $-\vec{v}$)

→ NUMERO · VETTORE = VETTORE

($1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ + distributive e associative)

Esercizio classico Dimostrare che il vettore $\vec{0}$ è unico.

Supponiamo che ce ne siano due, cioè $\vec{0}_1$ e $\vec{0}_2$. Questo vuol dire che

$$\vec{v} + \vec{0}_1 = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$\vec{v} + \vec{0}_2 = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

Ma allora

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{0}_1 & = & \vec{0}_1 + \vec{0}_2 & = & \vec{0}_2 + \vec{0}_1 & = & \vec{0}_2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{prop. di } \vec{0}_2 & & \text{comm.} & & \text{prop. di } \vec{0}_1 & & \\ \text{con } \vec{v} = \vec{0}_1 & & & & \text{con } \vec{v} = \vec{0}_2 & & \end{array}$$

Esempi classici di spazio vettoriale

1) $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$ n -uple di numeri reali

Basta osservare che li sappiamo sommare e moltiplicare per un numero.

[2] $\mathbb{R}$

Basta osservare che possiamo sommarli e moltiplicarli per un numero (posso anche dividere, ma non ci interessa)

[3] Matrici $n \times m$, con n ed m fissi

Le posso sommare e moltiplicare per un numero

(se $n=m$ le posso anche moltiplicare, ma non ci interessa)

Oss. Non c'è una grossa differenza tra le matrici 7×3 e $\mathbb{R}^{21}$
(è semplicemente un modo diverso di scrivere 21 numeri)
(la differenza si vede quando considero altre operazioni)

[4] $\mathbb{R}[x]$ = polinomi nella variabile x a coeff. reali

Consideriamo solo la somma di polinomi ed il prodotto di un polinomio per un numero

(non ci interessa che i polinomi possiamo moltiplicarli tra di loro o fare la composizione)

[5] $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi come sopra con grado ≤ 3 ($0 \leq 2022$)

(se sommo due polin. di grado ≤ 3 ottengo ancora un polin. di grado ≤ 3 . Idem se moltiplico per un numero)

Un polinomio di grado ≤ 3 si presenta nella forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{con } a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

possiamo associare al polinomio il "vettore"

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$$

5 bis $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ = pol. di grado ≥ 3 NON sono uno spazio vettoriale

La somma non è ben definita:

$$p_1(x) = x^2 + x^3$$

$$p_2(x) = x - x^3$$

$$\text{MA } p_1(x) + p_2(x) = x^2 + x \text{ NON HA GRADO } \geq 3.$$

6 Funzioni $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sono uno sp. vett.

Basta osservare che posso sommarle o moltiplicarle per un numero (posso anche moltiplicarle fra di loro, ma qui non è rilevante)

7 $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(2022) = 0 \}$
È uno sp. vettoriale?

→ Somma: prendo $p_1(x) \in V$ cioè con $p_1(2022) = 0$

" $p_2(x) \in V$ " " $p_2(2022) = 0$

La loro somma $p_1(x) + p_2(x)$ ha la stessa proprietà?

$$\text{SI: } (p_1 + p_2)(2022) = p_1(2022) + p_2(2022) = 0 + 0 = 0$$

→ Prodotto: stessa cosa: se $p(2022) = 0$, allora

$$c p(2022) = c \cdot 0 = 0$$

Quindi risposta affermativa!

7 bis $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(7) = 12 \}$ sono uno sp. vett.?

No! Se $p_1(7) = 12$ e $p_2(7) = 12$, allora $(p_1 + p_2)(7) = 24$, quindi V non è chiuso rispetto alla somma.

8 $V = \{ \text{funzioni } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ del tipo } f(x) = a \cos x + b \sin x \}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 numeri reali

È uno spazio vettoriale? SÌ!

→ Somma: prendo

$$f_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

$$f_2(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$$

Faccio la somma

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2) \cos x + (b_1 + b_2) \sin x$$

che è ancora dello stesso tipo

→ Prodotto: prendo

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

prendo un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

Faccio il prodotto

$$\lambda f(x) = \lambda(a \cos x + b \sin x) = (\lambda a) \cos x + (\lambda b) \sin x$$

è ancora dello stesso tipo.

Oss. Alla fine lo spazio V sopra si può identificare con $\mathbb{R}^2$

$$a \cos x + b \sin x \rightsquigarrow (a, b)$$

Limitandosi a fare le operazioni sui coeff.

9 $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \text{ tali che } p(3) = 0 \}$

Si verifica facilmente che sono uno spazio vettoriale.

Lo posso identificare con un certo $\mathbb{R}^n$?

Sì, grazie al solito teorema di RUFFINI, che dice che se

$$p(3) = 0, \text{ allora } p(x) = (x-3) q(x)$$

$\uparrow$ grado ≤ 1

cioè $p(x) = (x-3)(a+bx)$

$$p(x) \rightsquigarrow (a,b)$$

e questa rispetta le operazioni, ad esempio

$$p_1(x) = (x-3)(a_1+b_1x)$$

$$p_2(x) = (x-3)(a_2+b_2x)$$

allora $(p_1+p_2)(x) = (x-3)[(a_1+a_2) + (b_1+b_2)x]$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 12

Note Title

11/10/2022

SOTTO SPAZI VETTORIALI

Sia V uno sp. vett. e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme.

Si dice che W è un sotto sp. vettoriale se

è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per un numero, cioè

→ $\forall w_1 \in W, \forall w_2 \in W$ si ha che $w_1 + w_2 \in W$

→ $\forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda w \in W$

Oss. A questo punto W diventa a sua volta uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni che "eredita" da V .

Esercizio 1 Qui $V = \mathbb{R}^2$ e i W sono descritti dalle relazioni date

1. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^2$ con elemento generico (x, y) . Relazioni da esaminare:

$$x + y = 3, \quad 2x + 3y = 0, \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad xy \geq 0,$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

NO
(mult. $\lambda < 0$)

$$x = y,$$

SI

$$x = 0,$$

SI

$$x^2 + y^2 \geq 1,$$

NO

↑
mult. per $\lambda = 0$

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

NO

↑
mult. per λ grandi

→ Come dimostro che W è un sottospazio?

Devo dimostrare che la somma e il prodotto hanno la proprietà richiesta SEMPRE ($\forall w_1, \forall w_2, \dots$)

→ Come dimostro che W non è un sottospazio?

Basta che trovo una singola eccezione, alla somma o al prodotto.

$$1.1 \quad W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=3 \}$$

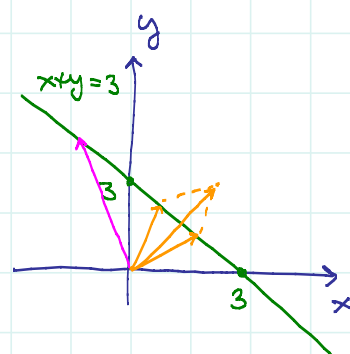
No!

$(3,0) \in W$ $(1,2) \in W$ ma $(4,2) \notin W$ quindi la somma può andare male.

Anche il prodotto va male:

$$w = (1,2) \in W \quad \text{ma} \quad 7w = (7,14) \notin W$$

Si poteva vedere anche geom.



$$1.2 \quad W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0 \}$$

SI!

Devo fare una dimostrazione che somma e prodotto vanno bene SEMPRE

• Somma $w_1 \in W$ $w_1 = (x_1, y_1)$ con $2x_1+3y_1=0$
 $w_2 \in W$ $w_2 = (x_2, y_2)$ con $2x_2+3y_2=0$
 $w_1+w_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \stackrel{?}{\in} W$

Controllo se $2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) \stackrel{?}{=} 0$
 $\underbrace{(2x_1+3y_1)}_0 + \underbrace{(2x_2+3y_2)}_0 = 0 \quad \checkmark$

• Prodotto $w \in W$ $w = (x, y)$ con $2x+3y=0$
 $\lambda \in \mathbb{R}$
 $\lambda w = (\lambda x, \lambda y) \stackrel{?}{\in} W$

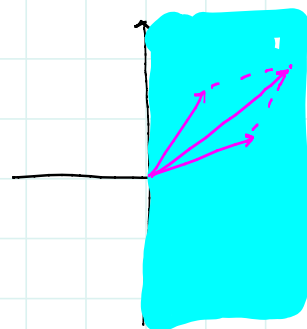
Controllo se $2(\lambda x)+3(\lambda y) \stackrel{?}{=} 0$
 $\lambda \underbrace{(2x+3y)}_0 = 0 \quad \checkmark$



Si vede anche geometricamente

1.3 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

NO! $w = (1, 6) \in W$ ma
 $-3w = (-3, -18) \notin W$



Valgono in realtà questi due fatti

→ se $w_1 \in W$ e $w_2 \in W$, allora $w_1 + w_2 \in W$,
 quindi la somma andrebbe bene

$$w_1 = (x_1, y_1) \text{ con } x_1 \geq 0$$

$$w_2 = (x_2, y_2) \text{ con } x_2 \geq 0$$

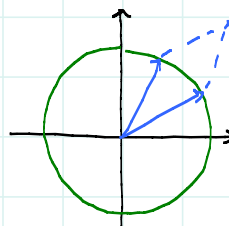
$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W \text{ perché } x_1 + x_2 \geq 0.$$

→ se $w \in W$ e $\lambda \geq 0$, allora $\lambda w \in W$

L'unica cosa che va male è il prodotto per λ negativi.

1.4 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

NO! Va male sia la somma
 sia il prodotto



1.5 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

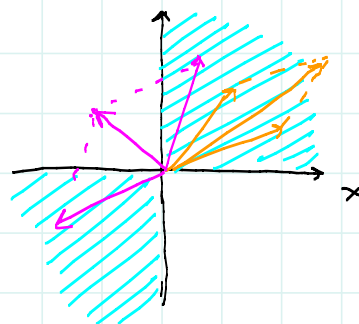
NON è un s.sp. vet.

→ la multi. andrebbe anche bene
 (verificarlo algebricamente)

→ la somma va male, ad esempio

$$w_1 = (1, 2) \in W \quad w_2 = (-2, -1) \in W$$

$$w_1 + w_2 = (-1, 1) \notin W$$



Oss. Se $0 \notin W$, allora W non è sottospazio
 (basta osservare che la multi. per $\lambda = 0$ va male)

$$p(0) = 5, \quad p(5) = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(5) = 5, \quad p(0) = p(5),$$

$$p(5) = p(\pi) = 0, \quad p(\pi) = p(0) = 5, \quad p(0) \cdot p(\pi) = 0, \quad p(9) \leq 0,$$

$$p(x) = p(-x), \quad p(x) + p(2x) = 5x, \quad p(x) = p(x^2), \quad 7p(x) = p(7x).$$

1 $p(0) = 5$ NO! (male sia somma, sia prodotto)

2 $p(5) = 0$ SI! (vedi lezione prec.)

3 $p(0) = 0$ SI!

4 $p(5) = 5$ NO!

5 $p(0) = p(5)$ SI!

→ somma : se $p_1(0) = p_1(5)$ e $p_2(0) = p_2(5)$, è vero che
 $p_1(0) + p_2(0) = p_1(5) + p_2(5)$? SI!

→ prodotto : se $p(0) = p(5)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, è vero che
 $\lambda p(0) = \lambda p(5)$? SI!

6 $p(5) = p(\pi) = 0$ SI!

8 $p(0) \cdot p(\pi) = 0$ NO!

Il prodotto avrebbe bene

La somma può andare male

Prendo $p_1(x)$ con $p_1(0) = 0$ e $p_1(\pi) = 3$. Allora $p_1 \in W$

" $p_2(x)$ con $p_2(0) = 5$ e $p_2(\pi) = 0$. Allora $p_2 \in W$

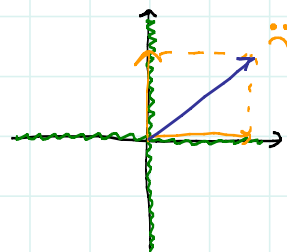
Cosa posso dire della somma?

$$(p_1 + p_2)(0) = 5 \quad \text{e} \quad (p_1 + p_2)(\pi) = 3, \quad \text{quindi} \quad p_1 + p_2 \notin W$$

Pensate di questo : $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \}$

Non è un sottosp. per colpa della somma

$$(1, 0) \in W, \quad (0, 5) \in W \quad \text{ma} \quad (1, 5) \notin W$$



ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 13

Note Title

11/10/2022

→ VETTORI LIN. INDIP.

→ GENERATORI

→ BASI

→ COMPONENTI

Def. Sia V sp. vett. e siano $u_1, \dots, u_m$ elementi di V .

Si dice che

- sono lin. indip. se

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$$

↳ lo è ovvia

(cioè una loro comb. lineare è il vettore nullo se e solo se tutti i coeff. sono nulli)

- sono generatori se ogni $v \in V$ si scrive come

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m \rightarrow (c_1, \dots, c_m \text{ si dicono le componenti di } v \text{ e sono uniche})$$

per opportuni $c_1, \dots, c_m$ in $\mathbb{R}$

- sono una base se sono lin. indip. + generatori

Esempio 1 $V =$ matrici 2×2

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$v = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑
sono una base dello spazio V

Perché sono una base?

→ sono generatori per quanto scritto sopra

→ sono lin. indip. perché la somma di sopra viene 0 (cioè la matrice nulla) se e solo se i coeff. sono tutti nulli.

Dimensione spazio = numero elementi di una base = 4

(V è descritto da 4 parametri)

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

UNA base di questo spazio è $1, x, x^2, x^3$. Infatti ogni $p(x) \in V$ si scrive come

$$p(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$$

Le due verifiche sono come sopra.

Quindi $\dim V = 4$.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}^2$

$$v_1 = (1, 2) \quad v_2 = (3, 4)$$

Questi sono una base di $\mathbb{R}^2$

base CANONICA

[Ci sarebbe una base più bella, cioè $(1, 0)$ e $(0, 1)$ poiché
 $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$]

Come verifico che è una base?

LINEARE INDIPENDENZA : impongo $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ e spero di dedurre che $c_1 = c_2 = 0$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 (1, 2) + c_2 (3, 4) = (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 4c_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{😊}$$

ESSERE GENERATORI : impongo $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \underline{(A, B)}$
e spero di riuscire a trovare c_1 e c_2 in funzione generico elem. di
di A e B . Con lo stesso conto di prima

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = A \\ 2c_1 + 4c_2 = B \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = A \\ 6c_2 = 2A - B \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{trovo } c_1 \\ \text{trovo } c_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & A \\ 0 & 6 & 2A - B \end{array} \right)$$

Oss. Il sistema nei 2 casi è lo stesso per la parte con le incognite. Cambia solo la colonna dei termini noti. Se lavorando alla Gauss arrivo ad una matrice a scala con tutti i PIVOT scalati come si deve, allora entrambe le verifiche hanno esito positivo

Esempio 4

$$\mathbb{R}^2 \quad \begin{array}{l} e_1 = (3, 1) \\ e_2 = (5, 2) \end{array} \quad \parallel \quad (0, -1) \quad \parallel \quad (2, -1)$$

Verificare che (e_1, e_2) è una base

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

"Li metto a colonna e lavoro alla Gauss"

Trovo le componenti di $(2, -1)$

Impongo $a(3, 1) + b(5, 2) = (2, -1)$

$$(3a + 5b, a + 2b) = (2, -1)$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3a + 5b = 2 \\ -b = 5 \end{array} \quad \rightsquigarrow \begin{array}{l} a = 9 \\ b = -5 \end{array}$$

Faccio la verifica! $9(3, 1) - 5(5, 2) = (2, -1) \quad \text{😊}$

Esempio 5

$$\mathbb{R}_2[x] \quad \begin{array}{l} e_1 = x^2 + 1 \\ e_2 = x - 2 \\ e_3 = x + 3 \end{array} \quad \parallel \quad x \quad \parallel \quad x^2 - 3x + 2$$

Verificare che sono una base

• LINEARE INDIPENDENZA $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$

$$a(x^2 + 1) + b(x - 2) + c(x + 3) = 0$$

$$ax^2 + (b + c)x + (a - 2b + 3c) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ a-2b+3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{3^a - 4^a} \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ -2b+3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

$c=0 \leadsto b=0 \leadsto a=0 \quad \ddot{\smile}$

• ESSERE GENERATORI. Impongo

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = A + Bx + Cx^2$$

e spero di trovare a, b, c in funzione di A, B, C .

Con lo stesso conto di prima arrivo a

$$ax^2 + (b+c)x + (a-2b+3c) = A + Bx + Cx^2$$

da cui

$$\begin{cases} a = C \\ b+c = B \\ a-2b+3c = A \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Conetti dopo} \\ \text{video} \end{array} \quad \text{che si risolve come prima}$$

Tutto dipende dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{che lavorata alla} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gauss diventa

Oss. Pensare ai polinomi $e_1 = x^2+1$, $e_2 = x-2$, $e_3 = x-3$ nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è la stessa cosa che pensare ai vettori

$$(1, 0, 1), (0, 1, -2), (0, 1, -3) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Oss. Dalla teoria sappiamo che se abbiamo n vettori in uno sp. vett. V di dimensione n (per questo basta trovare una base "bella") allora vale questo fatto

sono una base $\Leftrightarrow$ sono lin. indep.

$\Leftrightarrow$ sono generatori

(cioè basta fare una sola delle 2 verifiche).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 16

Note Title

14/10/2022

Basi e sottospazi vettoriali

Defn. Sia V uno sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_m$ el. di V . Si dice

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

l'insieme di tutte le comb. lineari di $v_1, \dots, v_m$ al variare dei coeff., cioè

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = \{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m : c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

Si verifica che lo span è un s. spazio vettoriale

Esempi banali

① Se $v \neq 0$, allora $\text{Span}(v) =$ tutti i multipli di v

= la retta che passa per l'origine e va in direzione v .

② Se v e w sono due vettori lin. indip. (non sono l'uno multiplo dell'altro), allora

$$\text{Span}(v, w) = \text{insieme dei vettori del tipo } t v + s w$$

= piano che passa per l'origine e contiene v e w

③ Se v e w sono lin. DIPENDENTI, allora

$$\text{Span}(v, w) = \text{retta che contiene } v, w \text{ e l'origine}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Span}(v) \\ &= \text{Span}(w) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &= \text{Span}(v) \\ &= \text{Span}(w) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{se entrambi} \\ \text{sono } \neq 0 \end{array}$$

Lemma di eliminazione Se v_{m+1} è comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$, allora

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

in poche parole "posso eliminare v_{m+1} "

Esempi di sottospazi (vettoriali)① I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono di 3 tipi:→ il solo $\{0\}$

→ tutte le rette che passano per l'origine

→ tutto $\mathbb{R}^2$

Dim = 0

Dim = 1

Dim = 2

una base

↑

Span(v)② I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono di 4 tipi:→ Solo $\{0\}$

→ rette per l'origine

→ piani per l'origine

→ tutto $\mathbb{R}^3$

Dim 0

Dim 1

Dim 2

Dim 3

Span(v)Span(v, w)due qualunque vettori
del piano LIN. INDIP.

	Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
①	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (3, 4)$ $v_2 = (5, 6)$	SI	2	/
②	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (2, 3)$	SI	1	/
③	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (0, \pi)$ $v_3 = (0, 0)$	NO	2	v_3
④	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (2, 3)$ $v_3 = (-3, 3)$	NO	2	v_3 v_1
⑤	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (2, 3)$ $v_3 = (-3, \pi)$	NO	2	v_1 v_2 v_3

← questi sono LIN. INDIP.
sono 2, quindi sono una
base di $\mathbb{R}^2$
↳ lo span è la retta
 $3x = 2y$

← Mi aspetto che se scrivo
 $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, allora
 a, b, c sono $\neq 0$

3-4-5 Se ho 3 vettori in $\mathbb{R}^2$, per forza sono LIN. DIP.(In generale: se uno spazio V ha dim. d , e ho $m > d$ vettori in V , allora per forza sono LIN. DIP.)

③ $(0, 0) = 0 \cdot (1, -1) + 0 \cdot (0, \pi)$

Span(v_1, v_2, v_3) = Span(v_1, v_2)

↑
lemma di elim.↑ ha dim. 2 perché v_1 e v_2
sono lin. indep.Posso eliminare solo v_3 perché se elimino v_1 o v_2 resta un solo vettore non nullo

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad v_1 &= (1, -1) & v_3 &= 0 \cdot v_2 + (-3)v_1 \\
 v_2 &= (2, 3) & v_1 &= 0 \cdot v_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)v_3 \\
 v_3 &= (-3, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Span}(v_1, v_2, v_3) &= \text{Span}(v_2, v_3) \\
 &\quad \text{lin. indep.} \\
 &= \text{Span}(v_2, v_3)
 \end{aligned}$$

Oss. Quando ho una relazione di D.P. LIN., posso ricavare tutti i vettori che hanno un coeff. $\neq 0$ in funzione degli altri

$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 1, 1)$	SI	1	/
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0, 1, 1)$ $v_2 = (2, -1, 3)$	SI	2	/
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (-4, 2, 6)$ $v_2 = (2, -1, 3)$	SI	2	/
$\textcircled{3} \quad \mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 0, 2)$ $v_2 = (2, 0, 1)$ $v_3 = (1, 1, 1)$	SI	3	/
$\textcircled{4} \quad \mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 0, 2)$ $v_2 = (2, -1, 1)$ $v_3 = (-1, 1, 1)$	NO $v_3 = v_1 - v_2$	2	v_1 v_2 v_3
$\textcircled{5} \quad \mathbb{R}^3$	$v_1 = (0, 1, 1)$ $v_2 = (2, -1, 3)$ $v_3 = (-2, 2, -2)$ $v_4 = (1, 2, 0)$	NO	3	v_1 v_2 v_3

$\textcircled{4}$ Perché posso eliminare chi voglio?

1° modo : chiunque elimino, vedo a occhio che gli altri 2 sono lin. indep. (non multipli l'uno dell'altro)

2° modo : $v_1 - v_2 - v_3 = 0$

Tutti i coeff. sono $\neq 0$, quindi posso ricavare ognuno in funzione degli altri e quindi eliminarlo

$\textcircled{3}$ Sospetto siano lin. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{lin. indep.}$$

- ⑤ Uno deve provare a risolvere $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$ e vedere che succede

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a - b + 2c + 2d = 0 \\ 2b - 2c + d = 0 \\ -4d = 0 \end{array}$$

$$d=0, \quad c=t, \quad b=t, \quad a = b - 2c - 2d = -t$$

$$(a, b, c, d) = (-t, t, t, 0)$$

ad esempio $-1, 1, 1, 0$

Cosa vuol dire? Che $-v_1 + v_2 + v_3 = 0$
 $\quad \quad \quad -0 \quad -0 \quad -$

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 15

Note Title

14/10/2022

$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1, 0, 1, 0)$ $v_2 = (0, -1, 1, 1)$ $v_3 = (1, 1, 0, -1)$ $v_4 = (0, 0, 1, 1)$	$S1$ $v_1 = v_2 + v_3$	3	v_1 v_2 v_3
----------------	--	---------------------------	---	-------------------------

Vediamo se sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a + c = 0$$

$$-b + c = 0$$

$$d = 0$$

$$0 = 0$$

$$d = 0 \quad c = t \quad b = t \quad a = -t$$

Come nell'esempio prec.

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Si può verificare che se eliminiamo uno a caso tra v_1, v_2, v_3 , i rimanenti sono indipendenti

Esempio finale

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_3 = (2, 0, 2, 0)$$

$$v_4 = (3, 1, 2, 0)$$

Si vedono a occhio le relazioni

$$v_3 = 2v_1$$

$$v_4 = v_2 + v_3$$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_2, v_3)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 eliminio v_4 eliminio v_3 lin. indep.

Dim = 2. Ho davvero tante possibilità di eliminazione.

Basta che i due restanti siano lin. indep. (ogni coppia tra v_2, v_4 può essere eliminata).

Somma e intersezione di sottospazi

Se V e W sono sottospazi di uno sp. vett. X , allora

→ $V \cap W$ è un sottospazio (facile verifica)

→ $V+W$ = più piccolo sottospazio di X che contiene V e W
 $= \{v+w : v \in V \text{ e } w \in W\}$

Vale la FORMULA DI GRASSMANN

$$\dim(V \cap W) + \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W)$$

Esempi

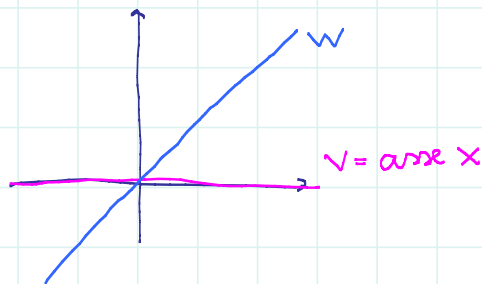
X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V \cap W)$	$\dim(V+W)$
$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$	1	1	0	2
$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$	1	1	1	1
$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$	1	2 $\mathbb{R}^2$	1 $V \cap W = V$	2

①

②

③

①



$$V \cap W = \{0\}$$

$\dim(V+W)$ lo posso ottenere dalla formula

oppure osservando che

$$V+W = \text{Span}((1,0), (1,1))$$

che sono lin. indep.

Fatto generale: se $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ e $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$ allora

$$V+W = \text{Span}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m)$$

↑ ↑
qui può esserci roba inutile

② $V = W = V \cap W = V + W = \text{retta } y=x$

③ Come vedo che $\dim(V+W) = 2$?

1° modo: Grassmann

2° modo: $V+W$ = somma di un p.to della retta + un p.to qualunque del piano = ottengo tutto il piano

3° modo: $V+W = \text{Span}((1,2), (3,4), (5,6))$

(posso eliminare chiunque e gli altri due restano lin. indep.)
 $\dim V \quad \dim W \quad \dim(V \cap W) \quad \dim(V+W)$

$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$	1	2	0	3	①
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$	2	2	1	3	②
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,-1)$ $(3,1,2)$	2	2			
$\mathbb{R}^3$	$(-1,1,1)$ $(2,1,0)$ $(1,2,1)$	$(1,0,1)$ $(0,5,0)$ $(7,-6,7)$	2	2			

$$U_3 = U_1 + U_2 \quad U_3 = 7U_1 - \frac{6}{5}U_2$$

① $V+W = \text{Span}((1,2,3), (1,1,0), (0,2,-1))$

Sospetto che siano lin. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ok}$$

Geometricamente si tratta di una retta ed un piano di $\mathbb{R}^3$ che si intersecano solo nell'origine.

② $V+W = \text{Span}((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1))$

Sospetto che i primi 3 siano indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ok} \rightsquigarrow \text{quindi } \dim(V+W) = 3$$

Come determino l'intersezione (geometricamente sono due piani che si intersecano in una retta, tutto per l'origine)?

1° modo (vale solo in $\mathbb{R}^3$)

Passo i due piani in contestuale e risolvo il sistema

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, -1, -1)$$

verifica: ha prod. scalare = 0 con i due vettori dati

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0, 1, -1)$$

verifica come prima

$$x - y - z = 0$$

$$y - z = 0$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$(2t, t, t) = t(2, 1, 1)$$

2° modo (Vale sempre se devo intersecare due sottospazi dati come Span)

$$\underbrace{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1)}_{\text{generico elemento di } V} = \underbrace{c(0, 1, 1) + d(1, 1, 1)}_{\text{generico elemento di } W}$$

→ Risolvo (so già che ci sono soluzioni) e da quelle deduco l'intersezione

↑
dipendenti da un parametro t

[Controllare che venga lo stesso di sopra]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 16

Note Title

18/10/2022

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W sp. vett. Un'appl. lin. è una $f: V \rightarrow W$ t.c.

$$(i) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{per ogni } v_1, v_2 \in V$$

$$(ii) \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e per ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

Def. Sia $f: V \rightarrow W$ lineare. Si definisce

→ KER o NUCLEO di f l'insieme
 $\uparrow$
 KERNEL

$$\{v \in V : f(v) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ di } W}}{0}\} = \text{Ker}(f) \subseteq V$$

$$\rightarrow \text{Im}(f) := \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$$

Fatti principali

- ① $\text{ker}(f)$ è un s.sp. vett. di V
- ② $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W
- ③ Vale il teorema RANK-NULITY

$$\dim(\text{ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$$

$\uparrow$ sp. partenza

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W sp. vett. di dimensione finita

Sia $f: V \rightarrow W$ una appl. lineare

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V (quindi $\dim(V) = m$)

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di W (quindi $\dim(W) = n$)

Costruiamo una matrice $m \times n$ in questo modo

Calcolo

$$f(v_1) = \underbrace{a_{1,1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{prima colonna della matrice}}} w_1 + \underbrace{a_{2,1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{prima colonna della matrice}}} w_2 + \dots + \underbrace{a_{n,1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{prima colonna della matrice}}} w_n$$

$$f(v_2) = \underbrace{a_{1,2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{seconda colonna della matrice}}} w_1 + \underbrace{a_{2,2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{seconda colonna della matrice}}} w_2 + \dots + \underbrace{a_{n,2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{seconda colonna della matrice}}} w_n$$

Si prosegue allo stesso modo fino a $f(v_m)$.

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

Morale: scelta una base in partenza ed in arrivo, ad f risulta associata una matrice A

(se cambio basi, cambia la matrice)

Utilità Supponiamo di voler calcolare $f(v)$ per un certo $v \in V$.

Posso seguire questa procedura

→ scrivo v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ cioè

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

→ Moltiplico A per il vettore colonna che ha come componenti $x_1, \dots, x_m$

$$\begin{matrix} \xleftarrow{m} \\ \boxed{} \\ \xrightarrow{m} \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow x_1 \\ \vdots \\ \uparrow x_m \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \downarrow n \end{matrix}$$

→ Otengo un vettore colonna lungo m , con componenti

$$y_1, \dots, y_m$$

→ Allora

$$f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$$

$$\underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_{\text{dim ker} \quad \text{dim Im}}$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x-y, 2x+y)$				①
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x-y, y-x)$				
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	$(x+y+z, 2x-z, 3x+2y+z)$				

① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x-y, 2x+y)$

Bisognerebbe verificare che è lineare, cioè

→ Somma

$$f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \stackrel{?}{=} f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

→ Prodotto per costante

$$f(\lambda(x, y)) \stackrel{?}{=} \lambda f(x, y)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x - y, 2x + y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

Come calcolo il ker?

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0)$$

$$(x - y, 2x + y) = (0, 0)$$

Quindi devo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ 3y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad x=0$$

L'unica soluzione è $(0,0)$, quindi $\text{Ker}(f) = \{0\}$
 $\uparrow$
 $0 \text{ di } \mathbb{R}^2$

Quindi $\dim \text{Ker}(f) = 0$

Come trovo la dim. dell'immagine?

$$\text{RN} \Rightarrow \begin{matrix} \dim \text{Ker} \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \dim \text{Im} \\ 2 \end{matrix} = \dim(\text{sp. partenza}) \quad \begin{matrix} 2 \end{matrix}$$

Quindi $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, quindi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (è un s.sp. dell'insieme di arrivo, che è $\mathbb{R}^2$, di dim = 2, e quindi è tutto $\mathbb{R}^2$)

Oss. Questo ci dice che ogni vettore dello spazio di arrivo è f di qualcosa, cioè dato $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ posso trovare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\underbrace{(x-y, 2x+y)}_{f(x,y)} = (A,B)$$

cioè posso risolvere il sistema

$$\begin{cases} x-y = A \\ 2x+y = B \end{cases}$$

Calcolare la matrice di f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (-1,1) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(e_1) \quad f(e_2)$

Il giorno in cui voglio fare $f(5, -7)$, posso

1: applicare la regola di f $f(5, -7) = (12, 3)$

2: usare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x+y-z, z-3x)$
---	-----------------

$\uparrow$ $\uparrow$
 v w

$$f(x, y, z) = (x+y-z, z-3x)$$

Calcolo $\ker(f)$

Non può essere $\ker(f) = \{0\}$ perché

$$\underbrace{\dim(\ker)}_{\substack{\text{deve essere} \\ \text{almeno uno}}} + \underbrace{\dim(\text{Im})}_{\substack{\leq 2 \\ \text{perché} \\ \text{Im} \subseteq W}} = \underbrace{\dim(\text{sp. portante } a)}_3$$

Fatto generale: se $\dim(W) < \dim(V)$, allora $\dim(\ker) \geq 1$

e anzi $\dim(\ker) \geq \dim(V) - \dim(W)$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

$\uparrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice tra le basi canoniche)

$$z = 3t, \quad y = 2t, \quad x = z - y = t \quad (t, 2t, 3t)$$

$$\ker(f) = \text{Span}((1, 2, 3)) \leftarrow \text{verifica ok}$$

Quindi $\dim(\ker) = 1$ e di conseguenza $\dim(\text{Im}) = 2$, quindi

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ per il solito motivo.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 17

Note Title

18/10/2022

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$
----------------	----------------	-----------------	----------------------------------	--

$$f(x, y) = (x-y, y, y-x)$$

È lineare? Sì, per i soliti motivi

$$\ker(f) \begin{cases} x-y=0 \\ y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \leadsto y=0 \overset{x=0}{\nearrow} \Rightarrow \ker(f) = \{0\}$$

$\text{Im}(f)$: $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, quindi l'immagine è un piano di $\mathbb{R}^3$
 Di quale piano si tratta?

In generale, se $v_1, \dots, v_m$ sono una base dello sp. di partenza, allora

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(\underbrace{f(v_1), \dots, f(v_m)}_{\text{questi possono essere lin. dip.}})$$

Nel vostro caso

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Span}(f(1,0), f(0,1)) \\ &= \text{Span}((1,0,-1), (-1,1,1)) \end{aligned}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 sono indipendenti

(se voglio la cartesiana del piano, basta usare form. misteriosa)

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$
----------------	----------------	-----------------	----------------------------------	--

Se voglio la matrice usando queste basi strane...

$$f(v_1) = (1, 0, -1) = a(1, -2, 0) + b(0, 2, 1) + c(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ -2a + 2b + c = 0 \\ b + c = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$a = 1 - c = -3$$

$$2b + 3c = 2 \leadsto 2b = 2 - 3c = -10 \leadsto b = -5$$

$$c = 4$$

$$f(v_2) = (-2, 3, 2) = a(1, -2, 0) + b(0, 2, 1) + c(1, 1, 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$c = -3 \quad 2b + 3c = -1 \leadsto 2b = -1 - 3c = 8 \leadsto b = 4$$

$$a = -2 - c = 1$$

La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

$$\left| \begin{array}{c} \mathbb{V} \\ \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \end{array} \right| \xrightarrow{\mathbb{W}} \mathbb{R}^2 \quad \left| \begin{array}{c} \text{---} \quad \circ \quad \text{---} \quad \circ \quad \text{---} \end{array} \right| \quad (p(1), p(2))$$

Input: polinomio di grado ≤ 3

Output: vettore di $\mathbb{R}^2$ le cui componenti sono $(p(1), p(2))$

La verifica della linearità è immediata (se uno ha chiaro cosa vuol dire)

$$\boxed{\ker(f)} \quad \mathbb{R}^N \Rightarrow \dim(\ker(f)) \geq 2$$

$$\ker(f) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : (p(1), p(2)) = (0, 0) \}$$

$$\text{Scrivo } p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$

$$p(2) = a + 2b + 4c + 8d = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$d = t, c = s, b = -3s - 7t$$

$$b + 3c + 7d = 0$$

$$a = -b - c - d = 3s + 7t - s - t = 2s + 6t$$

↑ ↑

$$(a, b, c, d) = (2s + 6t, -3s - 7t, s, t)$$

$$= s(2, -3, 1, 0) + t(6, -7, 0, 1)$$

$$\ker(\varphi) = \text{Span}(2 - 3x + x^2, 6 - 7x + x^3)$$

↑ ↑
verifica che questi
polinomi soddisfano
 $p(1) = p(2) = 0$.

$\text{Im}(\varphi)$: ha $\dim = 2$ ed è contenuta in $\mathbb{R}^2$,

quindi $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$

quindi φ è SURGETTIVA

Matrice tra le basi canoniche

In partenza

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x$$

$$v_3 = x^2$$

$$v_4 = x^3$$

In arrivo

$$w_1 = (1, 0)$$

$$w_2 = (0, 1)$$

$$\varphi(v_1) = (1, 1) = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$$

$$\varphi(v_2) = (1, 2) = 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2$$

$$\varphi(v_3) = (1, 4)$$

$$\varphi(v_4) = (1, 8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

$M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$	$A + A^t$
---	-----------

Lineare? $\varphi(\lambda A) = \lambda A + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t = \lambda(A + A^t) = \lambda \varphi(A)$

$$\varphi(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) + (A_1 + A_2)^t$$

$$= A_1 + A_2 + A_1^t + A_2^t \quad (\text{cosa succedeva con il prodotto?})$$

$$= (A_1 + A_1^t) + (A_2 + A_2^t)$$

$$= \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$$

$$\boxed{\ker(\varphi)} \quad \{ A \in M_{2 \times 2} : A + A^t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } 2 \times 2 \text{ nulla}}}{0} \}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A + A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2a = 0 & a = d = 0 & b = -c \\ b + c = 0 \\ c + b = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

Quindi $\ker(\varphi)$ sono tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Quindi } \boxed{\ker(\varphi) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Quindi $\dim(\ker(\varphi)) = 1$.

$\boxed{\text{Im}(\varphi)}$ $\text{RN} \Rightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) = 3 \Rightarrow \varphi$ non è surgettiva
Chi è una base dell'immagine?

Prendo $v_1, \dots, v_4$ base di $M_{2 \times 2}$ e $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_4)$ sono generatori di $\text{Im}(\varphi)$ (non sono una base perché sono troppi)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una base dell'immagine è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Un'altra base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chi è la matrice di f usando v_1, v_2, v_3, v_4 in partenza ed arrivo?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow v_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{matrix}$
 $\quad \quad \quad - \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 18

Note Title

18/10/2022

Teorema di struttura delle applicazioni lineariSiano V e W due sp. vettorialiSia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V Siano $w_1, \dots, w_n$ vettori qualunque di W (non necess. una base)Allora esiste un'unica appl. lineare $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

(Brutalmente: posso mandare dove mi pare una base dello sp. di partenza, e l'applic. lin. è univocamente determinata)

Dato $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e allora

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \\ &= a_1 \underbrace{f(v_1)}_{w_1} + \dots + a_n \underbrace{f(v_n)}_{w_n} \end{aligned}$$

Esempi

	V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U
①	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$v_1 (1,2) \rightarrow (2,3) \quad w_1$ $v_2 (1,3) \rightarrow (7,8) \quad w_2$	$\begin{matrix} E \\ U \end{matrix}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(2,4) \rightarrow (7,8)$	②
③	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(2,4) \rightarrow (4,6)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,3) \rightarrow (2,3)$	④

- ① Esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f(1,2) = (2,3)$ e $f(1,3) = (7,8)$? Se sì, è unica?

Provo con il teo. struttura. Se quelli dati in partenza sono una base, allora f esiste ed è unica

Gli v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$ (sono in numero giusto, e non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono LIN. INDIP.)

Non serve nessuna propr. speciale di w_1 e w_2

Chi sono $\ker$ e Im ?

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Span}(f(v_1), f(v_2)) \\ &= \text{Span}(w_1, w_2) \\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
sono lin. indep

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$ perché ha dim 0 per $\mathbb{R}^N$

Chi è la matrice di f usando in partenza la base v_1, v_2 e in arrivo la base w_1, w_2 .

$$\begin{aligned}f(v_1) &= w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \\ f(v_2) &= w_2 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

Chi è la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base canonica? $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$

1° modo Cerco di usare la definizione

$$\begin{aligned}f(1, 0) &= f(3v_1 - 2v_2) = 3f(v_1) - 2f(v_2) = 3(2, 3) - 2(7, 8) \\ &= (-8, -7) = -8e_1 - 7e_2 \\ f(0, 1) &= f(v_2 - v_1) = f(v_2) - f(v_1) = (7, 8) - (2, 3) \\ &= (5, 5) = 5e_1 + 5e_2\end{aligned}$$

La matrice è

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

2° modo (Bovino puro) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Quali proprietà deve avere?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 3 \\ a + 3b = 7 \\ c + 3d = 8 \end{cases} \quad \text{no risolvendo trovo la stessa di prima}$$

Un giorno ci saranno 3° e 4° modo.

V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,3) \rightarrow (7,8)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} v_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) & w_1 \\ v_2 & (2,4) \rightarrow (7,8) & w_2 \end{matrix}$	N.E. ②
③ $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} v_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) & w_1 \\ v_2 & (2,4) \rightarrow (4,6) & w_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} E \\ \checkmark \end{matrix}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} v_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) & w_1 \\ v_2 & (1,3) \rightarrow (2,3) & w_2 \end{matrix}$	E.U.

↑ sono una base

② $f(1,2) = (2,3)$ $f(2,4) = (7,8)$

Posso usare teo. struttura? NO: $\{v_1, v_2\}$ NON sono una base
 $\Rightarrow$ BOH (il solo teo. struttura non ci aiuta)

Osservo che $v_2 = 2v_1$, quindi dovrebbe essere $f(v_2) = 2f(v_1)$ e non lo è, quindi f NON esiste

③ $f(1,2) = (2,3)$

$f(2,4) = (4,6)$

è conseguenza della precedente!
 (quindi si può eliminare)

In questo caso f esiste, ma NON è unica.

Completato $(1,2)$ ad una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio aggiungendolo
 $(1,0)$ $\{(1,2), (1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$
 $\{(1,2), (23,74)\}$ PURE

Per il teorema di struttura esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$f(1,2) = (2,3)$

$f(1,0) = \text{quello che voglio}$

Oss. Provare nei casi ② e ③ a cercare la matrice con il metodo bonino.

Nel caso ② il sistema viene impossibile

" ③ il sistema ha ∞ soluzioni, dipendenti da 2 parametri
 (posso mandare $(1,0)$ in un qualunque A, B)

①	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,1) \rightarrow (-1,-2)$ $(2,3) \rightarrow (1,0)$	$\nexists$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,1) \rightarrow (-1,-2)$ $(2,3) \rightarrow (1,1)$	E U	②
③	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (1,2,3)$ $(2,2) \rightarrow (1,2,3)$	$\nexists$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (1,0,-1)$ $(-1,-1) \rightarrow (-1,0,1)$	E $\nexists$	④
⑤	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,-1) \rightarrow (1,2,3)$ $(2,2) \rightarrow (1,2,3)$	E.U.	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (0,0,0)$ $(12,11) \rightarrow (-1,0,1)$	E.U.	⑥

$\uparrow$
base in partenza
 $\uparrow$
base in partenza

⑥ E.U. $\text{Im}(\varphi) = \text{Span}((0,0,0), (-1,0,1))$
 $= \text{Span}((-1,0,1)) \leadsto \dim(\text{Im}) = 1$

$\dim(\ker(\varphi)) = 1 \quad \ker(\varphi) = \text{Span}((1,1))$

③ Se $\varphi(1,1) = (1,2,3)$, allora per forza $\varphi(2,2) = (2,4,6)$

④ La seconda cond. è inutile e resta solo

$\varphi(1,1) = (1,0,-1)$

$\varphi(37,42) = \text{quello che mi pone}$

① $v_3 = v_1 + v_2$ MA $\varphi(v_3) \neq \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

② La 3^a cond. segue dalle prime 2, quindi è inutile.

Le prime 2 determinano φ univocamente

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 19

Note Title

21/10/2022

→ Matrice di cambio di base

→ Matrice INVERSA

CAMBIO DI BASESetting : V sp. vett. di dim. finita $\{v_1, \dots, v_m\}$ base di V $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ altra base di V .Domanda : se conosco le comp. di un vettore v rispetto alla prima base, come trovo le comp. di v rispetto alla seconda ?Risposta : si usa una matrice $M_{m \times m}$ detta "di cambio di base".Se $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ allora $x = (x_1, \dots, x_m)^t$ (come colonna), allora

$$y = Mx$$

è una colonna le cui componenti soddisfanno

$$v = y_1 \hat{v}_1 + \dots + y_m \hat{v}_m$$

In INPUT : comp. rispetto alla prima base

In OUTPUT : " " " seconda "

Come si costruisce M ? È la solita "battaglia navale". Scrivo

$$v_1 = a_1 \hat{v}_1 + \dots + a_m \hat{v}_m \quad \rightsquigarrow a_1, \dots, a_m \text{ sono la prima colonna di } M$$

1° della 1° base

$$v_2 = b_1 \hat{v}_1 + \dots + b_m \hat{v}_m \quad \rightsquigarrow b_1, \dots, b_m \text{ sono la seconda colonna di } M$$

e così via.

Perché funziona?

Osservazione fondamentale: quando calcolo Mx
 $\begin{matrix} \nearrow \\ n \times n \end{matrix}$ $\nwarrow$ colonna lunga n
 in realtà sto calcolando la comb. line. delle COLONNE di M
 che ha come coeff. $x_1, \dots, x_n$ (le comp. di x)

Esempio $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dato il fatto generale, quando calcoliamo Mx stiamo facendo
 la comb. lineare delle colonne di M con coeff. $x_1, \dots, x_n$, ma
 le colonne di M sono proprio $\underset{-o-}{u_1}, \dots, \underset{-o-}{u_m}$ scritti nella nuova base.

Esempio $V = \mathbb{R}^2$

$$\{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\} = \{(0, 1), (3, -1)\}$$

Voglio la matrice di cambio base $\{u_1, u_2\} \rightarrow \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$

$$(1, 2) = a(0, 1) + b(3, -1)$$

$$\begin{aligned} 3b &= 1 & \leadsto b &= \frac{1}{3} \\ a - b &= 2 & \leadsto a &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$(1, 3) = a(0, 1) + b(3, -1)$$

$$3b = 1 \quad b = \frac{1}{3}$$

$$a - b = 3 \quad a = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Prendiamo $v = (2, 5)$. Le sue comp. risp.

alla prima base sono $(1, 1)$ perché $(2, 5) = 1 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 3)$

Chi sono le comp. risp. alla seconda base?

1° modo: risolvendo $(2,5) = a(0,1) + b(3,-1)$

2° modo $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
 $\uparrow$ componenti cercate

Verifica: $\frac{17}{3}(0,1) + \frac{2}{3}(3,-1) = (2,5) \quad \text{☺}$
 $\quad \quad \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$

MATRICE INVERSA Sia A una matrice $n \times n$ (quindi $\square$)

Cerco una matrice B, sempre $n \times n$, tale che

$$AB = BA = Id$$

Come faccio a vedere se esiste ed eventualmente trovarla?

Caso facile 2x2 $B = \frac{1}{\underline{ad-bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $\uparrow$
 B esiste se denom. $\neq 0$

Si verifica che funziona moltiplicando

Nel caso generale ci sono 2 metodi

→ formula con i determinanti

→ alla GAUSS, in questo modo

- Parto da $(A | Id)$ come matrice $n \times 2n$
- Lavoro alla GAUSS fino a far venire Id a sx, cioè $(Id | B)$
- Quello che resta a destra è la B!

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ con la formula $\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$
 inversa di A!!

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\uparrow 19R_2 \\ -5R_3}]{\substack{19R_1 - 3R_3 \\ \downarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 19 & 38 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & -76 & 0 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 38 & 0 & 0 & -6 & 8 & 24 \\ 0 & -76 & 0 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right) = \begin{array}{l} \text{Divido la prima per 38} \\ \text{" seconda per -76} \\ \text{" \text{terza per 19} \end{array}$$

A cosa ci serve la matrice inversa?

Se A cambia componenti da $\{v_1, \dots, v_m\}$ a $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$,
chi fa il cambio inverso da $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ a $\{v_1, \dots, v_m\}$?

La matrice inversa!

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la base

$$\{v_1, v_2\} = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

Scrivere il cambio di base dalla canonica alla nuova base

Osservazione

$$(1, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(1, 4) = 1 \cdot (1, 0) + 4(0, 1)$$

$$\uparrow$$

VECCHIA

$$\uparrow$$

NUOVA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

Quindi la M scritta cambia dalla $\{(1,3), (1,4)\}$ alla canonica

Quella che mi serve è l'inversa $M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ cambia dalla $\{(1,0), (0,1)\}$ alla $\{(1,3), (1,4)\}$

Riprova $(2, -3) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. risp. alla canonica}}}{2} (1,0) - 3 (0,1)$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix} \quad 11(1,3) - 9(1,4) = (2, -3)$$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 20

Note Title

21/10/2022

	B	$\hat{B}$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (-1, 4)$ $v_2 = (2, 5)$	$w_1 = (1, 6)$ $w_2 = (1, 7)$			
			$C \rightarrow B$	$C \rightarrow \hat{B}$	$\hat{B} \rightarrow B$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix} \quad \text{Dalla } B \text{ alla canonica} \quad (\text{le colonne sono le comp. della } B \text{ rispetto alla canonica})$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2$

La matrice dalla canonica alla B è Q inversa

$$\frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$C \rightsquigarrow B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{Dalla } \hat{B} \text{ alla canonica}$$

$$\frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \rightarrow \hat{B}$

Per fare $\hat{B} \rightarrow B$ considero $\hat{B} \rightarrow C \rightarrow B$

$$\frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{si calcola}$$

$C \rightarrow B \quad \hat{B} \rightarrow C$

Esempio 3×3

$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 2, 1)$ $v_2 = (2, 3, 0)$ $v_3 = (0, 1, 1)$	$w_1 = (1, 2, 0)$ $w_2 = (0, -1, 1)$ $w_3 = (3, 1, 4)$
	B	$\hat{B}$

Voglio il cambio di base $\hat{B} \rightsquigarrow B$

Quasi gratis $\hat{B} \rightarrow C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Scriviamo $B \rightarrow C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e Facciamo l'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \rightarrow B$

Conclusione : la matrice $\hat{B} \rightarrow B$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \dots$$

$\uparrow$ INPUT: C $\uparrow$ INPUT: $\hat{B}$
 OUTPUT: B OUTPUT: C
 — 0 — 0 —

$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (3, 1)$ $e_2 = (5, 2)$	$(0, -1)$	$(2, -1)$
----------------	----------------------------------	-----------	-----------

B

Scrivere le componenti dei due vettori dati rispetto alla base "strana" $\{e_1, e_2\}$

PASSATO $(0, -1) = a(3, 1) + b(5, 2) \leadsto$ trovo a e b
 $(2, -1) = a(3, 1) + b(5, 2) \leadsto$ "

ADESSO $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Dalla strana alla canonica

$\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Dalla canonica alla strana

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$5(3, 1) - 3(5, 2) = (0, -1) \quad \smile$$

$$9(3, 1) - 5(5, 2) = (2, -1) \quad \smile$$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1 = x^2 + 1$ $e_2 = x - 2$ $e_3 = x + 3$	x	$x^2 - 3x + 2$	canonica $\{1, x, x^2\}$
--------------------------	---	-----	----------------	-----------------------------

PRIMA $x = a(x^2 + 1) + b(x - 2) + c(x + 3)$ e risolvo

ORA $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Dalla strana alla canonica

Basta calcolare M^{-1} con Gauss e poi fare M^{-1} applicato ai 2 vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e poi fare la verifica}$$

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x - 3y, x + 4y)$	$\left\ \begin{array}{l} v_1 = (1, 2) \\ v_2 = (1, 3) \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{l} w_1 = (1, 4) \\ w_2 = (1, 5) \end{array} \right\ $
$\uparrow$ V	$\uparrow$ W	$f: V \rightarrow W$	$\uparrow$ base di V	$\uparrow$ base di W

Determinare la matrice di f usando in partenza la base $\{v_1, v_2\}$ e in arrivo la base $\{w_1, w_2\}$

PRIMA Calcolo $f(v_1) = (-4, 9) = a(1, 4) + b(1, 5)$
 $\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 prima colonna della matrice

$f(v_2) = (-7, 13) = c(1, 4) + d(1, 5)$
 $\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 seconda colonna della matrice

$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array}$
 $\uparrow \qquad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

INPUT: componenti di $v \in V$ risp. alla base $\{v_1, v_2\}$

OUTPUT: " di $f(v) \in W$ " $\{w_1, w_2\}$

ORA	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x - 3y, x + 4y)$	$\left\ \begin{array}{l} v_1 = (1, 2) \\ v_2 = (1, 3) \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{l} w_1 = (1, 4) \\ w_2 = (1, 5) \end{array} \right\ $
------------	----------------	----------------	---------------------	--	--

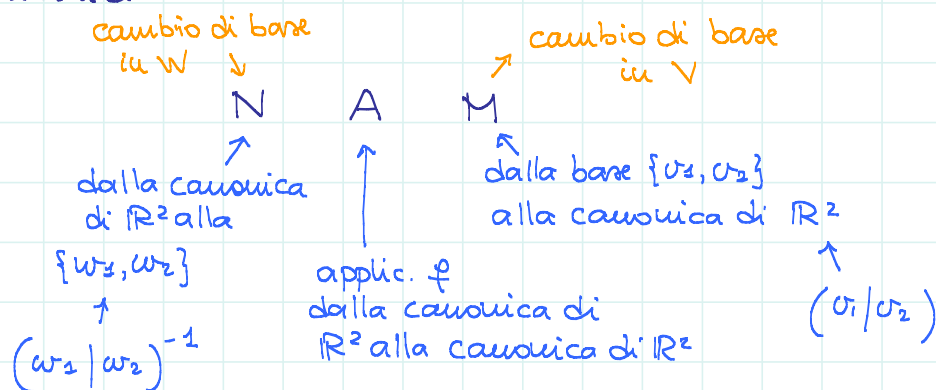
Scrivo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservo che $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 4y \end{pmatrix}$

quindi A rappresenta f tra le basi CANONICHE.

La matrice che mi è richiesta la posso scrivere come prodotto di 3 matrici:



Conclusione: la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix}$$

↑
Rappresenta f dalla base $\{v_1, v_2\}$ alla base $\{w_1, w_2\}$

vediamo se funziona

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
prima colonna della matrice

$$\begin{aligned} & -29 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{😊} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
second r''

$$\begin{aligned} & -48 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 41 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{😊} \end{aligned}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 21

Note Title

25/10/2022

DETERMINANTE RANGODeterminante : 2 modi di vederlo**1° modo** INPUT: matrice $n \times n$ (quadrata)

OUTPUT: numero

Prop. essenziale: la matrice è invertibile $\Leftrightarrow$ numero $\neq 0$
 $\uparrow$
 ammette matrice inversa

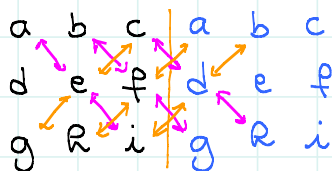
2° modo INPUT: n vettori in uno sp. vett. di dim n

OUTPUT: numero

Prop. essenziale: gli n vettori sono lin. indep. $\Leftrightarrow$ numero $\neq 0$
 " " " " LIN. DIP. $\Leftrightarrow$ numero $= 0$

COME SI CALCOLA**Caso 2×2** Formula

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Caso 3×3 Formula di SARRUS

$$\text{Det} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

6 termini:
 3 con il +
 3 con il -

In breve

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh} - ceg - bdi - afh$$

Oss. In dimensione + alta usi valgono formule analoghe

Caso $n \times n$ Due modi (in realtà di più)

- ① via algoritmo di GAUSS
- ② via sviluppi di LAPLACE
- ③ " " " LEIBNIZ (praticamente è scomodo)

Determinante via GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Lavoriamo alla GAUSS facendo solo operazioni ORTODOSSE

$$R_i \rightsquigarrow R_i + a R_j$$

↑
ci deve essere coeff. = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_4 + 6R_2 \\ R_4 + \frac{21}{3}R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{26} \end{pmatrix}$$

A questo punto

Det = prodotto dei tizi sulla diagonale
cambiato di segno tante volte quanto è
il numero di scambi di righe fatti per
strada.

$$= \underbrace{-78}_{\text{prod. sulla diag}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{c'è stato uno} \\ \text{scambio} \\ \text{di riga}}} = 78$$

DETERMINANTE VIA LAPLACE

Sviluppo ricorsivo

↑
insegua a calcolare il Det $n \times n$ Se uno sa quello $(n-1) \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{1} & \textcircled{0} \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

→ Scegliamo una riga o colonna che ci
piaccia (prima riga)

$$\begin{aligned} \text{Det (Matrice)} &= \textcircled{1} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \textcircled{2} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \textcircled{1} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \text{svolgo i conti e dovrebbe venire } 78 \end{aligned}$$

Come si prendono i segni: alternati seguendo uno schema a scacchiera

del tipo

in alto a
sx c'è il
segno +

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{+} & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

Oss. Conviene LAPLACE quando c'è una riga/colonna che contiene tanti 0!

La cosa sorprendente è che viene fuori sempre lo stesso numero, comunque io lavoro!

Esempio

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il Det: (quarta colonna)

$$2 \cdot 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 (35 + 8 - 8 - 80 + 2 - 14)$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Caso 2×2 $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$ (a meno del segno) l'area del parallelogramma generato dai vettori (a,b) e (c,d)

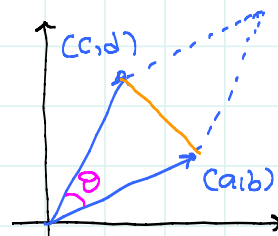
$$\text{Area} = |\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|$$

Questo evidenzia che $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{area} = 0 \Leftrightarrow$$

(a,b) e (c,d) sono l'uno multiplo dell'altro $\Leftrightarrow$

(a,b) e (c,d) sono lin. dip.



Come calcolo l'area del parallelogramma?

$$\text{Area parallelogramma} = 2 \text{ area triangolo}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \|(a,b)\| \cdot \|(c,d)\| \cdot \sin \theta$$

soliti
costi

$$\rightarrow = \|(a,b)\| \cdot \|(c,d)\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle (a,b), (c,d) \rangle^2}{\|(a,b)\|^2 \|(c,d)\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|(a,b)\|^2 \|(c,d)\|^2 - \langle (a,b), (c,d) \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$= \dots \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd}$$

$$= \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|$$

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 22

Note Title

25/10/2022

Interpretazioni geometriche

$$\boxed{2 \times 2} \quad \text{Area triangolo} = \frac{1}{2} |\text{Det}| \quad (\text{vedi les. precedente})$$

$$\boxed{3 \times 3} \quad \text{Volume tetraedro} = \frac{1}{6} |\text{Det}|$$

$\uparrow$
 che ha vertici in
 $(0,0,0)$
 (a,b,c)
 (d,e,f)
 (g,h,i)

Per dimostrarlo bisognerebbe
 fare il conto partendo da
 $\text{Vol}(\text{tetraedro}) =$
 $= \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot \text{altezza}$

Oss. $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow \text{Volume} = 0 \Leftrightarrow$ i 3 vettori sono lin. dip.

Alcune proprietà del Determinante

① $\text{Det}(\text{Id}) = 1$

② TEOREMA DI BINET: $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 matrici $\square$ della stessa dim.

③ Se esiste A^{-1} , allora $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$

(Segue dal punto precedente perché $A \cdot A^{-1} = \text{Id}$ e quindi
 $1 = \text{Det}(\text{Id}) = \text{Det}(A A^{-1}) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(A^{-1})$
 e da qui ricavo)

④ $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$

(Dando per buono Laplace è ovvio: lo sviluppo di $\text{Det}(A)$
 rispetto alla prima riga = sviluppo di $\text{Det}(A^t)$ risp. alla 1ª colonna.)

⑤ Det di una matrice triangolare superiore o inferiore = prodotto
 degli elementi sulla diagonale
 (quasi ovvio dando per buono Laplace)

Triangolo superiore = tutti o sotto la diagonale principale

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Triangolo inferiore = analogo

⑥ Se lavoro alla GAUSS, come cambia il Det "on the road"

→ se scambio righe, cambia di segno

→ se faccio oper. ortodossa ($R_i \rightsquigarrow R_i + a R_j$) non cambia

→ se faccio oper. non ortodossa ($R_i \rightsquigarrow b R_i + a R_j$) viene moltiplicato per b (quindi se posso fare, ma devo tenerne conto)

GRANDI TENTAZIONI FALSE

① $\text{Det}(A+B)$ in generale NON è $\text{Det}(A) + \text{Det}(B)$

② $\text{Det}(3A)$ NON è in generale $3 \text{Det}(A)$.

Vale però che

$$\text{Det}(3A) = 3^n \text{Det}(A)$$

↑
n è la dim. della matrice

Esercizio Quanto fa $\text{Det}(-I_d)$?

$$\text{Det}(-I_d) = \text{Det}((-1) \cdot I_d) = (-1)^n \text{Det}(I_d) = (-1)^n$$

1

Esercizio I vettori $(0,1,2)$, $(1,1,1)$, e $(3,1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?

1° modo superbovino

Verifico che sono lin. indep. e che sono generatori

2° modo più raffinato Verifico SOLO che sono lin. indep.
(fatto gen.: se sono in numero giusto e sono lin. indep., allora sono base)

3° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 0 + 2 + 3 - 6 - 2 - 0 = -3 \neq 0$$

$\leadsto \text{OK} \quad \ddot{\smile}$

Li metto a riga o colonna nella matrice? CHI SE NE FREGA!
(il Det NON cambia)

— 0 — 0 —

RANGO Prende in INPUT una matrice $m \times n$ (qualunque)

In OUTPUT: un intero ≥ 0

Cos'è questo intero?

Ci sono 3 definizioni equivalenti

- ① Il max numero di righe lin. indep. (dim. span. righe)
- ② Il max numero di colonne lin. indep. (dim. span. colonne)
- ③ La massima dimensione di una sottomatrice quadrata con Det $\neq 0$

SOTTOMATRICE È una qualunque matrice che si ottiene a partire da quella data cancellando un po' di righe e colonne a scelta

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una sottomatrice } 2 \times 2$$

In questo caso le possibili sottomatrici 2×2 sono 18. Devo scegliere

→ la riga da cancellare ($\leadsto 3$ modi)

→ le 2 colonne da cancellare ($\leadsto 6$ modi)

Quindi cosa vuol dire che il rango di una matrice è r ?

Vuol dire due cose

- Che tutte le sottomatrici $(r+1) \times (r+1)$ hanno $\text{Det} = 0$
- Che esiste una sottomatrice $r \times r$ con $\text{Det} \neq 0$.
 $\uparrow$ almeno

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango = 2

Si vede in tanti modi

1° modo

Quando le righe

$$\text{Span}(R_1, R_2, R_3) = \text{Span}(R_1, R_2)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
lin. indep.

2° modo

Quando le colonne

$$\text{Span}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Span}(C_1, C_2)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
lin. indep.

3° modo

Devo trovare una sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$

Ma devo dim. anche che tutte le 3×3 hanno $\text{Det} = 0$.

Quante sono le 3×3 ? Sono 4, perché le ottengo eliminando una qualunque delle 4 colonne, quindi dovrei fare 4 determinanti 3×3 ...

Altra propr. del Determinante

- ⑦ Se una matrice ha 2 righe o 2 colonne uguali, allora $\text{Det} = 0$
- ⑧ Se alcune righe (o alcune colonne) sono LIN. DIP., allora per forza $\text{Det} = 0$.

(Tutti questi fatti seguono se si dà per buono GAUSS: alla fine trovo una riga tutta nulla, e quando moltiplico gli el. della diag. viene 0)

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 23

Note Title

25/10/2022

FORMULA MISTERIOSA

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\underset{M_1}{\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}}, -\underset{M_2}{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}}, \underset{M_3}{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} \right)$$

Quale proprietà ha (M_1, M_2, M_3) ?

Ha prodotto scalare nullo con (a_1, a_2, a_3) e con (b_1, b_2, b_3) .

Perché è vero?

Consideriamo $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ (ci sono 2 righe =)

Se faccio LAPLACE prima riga ottengo

$$\det = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 = \langle (a_1, a_2, a_3), (M_1, M_2, M_3) \rangle$$

$\uparrow$
 il segno -
 è già in M_2

Allo stesso modo, partendo a $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ ottengo

$$0 = \det = b_1 M_1 + b_2 M_2 + b_3 M_3 = \langle (b_1, b_2, b_3), (M_1, M_2, M_3) \rangle$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $R_1=R_3$ LAPLACE

Esiste una formula misteriosa in $\mathbb{R}^4$? Se voglio un vettore $\perp$ a 3 vettori dati in $\mathbb{R}^4$, basta partire da una matrice 4×4 con * nella prima riga e i 3 vettori dati nelle altre, e immaginare di fare Laplace. (L'alternativa è risolvere il sistema lineare)

Esercizio 1

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^3 - x^2$ $v_2 = x^2 - x$ $v_3 = x - x^3$			
--------------------------	---	--	--	--

Solite domande: Dim. indip.? Dim. Span.?

Una volta: $a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \dots$ risolvo e vedo se $a=b=c=0$

Oggi:

$$\begin{pmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{matrix}
 \leftarrow v_1 \\
 \leftarrow v_2 \\
 \leftarrow v_3
 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1$

Si vede a occhio che

$$v_1 + v_2 = -v_3$$

quindi $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

quindi sono lin. dip., e
quindi uno qualunque si può
eliminare e i 2 che restano sono
lin. indip. (non sono multipli)

Oggi il rango della matrice è 2 e si può vedere con i Det.

Devo fare 2 verifiche

→ Esiste sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$.

→ TUTTE le 4 sottomatrici 3×3 hanno $\text{Det} = 0$. Infatti

- se non elimino l'ultima colonna, resta una colonna di 0, quindi $\text{Det} = 0$ per Laplace
- se elimino l'ultima, calcolo con SARRUS il Det. delle prime 3, e ottengo $1 + (-1) + (0) - 0 - 0 - 0 = 0$.

Conclusione: $\dim(\text{span}) = 2$ e posso eliminare
chi voglio.

Esercizio 2

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x + 3$ $v_2 = x^3 - 2x^2 + 1$ $v_3 = 2x^3 + x^2 + x + 1$ $v_4 = x^3 - x$
--------------------------	---

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A occhio non vedo nulla
 Lavoriamo alla GAUSS e vediamo che succede

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il Determinante è cambiato di segno

Faccio SARRUS sul 3×3

$$-1 - 4 - 15 - 6 + 10 - 1 \neq 0$$

Conclusione: i 4 vettori sono lin. indep. $\Rightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

— o — o —

Esercizio 3

$$\left| \mathbb{R}^4 \right| \left| \begin{array}{c} (0,0,1,1) \\ (0,1,1,0) \\ (1,1,0,0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (1,1,1,1) \\ (2,0,-2,0) \end{array} \right|$$

Dimensione e base di $V, W, W+V, W \cap V$

$\dim(W) = 2$ (sono 2 e sono lin. indep.)

$\dim(V) = 3$ Spero che la matrice abbia rango 3. Come dim.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che rango = 3 ?

Basta trovare una sottomatrice 3×3 con $\det \neq 0$

$\uparrow \det = -1 \rightsquigarrow$ Rango 3

So che la somma $V+W$ è lo span dei 5 vettori

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Può essere rango = 5? NO, perché al max ho 4 colonne lin. indep.

Fatto generale: se M è matrice $m \times n$, allora $\text{rango}(M) \leq \min\{m, n\}$

Può avere rango = 4? SI Basta trovare una sottomatrice 4×4 con $\det \neq 0$

Cancellando la 4^a riga, ciò che resta ha

$$\det = -1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2 + 2] = 0 \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$
 $R_2 - R_1 = \frac{1}{2} R_3$

Eliminando l'ultima riga resta, facendo Laplace 1^a riga ...

... conti ... $\det = 0$

Perché $R_4 = R_1 + R_3$ Ma avevamo già visto che

$$R_5 = 2R_3 - 2R_2$$

Conclusione

$$\text{Span}(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = \text{Span}(R_1, R_2, R_3)$$

$\uparrow$
perché R_4 ed R_5 si possono eliminare perché si scrivono come comb. lin. di R_1, R_2, R_3

Quindi $V+W = V$ e quindi ha $\dim = 3$.

Ma allora $W \subseteq V$ per cui $W \cap V = W$ e ha dimensione 2

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 24

Note Title

28/10/2022

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - y + 7z = -5 \end{cases}$$

1ª interpretazione

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Sto cercando una comb. lineare delle colonne che sia uguale al vettore dei termini noti.

Quindi

→ il sistema ammette **almeno** una soluzione se

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 colonna termini colonne della matrice dei
 noti coeff.

→ il sistema ammette **al più** una soluzione se le colonne della matrice dei coeff. sono lin. indep.

2ª interpretazione

Considero l'app. lin. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + 7z)$$

Mi chiedo i valori (x, y, z) t.c. $f(x, y, z) = (6, -5)$

In quest'ottica

→ il sistema ammette **almeno** una soluzione se e solo se

$$(6, -5) \in \text{Im}(f)$$

→ se i termini noti sono nulli, cioè $(0, 0)$, allora risolvere il sistema vuol dire trovare $\ker(f)$

3ª interpretazione Possiamo sempre scrivere il sistema come

$$A x = b$$

matrice dei coeff. $\nearrow$ $\uparrow$ colonna delle incognite $\nwarrow$ colonna dei termini noti

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ A $\uparrow$ x $\uparrow$ b

Notazione A si chiama matrice dei coeff. o MATRICE INCOMPLETA
 $(A|b) = A'$ si chiama MATRICE COMPLETA.

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI Consideriamo un sistema di m equazioni in n incognite

$$A x = b$$

matrice $m \times n$ $\nearrow$ $\uparrow$ colonna lunga n $\nwarrow$ colonna lunga m

Allora valgono i seguenti fatti

- Il sistema ammette almeno una sol. $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A')$
- Se il sistema ammette soluzioni, queste dipendono da un numero di parametri uguale a $n - \text{rang}(\text{comune})$
- In particolare, la soluzione è unica se e solo se $n = \text{rang}(\text{comune})$

Oss. Quanto può valere il $\text{rang}(A')$? Solo 2 possibilità

- $\text{rang}(A') = \text{rang}(A)$
 - $\text{rang}(A') = \text{rang}(A) + 1$
- } se aggiungo una colonna, il rango può solo restare = oppure salire di 1

Struttura delle soluzioni di un sistema lineare

La soluzione di un sistema del tipo $Ax = b$ è sempre del tipo

base delle soluzioni del sistema $Ax = 0$, cioè

una base del ker se lo pensiamo come applicazione

$$x = x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

$\uparrow$ soluzione particolare del sistema $Ax = b$ $\uparrow$ parametri liberi

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - y + 7z = -5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & -5 \end{array} \right)$$

In questo caso $\text{rank}(A) = \text{rank}(A') = 2$ (ci sono 2 righe e non sono lin. dip., oppure c'è una sottomatrice 2×2 con $\det \neq 0$)

RC $\Rightarrow$ la soluzione generale dipende da $n - \text{rank} = 3 - 2 = 1$ parametri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} z &= t, \quad 5y = 16 + 15t \rightsquigarrow y = \frac{16}{5} + 3t \\ 2x &= 6 + z - 3y = 6 + t - \frac{48}{5} - 9t = -\frac{18}{5} - 8t \end{aligned}$$

Soluzione generale: $(x, y, z) = \left(-\frac{9}{5} - 4t, \frac{16}{5} + 3t, t \right)$

$$= \underbrace{\left(-\frac{9}{5}, \frac{16}{5}, 0 \right)}_{x_0} + t \underbrace{(-4, 3, 1)}_{v_1}$$

$\uparrow \uparrow$ soddisfa il sistema dato NON OMOG.
 $\uparrow \uparrow$ soddisfa il SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $Ax = 0$

Oss. Buono a sapersi quando bisogna fare la verifica!

Perché funziona Rouché - Capelli ?

→ Se $\text{rang} A = \text{rang} (A|b)$, vuol dire che b è Span delle colonne di A , e viceversa

→ Quando i ranghi sono uguali, il numero dei parametri è $\text{Dim}(\ker(A))$, ma

$$\text{Dim}(\ker(A)) + \underbrace{\text{Dim}(\text{Im}(A))}_{\text{rang}(A)} = \underbrace{\text{Dim sp. formata}}_n$$

da cui

$$\text{Dim}(\ker(A)) = n - \text{rang}(A).$$

Oss. RC non trova le soluzioni, ma dice se ci sono e quante.

Esempi Consideriamo
$$\begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ 2y - z = b \end{cases}$$

Determinare il numero di soluzioni al variare di a e b .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & b \end{array} \right)$$

1ª oss. $\text{Rang}(A') \geq \text{Rang}(A) \geq 2$
(basta trovare 2×2 con $\text{Det} \neq 0$)

2ª oss. $\text{Rang}(A) = 3 \Leftrightarrow \text{Det}(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 2a + 1 - 12 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = -9 \Leftrightarrow a \neq -\frac{9}{2}$$

Quindi: se $a \neq -\frac{9}{2}$, allora di sicuro il sistema ha SOL.UNICA, indip. da b ($\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ e il numero dei parametri è $3 - 3 = 0$)

Resta solo il caso $a = -\frac{9}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \frac{9}{2} & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & b \end{array} \right)$$

Se $\text{rang}(A') = 3 \leadsto$ NO SOLUZIONI

Se $\text{rang}(A') = 2 \leadsto$ esistono soluzioni dipendenti da
 $3 - 2 = 1$ parametro.

Quando è che $\text{rang}(A') = 2$?

Basta imporre che il Det senza la prima colonna sia $= 0$

$\leadsto$ trovo una condizione su b (già sappiamo che la 4ª colonna
è combinazione lin. di 2ª e 3ª colonna, se $\text{Det} = 0$ allora
anche la 4ª colonna è comb. lin. di 2ª e 3ª).

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 25

Note Title

28/10/2022

RIEPILOGO STRATEGICO SUI SISTEMI LINEARI

- GAUSS (evergreen)
- Rouché-Capelli (ottimo per sapere se ci sono soluzioni e da quanti parametri dipendono, molto utile quando ci sono parametri)
- CRAMER (permette di trovare la sol. quando è unica, però non è comodissimo)
- matrice inversa (se la sol. di $Ax=b$ è unica, allora è $x=A^{-1}b$)

CRAMER Consideriamo $m \times n$ del tipo $Ax=b$. Allora

$$x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$$

↑
i-esima comp.
della soluzione

dove A_i è la matrice A in cui abbiamo sostituito la i -esima colonna con b .

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 8y = 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}} = \dots$$

$$y = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}} = \dots$$

Utile come strumento teorico, ma se poi devo fare GAUSS per calcolare $\text{Det}(A)$, allora tanto vale usare GAUSS ☺

MATRICE INVERSA VIA DETERMINANTI

Metodo alternativo a GAUSS

Algoritmo in 4 passi

- ① Determinanti $A_{i,j}$
- ② Trasposta
- ③ Segui a scacchiera
- ④ Divido per $\text{Det}(A)$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A \quad \text{Det}(A) = 2 + 2 + 3 = 7$$

- ① Per ogni elemento, elimino la sua riga e colonna e calcolo il determinante di ciò che rimane

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- ② Faccio la trasposta

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ③ Cambio i segni a scacchiera

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ④ Divido tutto per 7:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss. In dim. 3 è accettabile, dalla 4 in poi sono molto più costosi rispetto a GAUSS.

(La dimostrazione del perché funziona sono gli sviluppi di Laplace).

Esempio 1
$$\begin{cases} ax + 2y = 7 \\ x + 3y = b \end{cases}$$

Studiare al variare dei parametri a e b

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2 & 7 \\ 1 & 3 & b \end{array} \right) \quad \text{Rango}(A) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \\ 2 & \Leftrightarrow \text{Det}(A) \neq 0 \Leftrightarrow 3a - 2 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow a \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

(Vediamo anche a occhio che per $a = \frac{2}{3}$ viene $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ per cui la 2ª colonna è 3 volte la 1ª)

- Se $a \neq \frac{2}{3}$, allora $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(A')$, quindi esiste almeno una soluzione, che è unica perché $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cicognile}}}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rango} \\ \text{comune}}}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{\# parametri}}}{0}$

- Se $a = \frac{2}{3}$, allora si aprono 2 scenari

→ se $\text{rango}(A') = 2$, allora NO SOLUZIONI (l'ultima colonna è lin. indep. dalle prime)

→ se $\text{rango}(A') = 1$, allora INFINITE SOLUZIONI dipendenti da $2 - 1 = 1$ parametro

Chi decide il rango (A')?

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 1 & 3 & b \end{array} \right) \quad \text{Det} = 2b - 21$$

Quindi

- Se $a = \frac{2}{3}$ e $b \neq \frac{21}{2}$, allora NO SOLUZIONI.
- Se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{21}{2}$, posso anche vedere a mano che succede

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 1 & 3 & \frac{21}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Nota bene : } 2^{\text{a}} \text{ riga} = \frac{3}{2} \cdot 1^{\text{a}} \text{ riga}$$

Per risolvere lavoro alla GAUSS:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y = 7 \\ x + 3y = \frac{21}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 21 \\ 2x + 6y = 21 \end{cases} \quad y = t, \quad 2x = 21 - 6y = 21 - 6t$$

$$(x, y) = \left(\frac{21}{2} - 3t, t \right) = \underbrace{\left(\frac{21}{2}, 0 \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{risolve} \\ \text{non omog.}}} + t \underbrace{(-3, 1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{risolve} \\ \text{omog. associato}}}$$

Esempio 2
$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 0 \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

Studiamo al variare di a e b il numero di soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vedo subito che $\text{Rango}(A') = 2$ (c'è un 2×2 con $\text{Det} \neq 0$)

Quindi si aprono 2 scenari

→ Se $\text{Rango}(A) = 1$, allora NO SOLUZIONI

→ Se $\text{Rango}(A) = 2$, allora $3 - 2 = 1$ ← parametri
 $\uparrow \quad \uparrow$
 incognite rango

(infinita soluzioni dip. da 1 parametro)

Cosa deve succedere per avere $\text{Rango}(A) = 1$?

Barinamente, i 3 sottodeterminanti 2×2 devono essere $= 0$

$$\begin{cases} ab - 2 = 0 & \leadsto \text{?} \\ 2 - 3b = 0 & \leadsto b = \frac{2}{3} \\ a - 3 = 0 & \leadsto a = 3 \end{cases} \quad \leadsto \text{se } a = 3 \text{ e } b = \frac{2}{3}, \text{ allora} \\ \text{NIENTE SOLUZIONI}$$

In realtà bastava imporre 2 qualunque. Perché?

Se viene 0 quello con 1^a e 2^a colonna, allora le prime 2 colonne sono una multipla dell'altra

Se viene 0 quello con 2^a e 3^a colonna, allora le ultime 2 colonne sono una multipla dell'altra

Ma allora (se non sono nulle) sono tutte una multipla dell'altra

Esercizio Prendiamo una matrice A di dim. 6×6 .

Supponiamo che la 5×5 in alto a sx abbia rango 3.

Quanto può valere il rango di A ?

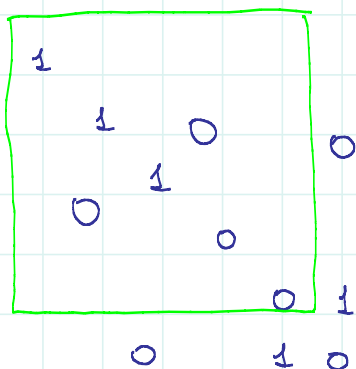


$\text{Rango}(A) \geq 3$

Può arrivare fino a 5 !!

può avere rango 4

Aggiungendo ancora una volta posso arrivare a 5



ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 26

Note Title

04/11/2022

Esercizi1. Spazio vettoriale: $M_{2 \times 2}$ con elemento generico A . Relazioni da esaminare:

$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{2} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, NO S.SP. (va male tutto)
 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{3} \text{ NO S.SP.}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\textcircled{4}$
 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\textcircled{5} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (2bis) NO S.SP.
 $A^2 = A$, $A^t = 2A$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = A$.

 $\textcircled{1}$ $A =$ matrici 2×2 tali che $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

È un s.sp.? Se sì, trovare dimensione e una base

→ S.sp. Sì

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

Stessa cosa per il prodotto.

→ Dim. e base. Brevino puro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Impongo le cond.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0 \text{ e } b=0$$

Quindi il s.sp. contiene tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow$ base $\uparrow$

Oss. L'esercizio equivale a considerare i vettori

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a=b=0\}$$

Oss. Di basi ne esistono tante, ad esempio pure

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(Stanno nello spazio, sono in numero giusto, sono lin. indep.)

Oss. Possiamo pensare $A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ come un'applic. l.i.n. che manda matrici in matrici.

Il s.sp. richiesto è il ker.

Quindi $\ker$ avrà $\dim = 2$. Chi è una base dell'immagine?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ Se $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, è vero che $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

NO! $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}!$

In termini di applicazioni, se lo pensiamo con la stessa base in partenza ed arrivo, abbiamo che

$$f(v_1) = 0 \quad f(v_2) = v_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

Ma allora

$f(f(v_1)) = 0$ e $f(f(v_2)) = f(v_1) = 0$, quindi facendo due volte f ottengo sempre 0.

Analogamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La loro somma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'insieme delle matrici 2×2 t.c. $A^2 = 0$ non è un s.sp. perché fallisce la somma, cioè

$$\exists A_1 \text{ t.c. } A_1^2 = 0 \quad \exists A_2 \text{ t.c. } A_2^2 = 0 \quad \text{ma } (A_1 + A_2)^2 \neq 0.$$

Oss. Il prodotto va bene; se $A^2 = 0$ allora $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2 = 0$.

$$\textcircled{4} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S. spazio? Direi di sì (solita verifica)

Dim e base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2b & 3a+b \\ 4c+2d & 3c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 4a+2b & -3a-2b+2c = 0 \\ \cancel{b}+2d = 3a+\cancel{b} & 3a-2d=0 \leftarrow \text{sono uguali} \\ 3a+4c = 4c+2d & 3a-2d=0 \leftarrow \\ 3b+4d = 3c+d & b-c+d=0 \end{cases}$$

Volendo si può risolvere alla GAUSS, o più semplicemente

$$d=3t \rightsquigarrow a=2t \rightsquigarrow b-c = -3t \quad (1^{\text{a}} \text{ equ.})$$

$$-2b+2c = 6t \quad (1^{\text{a}} \text{ equ.}) \leftarrow \text{uguale alla prec.}$$

Quindi $c=s$ e otteniamo $b = s-3t$.

Conclusione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & s-3t \\ s & 3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ base $\rightsquigarrow$ dim = 2

Sarebbe opportuno verificare che i due elementi della base
rispettino le condizioni che definivano il S.sp.

— o — o —

$$\textcircled{5} \quad A^t = 2A \quad \text{S.sp.?} \quad \text{Certo! Solite verifiche}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2a & \rightsquigarrow a = 0 \\ c = 2b \\ b = 2c \\ d = 2d & \rightsquigarrow d = 0 \end{cases} \quad c = 4c \rightsquigarrow c = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

Quindi è il s.sp. costituito dalla sola matrice nulla! (Dim = 0)
— 0 —

2. Spazio vettoriale: $M_{2 \times 3}$ con elemento generico A . Relazioni da esaminare:

$$\textcircled{1} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A, \quad \text{NO S.SP.}$$

$$(1,2)A = (0,2,0),$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il prod. è ok
si sp. ed
è quello con solo
matrice nulla
NO S.SP., ed è
pure lì insieme vuoto!

Come sono fatte TUTTE le matrici 2×3 t.c. $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Bonino

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf \\ ad+be+cf & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Guardando la sola diagonale principale, vediamo che deve essere

$$a=b=c=0 \quad d=e=f=0$$

Quindi resta solo la matrice nulla!!!

$$\textcircled{2} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{è un s.sp.}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+2b+3c = 0 \\ d+2e+3f = 0 \end{cases}$$

Quindi il s.sp. ha dim 4 con parametri liberi b, c, e, f
dai quali determiniamo a, d

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE -

LEZIONE 27

Note Title

04/11/2022

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZISetting : X sp. vett., V e W s.sp. vettoriali.Se accade che $V \cap W = \{0\}$ (solo vettore nullo), allora si scrive

$$V + W = V \oplus W$$

↑
somma diretta

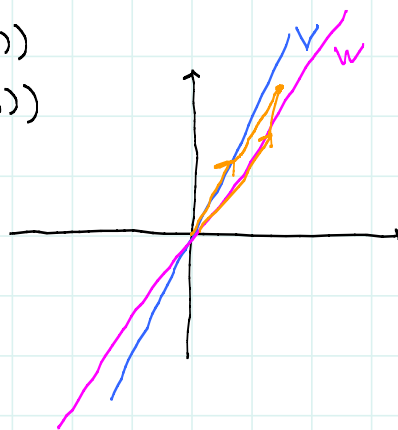
Vantaggio: se la somma è diretta, ogni vettore di $V+W$ si scrive in modo UNICO come $v+w$, con $v \in V$ e $w \in W$

↑ ↑
componenti proiezioni

Esempio 1 In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $V = \text{Span}((1,2))$
 $W = \text{Span}((2,3))$

Allora

$$\mathbb{R}^2 = V \oplus W$$



È evidente che $V \cap W = \{0\}$, quindi
 $\dim(V+W) = 2 \leadsto$ è tutto $\mathbb{R}^2$

Conseguenza: ogni vettore $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come

$$(x,y) = a(1,2) + b(2,3)$$

(geometricamente: ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è la somma con il parallelogrammo di un vettore in V e uno in W)

Esempio 2 In $\dim 3$ prendiamo $V =$ piano per l'origine

$W =$ retta per l'origine non contenuta nel piano

Ancora una volta $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

(la somma $V+W$ ha $\dim = 3$ e $V \cap W = \{0\}$)

$\mathbb{R}^3$	$(1, 2, 3)$	$(4, 5, 6)$	NO		
$\mathbb{R}^3$	$x + y + z = 0$	$z = x + y$	NO		
$\mathbb{R}^3$	$x = y = z$	$x + y + z = 0$	SI		
$\mathbb{R}^3$	$x - y + z = 0$	$(1, 1, 0)$	NO $W \subseteq V$		
$\mathbb{R}^3$	$x - y + z = 0$	$(1, 0, 1)$	SI		
$\mathbb{R}^3$	$(1, 2, 3)$ $(0, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$			

V

W

 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

①

②

③

④

⑤

⑥

① V e W sono la stessa retta. Quindi

$$V \cap W = V + W = V = W$$

② V e W sono due piani. Può succedere che $V \cap W = \{0\}$?

$$\begin{array}{ccc} \dim(V+W) + \dim(V \cap W) & = & \dim(V) + \dim(W) \\ \leq 3 & \downarrow & \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\ & & \geq 1 \end{array}$$

In questo caso i piani sono distinti e l'intersezione è per forza una retta. Quale retta?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = t \\ x = -t \end{cases}$$

$$\text{Span}((-1, 1, 0))$$

③ $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

$$W \text{ è un piano} = \text{Span}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$$

$$V \text{ è una retta} = \text{Span}((1, 1, 1))$$

Per sapere se $V \cap W = \{0\}$ basta vedere se $\dim(V+W) = 3$

$$\text{Ma } V+W = \text{Span}((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$$

Sono lin. indip.?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0 \quad \text{SI!}$$

$$\text{Quindi } \mathbb{R}^3 = V \oplus W$$

$$\textcircled{6} \quad V = \text{Span}((1,2,3), (0,1,1)) \quad \leadsto \text{piano}$$

$$W = \text{Span}((1,1,1)) \quad \leadsto \text{retta}$$

Domanda: $V \cap W = \{0\}$? Se sì, allora $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 + 2 - 3 - 1 = -1 \neq 0 \quad \text{OK.}$$

Conseguenza: ogni vettore $u \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come

$$u = \underset{\substack{\uparrow \\ \in V \text{ (piano)}}}{v} + \underset{\substack{\uparrow \\ \in W \text{ (retta)}}}{w}$$

Le applicazioni che ad u assegnano v e w sono applicazioni lineari. Proviamo a scrivere le loro matrici rispetto alla base canonica.

Per farlo basta scrivere nella forma desiderata i 3 vettori della base canonica

$$(1,0,0) = \underbrace{a(1,2,3) + b(0,1,1)}_{\substack{\in V \\ \uparrow \uparrow \\ \text{prima colonna della} \\ \text{matrice di proiezione} \\ \text{su } V}} + \underbrace{c(1,1,1)}_{\substack{\in W \\ \uparrow \uparrow \\ \text{1}^{\text{a}} \text{ colonna della matrice di} \\ \text{proiezione su } W}}$$

$$(0,1,0) = \dots$$

$$(0,0,1) = \text{stessa cosa}$$

Esempio più corto In $\mathbb{R}^2$

$$V = \text{Span}((1,1))$$

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=0\} = \text{Span}((2,-1)) = \text{Span}((-2,1))$$

È vero che $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$?

Sì, sono 2 rette distinte per l'origine, quindi $V \cap W = \{0\}$ e le dimensioni sono corrette.

Scriviamo rispetto alla base canonica, le due matrici che rappresentano le componenti rispetto a V e W

$$(1,0) = a(1,1) + b(2,-1) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}_{\in W}$$

$$a+2b=1$$

$$a-b=0 \quad \leadsto \quad a=b=\frac{1}{3}$$

$$(0,1) = a(1,1) + b(2,-1) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\in W}$$

$$a+2b=0$$

$$a-b=1 \quad \leadsto \quad a=b+1 \quad \leadsto \quad 3b+1=0 \quad \leadsto \quad b=-\frac{1}{3} \quad a=\frac{2}{3}$$

Conclusione

$$pr_V = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad pr_W = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Qual è l'utilità di queste 2 matrici?

Prendiamo un vettore qualunque, tipo $(-2,5) = u$

Applichiamo le due matrici al vettore

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \in V$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \in W \quad (x+2y=0)$$

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) = (-2, 5) \quad \checkmark$$

Domanda: chi sono $\ker$ e Im delle due matrici?

In entrambi i casi $\ker$ e Im hanno $\dim = 1$.

Inoltre pr_V ha come immagine V e come $\ker$ proprio W

pr_W ha come immagine W e come $\ker$ proprio V .

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 28

Note Title

08/11/2022

①	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1)$ $(1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ $(1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$		$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3 + x \rightarrow (0, 0, 1)$ $x^2 + 2 \rightarrow (0, 1, 2)$ $(x+1)^4 \rightarrow (1, 2, 3)$	②
	$\checkmark$	$\checkmark$			$\checkmark$	$\checkmark$		

Domande: esistenza e unicità $f: V \rightarrow W$ con le proprietà date

Eventualmente: matrice tra basi canoniche

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \neq 0 \quad \text{In partenza sono una base} \\ \Rightarrow \text{esistenza e unicità}$

Per la matrice.

1° modo $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$

$$f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) - f(1, 0, 0)$$

$$= (0, 1, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = f(1, 1, 1) - f(1, 1, 0)$$

$$= (0, 0, 1) - (0, 1, 1) = (0, -1, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica: dare in pasto ad A i 3 vettori a sx e vedere che vengono quelli a dx

2° modo Superbovino

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e impongo le 3 condizioni date

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 3 \text{ equazioni}$$

Imponendo le altre 2 condizioni trovo un sistema di 3 equazioni, che mi basta risolvere.

3° modo Uso un cambio di base

$$f(1,1,1) = (0,0,1)$$

$$f(1,1,0) = (0,1,1)$$

$$f(1,0,0) = (1,1,1)$$

Siano v_1, v_2, v_3 i 3 vettori in partenza.

Considero la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \right\} \text{base canonica}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array}$

Quindi B rappresenta f dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Quindi mi serve M che cambi base in partenza dalla $\{e_1, e_2, e_3\}$ alla $\{v_1, v_2, v_3\}$ e poi avrò $A = BM$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$

Questa matrice va dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ come cambio base.

La M che cerco è l'inversa di questa, che posso calcolare anche con i determinanti.

Esercizio utile: controllare che venga lo stesso con i 3 metodi.

$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1)$ $(1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ $(1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$		$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3 + x \rightarrow (0, 0, 1)$ $x^2 + 2 \rightarrow (0, 1, 2)$ $(x+1)^4 \rightarrow (1, 2, 3)$	
----------------	----------------	---	--	--------------------------	----------------	---	--

V W

$$\dim(\mathbb{R}_{\leq 4}[x]) = 5$$

I 3 vettori in parentesi non possono essere una base.

Sono lin. indep.? Sì

1° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^3+x \\ x^2+2 \\ (x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \end{matrix}$$

$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

Voglio che rango = 3 $\Rightarrow$ basta trovare sottomatrice 3×3 con $\det \neq 0$

2° modo Se $a(x+1)^4 + b(x^3+x) + c(x^2+2) = \text{polinomio nullo}$

allora $a=0$ (altrimenti resta x^4)

$\leadsto b=0$ (" " x^3)

$\leadsto c=0$.

— 0 — 0 —

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3+1 \rightarrow x^2+1$ $x^3+2 \rightarrow x^2+2$ $x^2 \rightarrow x^2+3$ $x \rightarrow x^2+4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				
--------------------------	--	--	--	--	--	--

ker T_{11} $\uparrow$
ker $\cap T_{11}$

$\nwarrow$ matrice usando
base data

Verifichiamo che f esista e sia unica. Devo controllare che i 4 vettori dati siano una base

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{array}$$

$$\det = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \neq 0 \quad \text{Ok}$$

Chiamati v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori in partenza, l'immagine è generata da $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$. Quindi

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = \max \# \text{ colonne lin. indep.} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dim Im} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dim Ker} = 2$$

$$\underset{2}{\text{Dim Ker}} + \underset{2}{\text{Dim Im}} = \underset{4}{\text{Dim sp. partenza}}$$

Troviamo base ker e base Im.

$\text{Im}(f) = \{x^2+1, x^2+2\}$ sono contenuti nell'immagine, sono in numero giusto, sono lin. indep.
(potete scegliere 2 a caso dei 4)

Scrivo x^2+3 e x^2+4 come comb. lin. degli altri 2

$$x^2+3 = a(x^2+1) + b(x^2+2) = (a+b)x^2 + (a+2b)$$

$$a+b=1$$

$$a+2b=3 \rightsquigarrow b=2 \rightsquigarrow a=-1$$

$$\text{Quindi } \underbrace{f(v_3)}_{x^2+3} = -\underbrace{f(v_1)}_{x^2+1} + 2\underbrace{f(v_2)}_{x^2+2} \rightsquigarrow \underbrace{f(v_3 + v_1 - 2v_2)}_{\in \text{Ker}} = 0$$

$$x^2+4 = a(x^2+1) + b(x^2+2) = (a+b)x^2 + (a+2b)$$

$$a+b=1$$

$$a+2b=4 \rightsquigarrow b=3 \rightsquigarrow a=-2$$

Quindi

$$f(v_4) = -2f(v_1) + 3f(v_2) \rightsquigarrow \underbrace{f(v_4 + 2v_1 - 3v_2)}_{\in \text{Ker}} = 0$$

Non resta che calcolarli esplicitamente:

$$v_3 + v_1 - 2v_2 = x^2 + (x^3 + 1) - 2(x^3 + 2)$$

$$= x^2 + x^3 + 1 - 2x^3 - 4 = \boxed{-x^3 + x^2 - 3}$$

$$v_4 + 2v_1 - 3v_2 = x + 2x^3 + 2 - 3x^3 - 6 = \boxed{-x^3 + x - 4}$$

Stanno nel
ker, sono
in numero
giusto e
sono lin.
indip.
 $\Rightarrow$ base

Se uno volesse $\dim(\ker \cap \text{Im})$?

Farei $\dim(\ker + \text{Im})$

$\uparrow$ generato dai 2 vettori che generano $\ker$
+ 2 vettori che generano Im .

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 29

Note Title

08/11/2022

1. Consideriamo l'applicazione lineare $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ definita da

$$f(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A.$$

- (a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $M_{2 \times 2}$.
- (b) Determinare la dimensione ed una base del $\ker$ e dell'immagine di f .
- (c) Determinare la dimensione dell'intersezione tra il $\ker$ e l'immagine di f .
- (d) Determinare la dimensione ed una base del $\ker$ e dell'immagine di $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$.

(a) Base canonica

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° modo Calcolo $f(e_1), f(e_2), \dots$

2° modo Calcolo direttamente

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3b-2c & 2a+3b-2d \\ -3a-3c+3d & -3b+2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix}$

(b) $\text{Dim}(\text{Im}(f)) = \text{ranko della matrice}$

Il ranko è ≤ 3 (ultima colonna = - prima colonna)

Il ranko è lo stesso della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Prima ho diviso la 2ª colonna per 3, poi ho diviso la 3ª riga per 3...

$$\text{Det} = -2 + 2 = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ colonna} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \text{ colonna} = 3^{\text{a}} \text{ colonna.}$$

Quindi abbiamo 2 relazioni

$$\begin{aligned} \text{Span}(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \text{Span}(C_1, C_2, C_1 - 2C_2, -C_1) \\ &= \text{Span}(C_1, C_2) \end{aligned}$$

$$\text{Dim}(\text{Im}) = 2 \rightsquigarrow \text{Dim}(\text{ker}) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Base Im e Base ker. Base(Im)} &= \text{prime due colonne} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Base del ker: o vediamo a occhio due el. lin. indep., oppure risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 3b-2c & 2a+3b-2d \\ -3a-3c+3d & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3b-2c=0 & b=2t \rightsquigarrow c=3t \\ 2a+3b-2d=0 & d=5 \\ -a-c+d=0 & \rightsquigarrow a=d-c=5-3t \\ -3b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } (a, b, c, d) &= (5-3t, 2t, 3t, 5) \\ &= 5(1, 0, 0, 1) + t(-3, 2, 3, 0) \\ &= 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

base del ker

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha che $(1, 1, 1, 1) \in \ker(f)$.
 (b) Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x - 2w = 0\}$.
 Determinare per quali valori dei parametri si ha che $f(v) \in V$ per ogni $v \in V$.
 (c) Sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4w = 0\}$.
 Determinare per quali valori dei parametri si ha che $\text{Im}(f) \subseteq W$.

$$(a) \quad (1, 1, 1, 1) \in \ker(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+3 \\ b+3 \\ c+3 \\ d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=b=c=d=-3$$

(b) Ci aspettiamo che V sia un s.sp. di dim. 2.

Troviamo una base equazione copiata male ☹

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2w = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} z = 2s \leadsto 2y = -x - 3z = -2t - 6s \\ w = t \leadsto x = 2t \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ y = -t - 3s \end{matrix}$$

$$(x, y, z, w) = (2t, -t - 3s, 2s, t)$$

$$= t(2, -1, 0, 1) + s(0, -3, 2, 0)$$

$\uparrow$ una base di $V = \{v_1, v_2\}$

(verifico che risolvano il sistema)

Ora $f(v) \in V$ per ogni $v \in V \Leftrightarrow f(v_1) \in V$ e $f(v_2) \in V$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -b+3 \\ 2 \\ d+1 \end{pmatrix} \in V$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3b+2 \\ -3+2c \\ -1 \end{pmatrix} \in V$$

Le equazioni di V sono $x+y+z=0$ e $x-2w=0$

Le impongo nei 2 casi

$$2a-b+3+2=0$$

$$2a-2d-2=0$$

Non accade MAI

$$-1-3b+2-3+2c=0$$

$$-1+2=0 \quad \text{☹️}$$

$$(c) \quad W = \{x+2y+3z+4w=0\}$$

Per quali valori dei parametri $\text{Im}(f) \subseteq W$.

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4))$$

dove $v_1, \dots, v_4$ sono una base qualunque.

Scelgo la canonica, così ottengo

$$\text{Span}(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 colonne della matrice

Basta imporre che le colonne stiano in W

$$a+9=0$$

$$2b+8=0$$

$\leadsto$ trovo a, b, c, d

$$3c+7=0$$

$$4d+6=0$$

— 0 — 0 —

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=z+w=0\}$.

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f: W \rightarrow W$ che verifica le seguenti condizioni:

- $f(1, -1, 1, -1) = (1, -1, -1, 1)$,
- $f(f(w)) = 0$ per ogni $w \in W$.

$W = \text{s.sp. di dimensione 2}$. Base di $W = \{ \underset{w_1}{(1, -1, 1, -1)}, \underset{w_2}{(1, -1, -1, 1)} \}$

$$f(w_1) = w_2$$

$\uparrow$
lo dice il
testo

$$f(w_2) = f(f(w_1)) = 0$$

$\uparrow$
lo dice il
testo

— 0 — 0 —

teo. struttura: f
esiste ed è unica.

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 30

Note Title

08/11/2022

Conclusione esercizio precedente

(b) Determinare $f(-1, 1, 0, 0)$.(c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ tali che $f(w) = (1, -1, -1, 1)$.

Dove eravamo arrivati

$$W = \text{Span} \left(\underbrace{(1, -1, 1, -1)}_{w_1}, \underbrace{(1, -1, -1, 1)}_{w_2} \right)$$

e l'applicazione $f: W \rightarrow W$ era tale che

$$f(w_1) = w_2$$

$$f(w_2) = 0$$

$$(b) \ f(\underbrace{-1, 1, 0, 0}_{\in W})$$

$$x+y+z+w=0$$

$$\text{quindi } (-1, 1, 0, 0) = aw_1 + bw_2 = -\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

$$f(-1, 1, 0, 0) = -\frac{1}{2}f(w_1) - \frac{1}{2}f(w_2) = \frac{w_2}{2} = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$$

(c) Trovare i $w \in W$ t.c. $f(w) = w_2$

$$w \in W \text{ lo scrivo come } w = aw_1 + bw_2$$

$$f(w) = af(w_1) + bf(w_2)$$

$$= aw_2 = w_2 \quad (\Rightarrow) \quad a=1 \text{ e } b \text{ è qualunque}$$

$$\text{Quindi } f(w) = w_2 \quad (\Rightarrow) \quad w = w_1 + bw_2$$

 $\uparrow$ libero

= retta che non passa per l'origine

— o — o —

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V , sia $\{w_1, w_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W , e sia $f: V \rightarrow W$ l'applicazione lineare rappresentata, in quelle basi, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f rispetto alle basi indicate (se quelle indicate non sono basi, accorgersene e segnalare che la richiesta non ha senso).

Base V e Base W	Matrice	Base V e Base W	Matrice
$\{v_2, v_1, v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_2, v_3, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$	
$\{v_1, v_3, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$	

$f: V \rightarrow W$ V ha base $\{v_1, v_2, v_3\}$
 W ha base $\{w_1, w_2\}$

In queste basi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

$f(v_2) = 2w_1 + 5w_2$

Se cambio basi in V e W , come cambia la matrice?

$$\begin{matrix} V \rightarrow \{v_3, v_2, v_1\} \\ W \rightarrow \{w_1, w_2\} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_3) & f(v_2) & f(v_1) \end{matrix}$

$$\begin{matrix} V = \{v_2, v_3, v_1\} \\ W = \{w_2, w_1\} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_1 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_2) & f(v_3) & f(v_1) \end{matrix}$

$$\begin{matrix} V = \{v_1, v_2, v_3 + v_1\} \\ W = \{w_2, w_1\} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_1 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3 + v_1) \end{matrix}$

Ho usato che $f(v_3 + v_1) = f(v_3) + f(v_1)$

$$= 6w_2 + 3w_1 + 4w_2 + w_1$$

$$= 10w_2 + 4w_1$$

$$V = \{v_1, v_3, v_2\}$$

$$W = \{w_1, w_1 + w_2\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_1 + w_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_3) & f(v_2) \end{matrix}$$

$$f(v_1) = w_1 + 4w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 4 \quad a = -3$$

$$f(v_2) = 2w_1 + 5w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 5 \quad a = -3$$

$$f(v_3) = 3w_1 + 6w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 6 \quad a = -3$$

$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$	
$\{w_1, w_2\}$		$\{w_1 - w_2, w_2 - w_1\}$	

NON è una base di V
 $1^\circ + 2^\circ = -3^\circ$

Non è una base di W !!!
 (non sono l.i.n. indep.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1 - 1 = 0$$

— 0 — 0 —

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e sia $f: V \rightarrow V$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = 2v_2, \quad f(v_3) = 2v_3 + v_2.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f utilizzando in partenza ed arrivo le basi indicate.

{Base partenza}	Matrice	{Base partenza}	Matrice
{Base arrivo}		{Base arrivo}	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_3, v_2\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_3, v_2\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_2, v_3, v_1\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_2, v_3, v_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$	

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_3) & f(v_2) & f(v_1) \end{matrix}$$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = \text{Span}\{(1, 2, 3)\}$.

- (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = V$ e $\text{Im}(f) = W$.
 (b) Descrivere l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente. Si tratta di uno spazio vettoriale?

(a) Scrivo V come Span

$$V = \text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(1, -1, 0)}, \underset{\vec{v}_2}{(1, 0, -1)} \right)$$

(Andava bene anche $\text{Span}((1, 5, -6), (2, -1, -1))$)

Per forza deve essere $f(\vec{v}_1) = 0$

$$f(\vec{v}_2) = 0$$

Completo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ aggiungendo un $\vec{v}_3$ opportuno in modo che venga una base. Ad esempio $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = +1 \neq 0 \leadsto$ sono una base

$f(\vec{v}_3)$ cosa può essere? Deve per forza essere un multiplo di $(1, 2, 3)$

$$f(\vec{v}_1) = 0$$

$$f(\vec{v}_2) = 0$$

$$f(\vec{v}_3) = a(1, 2, 3) \quad \text{con } a \neq 0 \quad (\text{altrimenti sarebbe tutto } \ker)$$

A questo punto, fissato a , f è univoc. det. (ho detto dove va una base).

oss. Potavo anche scegliere $\vec{v}_3 = (1, 2, 3)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 + 3 + 2 = 6 \neq 0.$$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 31

Note Title

11/11/2022

Basi ortogonali / ortonormali

Siamo in $\mathbb{R}^n$. Una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$
- ortonormale se in aggiunta alla precedente vale che
 $\|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle = 1$ per ogni i

Esempio classico: la base canonica è ortonormale

Proprietà chiave: se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ la sua componente rispetto a v_i è $\langle v, v_i \rangle$ (quindi basta fare il prod. scal. invece di risolvere il sistema) e quindi

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_m \rangle v_m$$

↑
componenti di v rispetto alla base

Dim.

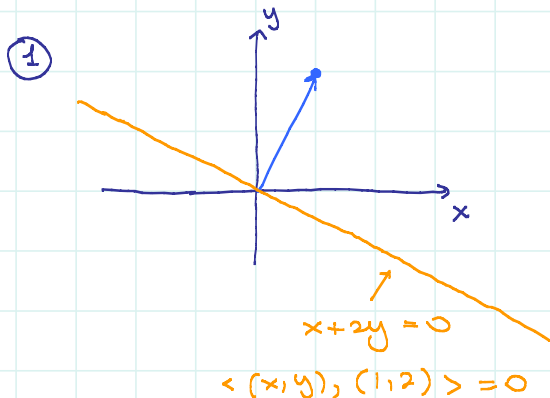
$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m, \text{ allora} \\ \langle v, v_i \rangle &= \langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m, v_i \rangle \\ &= a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + a_m \langle v_m, v_i \rangle \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{sono tutti nulli, tranne l'i-esimo che viene 1} \\ &= a_i \leftarrow \text{coeff.} \end{aligned}$$

Oss. Se la base è solo ortogonale, allora nel conto precedente resta

$$\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle \rightsquigarrow$$

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che contiene il vettore $(1, 2)$.
2. Determinare per quali valori del parametro a si ha che $\{(1, 2), (3, a)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che $\{(1, 2, 3), (4, 5, a), (6, b, c)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.



$$v_1 = (1, 2)$$

Basta prendere v_2 nella retta $\perp$ a v_1 ,
ad esempio

$$v_2 = (-2, 1)$$

$$v_2 = (2, -1)$$

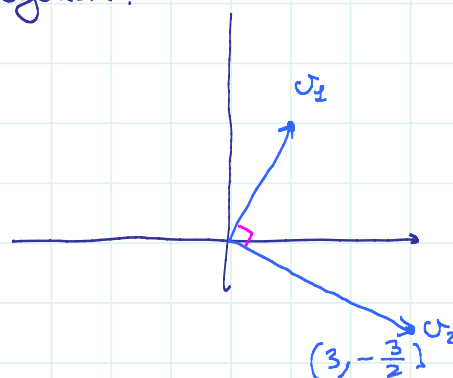
$$v_2 = (-32, 16)$$

} basta che accada
che
 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

- ② $v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (3, a)$ sia base ortogonale.

Devo imporre $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$3 + 2a = 0 \quad \leadsto \quad a = -\frac{3}{2}$$



- ③ $v_1 = (1, 2, 3)$

$$v_2 = (4, 5, a)$$

$$v_3 = (6, b, c)$$

Devo imporre $\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \leadsto 4 + 10 + 3a = 0$

$$\leadsto a = -\frac{14}{3}$$

Ora impongo $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$

$$6 + 2b + 3c = 0$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

$$24 + 5b - \frac{14}{3}c = 0$$

$\leadsto$ trovo b e c in modo unico. Infatti la matrice dei coeff.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e quindi per Rouché - Capelli
abbiamo sol. unica.

4. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $\text{Span}(v_1) = \text{Span}((3, 4))$.

↑↑ ↑↑↑

Chi può essere v_1 ?

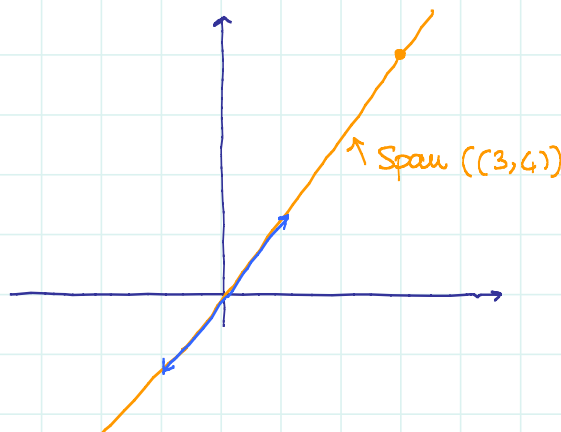
→ v_1 deve stare sulla retta

→ $\|v_1\|^2 = 1$ (base ortonormale)

$$v_1 = (3a, 4a)$$

$$9a^2 + 16a^2 = 1 \rightsquigarrow a^2 = \frac{1}{25}$$

$$\rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{5}$$



Ci sono quindi due possibilità

$$v_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

v_2 deve essere di norma 1 e contenuto nella retta $\perp$ a $\text{Span}((3,4))$.

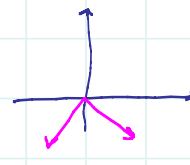
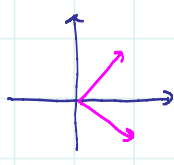
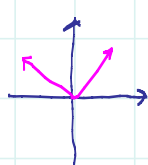
A occhio si vede che le due possibilità sono

$$v_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

oppure

$$v_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Quante sono le possibili basi? Sono 4: posso accoppiare uno qualunque dei v_1 con uno qualunque dei v_2



5. Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2 \in V$.

Chi può essere v_2 ?

$$v_2 = (a, a)$$

$$a^2 + a^2 = 1 \rightsquigarrow a^2 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

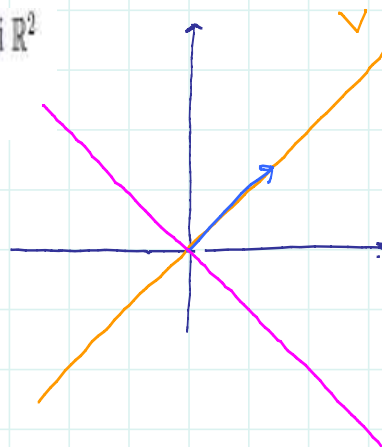
$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Anche qui 4 possibilità



6. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3, a, b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.

v_2 e v_3 stanno nel piano. Quindi v_1 come deve essere?

Deve essere perpendicolare al piano, quindi multiplo di $(1, 2, -1)$

Visto che la prima componente è 3, allora

$$v_1 = (3, 6, -3)$$

Per v_2 e v_3 ho ampia scelta, ad esempio

$$v_2 = (1, 1, 3) \leftarrow \text{basta che stia nel piano}$$

Come trovo v_3 ?

1° modo : risolvo il sistema $v_3 = (x, y, z)$

$$3x + 6y - 3z = 0 \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 0$$

$$x + y - 3z = 0 \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

2° modo : formula ex - uideriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (7, -4, -1) \leftarrow \text{verifico che sia } \perp \text{ a } v_1 \text{ e } v_2 \quad \checkmark$$

8. Siano $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_2$.

Devo trovare $W_1 \cap W_2$. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2t \rightsquigarrow y = t \\ \rightsquigarrow x = z - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (0, t, 2t) = t(0, 1, 2)$$

$$\text{Quindi } W_1 \cap W_2 = \text{Span}((0, 1, 2))$$

Quindi $v_1 = (0, a, 2a)$ e ha norma 1, quindi $5a^2 = 1$, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad v_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Come trovo v_2 ? $v_2 = (x, y, z)$

Impongo il sistema

$$x - 2y + z = 0 \quad \leftarrow \text{appartenenza a } W_2$$

$$y + 2z = 0 \quad \leftarrow \langle v_2, v_1 \rangle = 0$$

Risolvendo ho un parametro libero che trovo imponendo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

→ avrò 2 possibilità per v_2

Trovati v_2 e v_1 , trovo v_3 con la formula mistica
(anche qui avrò due possibilità).

Alla fine le basi possibili sono 8 (2 poss. per v_1
" " " v_2
" " " v_3).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 32

Note Title

11/11/2022

GRAM-SCHMIDT (Aka algoritmo della banana)

Data una base qualsunque $\{v_1, \dots, v_m\}$ di $\mathbb{R}^n$, produrre una base ortogonale o ortonormale $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ di $\mathbb{R}^n$ con la proprietà che

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &\in \text{Span}(v_1) && \leftarrow \hat{v}_1 \text{ è multiplo di } v_1 \\ \hat{v}_2 &\in \text{Span}(v_1, v_2) && \leftarrow \hat{v}_2 \text{ è piano generato da } v_1 \text{ e } v_2 \\ \hat{v}_3 &\in \text{Span}(v_1, v_2, v_3) && \vdots \text{ e così via} \\ &&& \text{e così via}\end{aligned}$$

Oss. Il punto fondamentale è produrre una base ortogonale. Poi renderla ortonormale è facile. (basta moltiplicare tutti i vettori per un numero opportuno).

Descrizione dell'algoritmo

$$\hat{v}_1 = v_1 \quad \checkmark$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle}}_{\text{numero}} \hat{v}_1 \quad \begin{array}{l} \text{o scrivendo} \\ \text{il conto} \\ \uparrow \end{array}$$

(si verifica anche a mente che $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$)

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

(si verifica che $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = 0$)

e così via.

— 0 — 0 —

11. Determinare tutte le basi ortonormali $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

- $\text{Span}(\hat{v}_1) = \text{Span}((1, 1, 0, 0))$,
- $\text{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$,
- $\text{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$,
- tutti i 4 vettori che ne fanno parte hanno la prima componente positiva.

$$\hat{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_2 &= (1, 0, 1, 0) - \frac{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 \\ &= (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \end{aligned}$$

verifica a mente
 $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \hat{v}_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2 \\ &= (0, 0, 1, 1) - \frac{0}{2} \hat{v}_1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

a mente verifico
 $\langle \hat{v}_1, \hat{v}_3 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle = 0$

Oss. Visto che per il momento ci interessa solo avere una base ORTOGONALE, posso anche liberarmi delle frazioni e porre

$$\hat{v}_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \hat{v}_2 = (1, -1, 2, 0) \quad \hat{v}_3 = (-1, 1, 1, 3)$$

Ne serve un quarto che completi la base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
Come lo faccio?

1° modo Bovino. Risolvo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y + z + 3w = 0 \end{cases}$$

2° modo Scelgo v_4 in modo che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$
 (per essere sicuro faccio il Det 4×4).
 Faccio il 4° step di GS e calcolo $\hat{v}_4$.

3° modo Uso l'equivalente in $\mathbb{R}^4$ della formula ex-misteriosa!

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \leadsto \quad \hat{v}_4 = (\dots)$$

Esercizio: fare il conto nei 3 modi.

Se alla fine la base la voglio ORTONORMALE, basta dividere per la cosa opportuna

$$\begin{array}{lll} (1, 1, 0, 0) & \leadsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) = w_1 \\ (1, -1, 2, 0) & \leadsto & \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = w_2 \\ (-1, 1, 1, 3) & \leadsto & \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = w_3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ho diviso per la} \\ \text{norma del} \\ \text{vettore} \end{array}$$

Supponiamo di aver calcolato anche w_4 allo stesso modo.

Determinare la componente di $(1, 2, 3, 4)$ rispetto a w_2 .
 Come si fa?

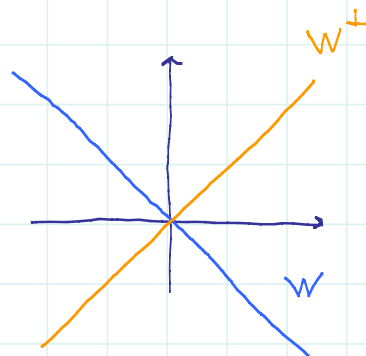
$$\text{Basta fare } \langle (1, 2, 3, 4), w_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

— o — o —

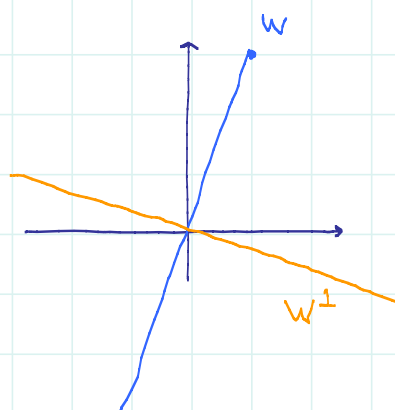
1. Sottospazi di $\mathbb{R}^2$.

- (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$,
- (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$,
- (c) $W = \text{Span}((1, 3))$,
- (d) $W = \text{Span}((0, 4))$.

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad W &= \text{Span}((1, -1)) \\
 W^\perp &= \text{Span}((1, 1)) \\
 &= \text{Span}((-27, -27)) \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (1b) \quad W &= \text{Span}((0, 1)) \\
 W^\perp &= \text{Span}((1, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (1c) \quad W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 3x = 0\} \\
 W^\perp &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y + x = 0\} \\
 &= \text{Span}((3, -1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1d) \quad W &= \text{asse } y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \\
 W^\perp &= \text{asse } x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \text{Span}((-1237, 0)) \\
 &\quad \text{--- } 0 \text{ ---}
 \end{aligned}$$

2. Sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$,
- (b) $W = \{(t, t + s, 2s - 3t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$,
- (c) $W = \text{Span}((1, -1, 1))$,
- (d) $W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3))$,
- (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}$.

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad W &= \text{Span}((2, 0, 1), (0, 1, 0)) \leftarrow \text{base ortogonale} \\
 W^\perp &= \text{Span}((1, 0, -2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2b) \quad W &= \text{Span}(\underbrace{(1, 1, -3)}_{\vec{w}_1}, \underbrace{(0, 1, 2)}_{\vec{w}_2}) \quad \in (1, 1, -3) + S(0, 1, 2)
 \end{aligned}$$

Non è una base ortogonale. Se la volessi ortogonale?

$$\hat{w}_1 = w_1$$

$$\hat{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1$$

$$= (0, 1, 2) + \frac{+5}{11} (1, 1, -3) = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{7}{11} \right)$$

oppure $\hat{w}_2 = (5, 16, 7)$

Quindi $W = \text{Span}((1, 1, -3), (5, 16, 7))$

↑ ↑
Sono una base
ORTOGONALE

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 33

Note Title

12/11/2022

2. Sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$,
 (b) $W = \{(t, t + s, 2s - 3t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$,
 (c) $W = \text{Span}((1, -1, 1))$,
 (d) $W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3))$,
 (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}$.

(2c) $W = \text{Span}((1, -1, 1)) = \text{retta}$

$W^\perp = \text{piano} \perp \text{alla retta}$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

$$= \text{Span}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

Se voglio base ortogonale del piano uso GS a partire da

$$w_1 = (1, 1, 0) \quad w_2 = (0, 1, 1)$$

$$\hat{w}_1 = w_1 = (1, 1, 0)$$

$$\hat{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_2, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \rightsquigarrow (-1, 1, 2)$$

Verifico che $\langle \hat{w}_1, \hat{w}_2 \rangle = 0$ e che $\hat{w}_2$ è piano $W^\perp$

Nota bene: $(1, -1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 2)$

sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$

Trovare parametrizzazione cartesiana per $W = \text{Span}((1, -1, 1))$.

Devo trovare 2 piani qualunque che intersecati diano la retta.

$$ax + by + cz = 0$$

Impongo che $(1, -1, 1)$ la soddisfi:

$$a - b + c = 0 \rightsquigarrow \text{posso fissare } b \text{ e } c \text{ come un paio}$$

$$b = 1, c = 0 \rightsquigarrow a = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$$

$$b = 2, c = 27 \rightsquigarrow a = -25 \rightsquigarrow \begin{cases} -25x + 2y + 27z = 0 \end{cases}$$

Due piani che
intersecati
danno W

$$(2d) \quad W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3)) = \text{piano}$$

Cartesiana per W

$\times \quad \times \quad \times$

1 -1 1

1 2 3

$$\leadsto (-5, -2, 3)$$

$$\leadsto -5x - 2y + 3z = 0$$

$\uparrow$
i 2 vettori che spannano
 W la verificano

$$W^\perp = \text{retta} = \text{Span}((-5, -2, 3))$$

Cartesiana di $W^\perp$... posso fare come prima, ma in realtà

posso usare

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

} sono 2 equ. lin. indep. (cioè due piani distinti) e il vettore $(-5, -2, 3)$ appartiene ad entrambi

Se voglio base ortogonale di W uso $\hat{w}_1 = (1, -1, 1)$ e poi con GS

$$\hat{w}_2 = (1, 2, 3) - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1 = (1, 2, 3) - \frac{2}{3} (1, -1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) \leadsto (1, 8, 7)$$

$\uparrow$
prop. a $\hat{w}_1$ e
verifica l'eq. del
piano

Calcolare le matrici di proiezione su

$$W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 8, 7))$$

$$W^\perp = \text{Span}((-5, -2, 3))$$

Cosa vuol dire? Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico

$$\text{come } v = \underset{\substack{\uparrow \\ \in W}}{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \in W^\perp}}{v_2}$$

Le due matrici di proiezione producono v_1 e v_2 a partire da v

Come trovo le matrici? Prendo la base canonica, calcolo v_1 e v_2 , e li uso come colonne

$$(1,0,0) = \underbrace{a(1,-1,1)}_{v_1} + \underbrace{c(-5,-2,3)}_{v_2}$$

Per calcolare a, b, c posso risolvere il sistema, o usare i prodotti scalari, visto che è una base ortogonale

$$\begin{aligned} \langle (1,0,0), (-5,-2,3) \rangle &= c \langle (-5,-2,3), (-5,-2,3) \rangle \\ -5 &= c \cdot 38 \quad c = -\frac{5}{38} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= -\frac{5}{38}(-5,-2,3) + v_1 \\ &= \underbrace{\left(\frac{25}{38}, \frac{10}{38}, -\frac{15}{38}\right)}_{\in W^\perp} + \underbrace{\left(\frac{13}{38}, -\frac{10}{38}, \frac{15}{38}\right)}_{\in W} \end{aligned}$$

↑
prima colonna
matrice proiezione su $W^\perp$

$$(0,1,0) \rightsquigarrow \langle (0,1,0), (-5,-2,3) \rangle = c \cdot 38 \quad c = -\frac{2}{38}$$

Seconda colonna è $\left(+\frac{10}{38}, +\frac{4}{38}, -\frac{6}{38}\right)$

Idea per la 3ª colonna.

— o — o —

$$(e) W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\} = \text{retta}$$

$$\begin{aligned} x - 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$W = \text{Span}((2,-1,1))$$

$$\begin{aligned} W^\perp = \text{piano} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\} \\ &= \text{Span}((1,2,0), (1,0,-2)) \end{aligned}$$

Se di $W^\perp$ voglio una base ortogonale, cosa faccio?

1° modo GS a partire da $(1,2,0)$ e $(1,0,-2)$

2° modo Misteriosa a partire da $(2, -1, 1)$ e $(1, 2, 0)$

(otengo un vettore $\perp$ a $(2, -1, 1)$, quindi nel piano, e $\perp$ a $(1, 2, 0)$, che è quello che volevo)

* * *

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow (-2, 1, 5) \leftarrow \text{Verifica delle proprietà}$$

1 2 0

Se voglio la matrice di proiezione su $W = \text{Span}((2, -1, 1))$ faccio come prima

$$(1, 0, 0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piano}}}{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{retta}}}{v_2} = v_1 + c(2, -1, 1)$$

$$c = \frac{\langle (1, 0, 0), (2, -1, 1) \rangle}{\langle (2, -1, 1), (2, -1, 1) \rangle} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$(0, 1, 0) \rightsquigarrow -\frac{1}{6}(2, -1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \rightsquigarrow \frac{1}{6}(2, -1, 1)$$

Proprietà di A Prendiamo un vettore qualunque $(1, 2, -1)$

Diamolo in pasto alla matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ora scrivo

$$(1, 2, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

$\in W$

$\in W^\perp$

$$-\frac{1}{6}(2, -1, 1)$$

$$2x - y + z = 0$$

$$\underline{\quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 34

Note Title

12/11/2022

MATRICI ORTOGONALI

Prop. Data una matrice quadrata $n \times n$, che chiamiamo A , sono equivalenti i seguenti 3 fatti

- (1) le righe di A sono ortonormali
- (2) le colonne " " "
- (3) $A^{-1} = A^t$ o volendo $AA^t = Id$

Def. Se succede uno qualunque dei 3 fatti, allora succedono tutti, e A si dice matrice ORTOGONALE

Idea della dim $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$

Quando faccio $AA^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \end{pmatrix}$

Moltiplicare le matrici è equivalente a fare prod. scalari tra righe

Per le colonne è uguale considerando $A^t A = Id$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{pmatrix}}_A$$

Moltiplicare $A^t A$ è equivalente a fare i possibili prodotti scalari tra colonne.

— o — o —

Proprietà delle matrici ortogonali

① $A^{-1} = A^t$ se A è ortogonale (definizione)

② $\text{Det}(A) = \pm 1$ se A è ortogonale

$$AA^t = \text{Id} \rightsquigarrow \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(A^t) = \text{Det}(\text{Id}) = 1$$

$$[\text{Det}(A)]^2 = 1 \rightsquigarrow \text{Det}(A) = \pm 1$$

③ Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali (e coincidono)

④ Se A e B sono ortogonali, allora AB è ortogonale? SI

Controlliamo quanto fa $(AB)(AB)^t$. Ora

$$(AB) \cdot (AB)^t = AB \cdot \underbrace{B^t A^t}_{\text{Id}} = AA^t = \text{Id} \quad \ddot{\smile}$$

⑤ Se A e B sono ortogonali, allora $A+B$ è ortogonale? NO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ che NON è ortogonale}$$

Esempi Matrice 2×2 ortogonale

Posso prendere base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ e usarla come righe

$$\underbrace{(1, 2), (-2, 1)}_{\text{Base ortogonale}} \quad \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{\text{Base ortonormale}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \text{matrice ortogonale}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1} = A^t$$

Piccola osservazione

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa ha righe e colonne ~~auto~~ ORTOGONALI, anche se non sono ortonormali

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

In questo caso l'inversa si ottiene facendo $\frac{1}{5}B^t$ Esempio Rendiamo 3 vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$

$$(1, 2, -1)$$

$$(0, 1, 2)$$

* * *

$$1 \quad 2 \quad -1 \rightsquigarrow (5, -2, 1)$$

$$0 \quad 1 \quad 2$$

Andavano messi
a righe, oppure dopo fare
 $A^t A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Per avere l'inversa di A basta dividere

→ la prima colonna di A^t per 26

→ seconda 9

→ terza 9

$$\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$$

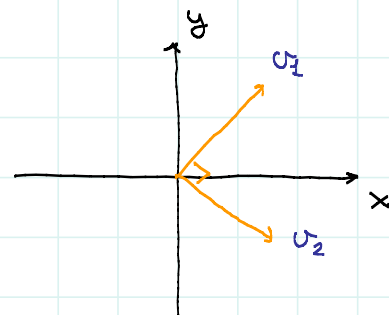
Esercizio 1 Trovare base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui
tutti i vettori (che poi sono 2)
hanno la stessa prima componente

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Esercizio 2 Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$

v_1, v_2, v_3 base ortonormale con la prima componente uguale.

La cerco del tipo $v_1 = (a, b, c)$

$$v_2 = (a, b, -c)$$

$$v_3 = (a, ?, ?)$$

Deve succedere che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 0$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Da queste deduciamo che

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \quad c^2 = \frac{1}{2} \quad \leadsto \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ad esempio}$$

* * *

a b c

a b -c

$$\leadsto \begin{pmatrix} -2bc, \dots, \dots \end{pmatrix} \leadsto a = -2b \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}b$$

Quindi ora sappiamo che $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ e $a^2 = 2b^2$

$$\leadsto 3b^2 = \frac{1}{2} \leadsto b^2 = \frac{1}{6} \leadsto b = \frac{1}{\sqrt{6}} \leadsto a = -\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vediamo se funziona $v_1 = (a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$v_2 = (a, b, -c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = 1$$

$$\langle v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3, v_2 \rangle = 0$$

Ovviamente se voglio la prima comp. pos. posso cambiare i segni

Oss. Se li uso come righe di una matrice, ottengo una 3×3 ortogonale, la cui inversa è la trasposta.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 35

Note Title

12/11/2022

FORME CANONICHE

Data $f: V \rightarrow W$ lineare, se scelgo bene le basi di V e W , quanto può diventare "bella" la matrice.

↑
con tanti zeri

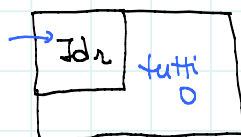
Due scenari che esaminiamo

→ $f: V \rightarrow W$ e scelgo "bene" le basi in partenza ed arrivo

→ $f: V \rightarrow V$ e voglio usare la stessa base in partenza ed arrivo

Scenario 1 Possiamo trovare le basi in modo che la matrice finale sia del tipo

matrice
identica
 $r \times r$



dove r è il rango, cioè la dimensione dell'immagine.

Esempio

V W
↓ ↓

Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (x + y + z, y + z + w, w - x).$$

Determinare quali delle seguenti matrici rappresentano f per un'opportuna scelta delle basi in partenza ed arrivo (nei casi affermativi non sarebbe male anche fornire un esempio di tali basi).

3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$
3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$	1 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = D$

Se il rango $\neq 2$, non c'è storia

$$f(x, y, z, w) = (x+y+z, y+z+w, w-x)$$

Domanda 1: scrivere la matrice di f usando le basi canoniche in partenza ed arrivo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vista ad occhio: moltiplicando per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ deve venire l'espressione data

In alternativa $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -1) \rightsquigarrow 1^a$ colonna

$f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0) \rightsquigarrow 2^a$ colonna

Domanda 2: determinare $\dim(\text{Im}(f))$ e una base

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Span}(\text{colonne}) = \text{Span}((1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)) \\ &\quad C_4 = C_2 - C_1 \\ &= \text{Span}((1, 0, -1), (1, 1, 0)) \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{base dell'immagine} \end{aligned}$$

La teoria ci dice che esiste una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ ed esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in cui la matrice diventa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{matrix}$

Come trovo queste basi?

→ v_3 e v_4 devono stare nel $\ker$ (che ha $\dim = 2$ per rank-nullity)

→ v_1 e v_2 completano v_3 e v_4 ad una base di $\mathbb{R}^4$

→ $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$, w_3 completa w_1 e w_2 .

Calcoliamo $\ker(f)$

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+z+w = 0 \\ -x \quad +w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+z+w = 0 \\ \cancel{y+z+w = 0} \end{cases}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$$w=t, z=s, y=-t-s, x=-y-z = t+s-s = t$$

$$(x, y, z, w) = (t, -t-s, s, t) = t(1, -1, 0, 1) + s(0, -1, 1, 0)$$

$$\ker f = \text{Span}((1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $v_3 \quad v_4$

Provo con $v_1 = (1, 0, 0, 0) \quad v_2 = (0, 1, 0, 0)$

Verifico

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0 \quad \checkmark$$

Ora $w_1 = f(v_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -1)$

$$w_2 = f(v_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0)$$

Come w_3 provo con $(1, 2, 3)$. Verifico

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det = 3 - 2 + 1 = 2 \neq 0 \quad \checkmark$$

Relazione tra la matrice iniziale rispetto alla base canonica e quella finale C.

Si ottengono l'una dall'altra mediante cambi di base, cioè

$$C = N^{-1} A M$$

$\uparrow$ matrice 3×3 che cambia base dalla canonica di $\mathbb{R}^3$ alla $\{w_1, w_2, w_3\}$
 $\uparrow$ matrice 4×4 che cambia base in partenza dalla $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ alla canonica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_4 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Verificare che effettivamente $C = N^{-1} A M$

Possiamo trovare una base in cui la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow \frac{1}{2} w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3) \quad f(v_4)$

$\leadsto$ la metà di quello di prima

e se voglio

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{3} w_1 \\ \leftarrow 35 w_3 \\ \leftarrow \frac{1}{7} w_2 \end{matrix}$$

$f(v_4) \quad f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

Come posso ottenere la D finale?

Sappiamo che $C = N^{-1} A M$

Allo stesso modo

$$C = N_1^{-1} D M_1$$

Ma allora $N_1^{-1} D M_1 = N^{-1} A M$

e da qui posso ricavare D come

$$D = N_1 N^{-1} A M M_1^{-1}$$

$$= \left(\boxed{N N_1^{-1}} \right)^{-1} A \left(\boxed{M M_1^{-1}} \right)$$

↑
le colonne di
questa sono
una base di $\mathbb{R}^3$

le colonne di questo sono
una base di $\mathbb{R}^6$

in cui succede quello che deve succedere!

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

—

LEZIONE 36

Note Title

15/11/2022

Forme canoniche

Obiettivo: data $f: V \rightarrow V$ lineare, trovare base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in cui la matrice associata ad f risulta "bella" (stessa base in partenza ed arrivo).

Introduzione motivazionale

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Calcolare } A^{2022}$$

O si fanno tutte le potenze intermedie e ci si inventa qualcosa...

Supponiamo che esista M matrice 2×2 invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora $(M^{-1} A M)(M^{-1} A M) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} A M$$

$$M^{-1} A^2 M$$

Posso continuare facendolo 3 volte

$$M^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} \cancel{A} \cancel{M} \cancel{M}^{-1} A M = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} A^3 M$$

Più in generale

$$M^{-1} A^{2022} M = \begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 3^{2022} \end{pmatrix}$$

Da qui posso ricavare $A^{2022} = M \begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 3^{2022} \end{pmatrix} M^{-1}$

Se so trovare M ho finito.

Cosa vuol dire fare $M^{-1} A M$? Vuol dire la stessa applicazione in una base diversa (M = matrice cambio base).

Cosa deve succedere nella nuova base?

$$f(v_1) = 2v_1$$

$$f(v_3) = 2v_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$A \quad v_1 = 2v_1$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

$v_1 = (x, y) = (1, -1)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$v_2 = (x, y) = (2, -1)$

Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

Def. Sia A matrice $n \times n$.

- Si dice che λ è autovalore di A se esiste $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$ t.c.

$$Av = \lambda v$$

- I corrispondenti v si chiamano autovettori
- Dato un autovalore λ , l'insieme di tutti i $v \in \mathbb{R}^n$ tali che $Av = \lambda v$ (compreso quello nullo) si dice autospazio di λ , ed è un s.sp. vettoriale.

Come trovo autovalori / autovettori / autospazi

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda Id) v = 0$$

$\uparrow v \neq 0$

$$\Leftrightarrow A - \lambda Id \text{ ha un ker} \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda Id) = 0$$

Nell' esempio $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda Id) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$\uparrow$
polinomio di grado n
detto polinomio
CARATTERISTICO

$$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Una volta trovati gli autovalori, per trovare autovettori / autospazi risolvo il sistema lineare $Av = \lambda v$

Piccola scorciatoia: posso in alternativa trovare il ker di $A - \lambda Id$

Nell' esempio

$$\boxed{\lambda=2}$$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}(\underbrace{(1, -1)}_{1^a C - 2^a C}) = \text{autospazio di } 2$$

$$\boxed{\lambda=3} \quad A - 3Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((2, -1)) = \text{autospazio di } -2$$

Proprietà generale valida in dimensione n :

→ prodotto autovalori = determinante

→ somma autovalori = traccia (somma el. sulla diagonale)

} correlati con molteplicità

Nel caso del Det la diu. è semplice. Se

$$M^{-1} A M = D \text{ diagonale}$$

allora

$$\text{Det}(M^{-1} A M) = \text{Det}(D) = \text{prod. autovalori}$$

$$\text{Det}(M^{-1}) \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(M)$$

$$\frac{1}{\text{Det}(M)}$$

— o — o —

Def. Due matrici A e B (quadrata $n \times n$) si dicono **SIMILI** se esiste M invertibile tale che

$$B = M^{-1} A M$$

(intuitivamente: A e B rappresentano la stessa applic., solo in basi diverse)

La matrice A si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale

Proprietà principali. Due matrici simili hanno

→ stesso polinomio caratt.

→ stesso determinante

→ stessa traccia

→ stessi autovalori

→ stessa forma canonica.

— o — o —

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$
Tr=3	Tr=3	Tr=3	Tr=2	Tr=3	Tr=3
Det=2	Det=2	Det=2	Det=-5	Det=2	Det=2

Di queste 6 matrici, 5 sono simili tra di loro.
Trovare l'intrusa.

Tutte le altre sono diagonalizzabili e hanno forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Prendiamo l'ultima

$$\lambda = 1$$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((2, -1))$$

$$\lambda = 2$$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((9, -4))$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se facciamo il conto

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzare una matrice = trovare la forma canonica
diagonale (se questa esiste) ed una
M che realizza il passaggio.

Se prendiamo come B la quinta matrice, troveremo M_1 t.c.

$$M_1^{-1} B M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1} A M$$

similitudine tra A e B

Ma allora

$$B = \underbrace{M_1 M_1^{-1}}_{= O = O} A \underbrace{M M_1^{-1}}_{= O = O} = (M M_1^{-1})^{-1} A (M M_1^{-1})$$

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 37

Note Title

15/11/2022

Domanda: come stabilisco se una certa A è diagonalizzabile?

Def. Dato un autovalore λ si definisce

→ molteplicità ALGEBRICA di λ la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $\rightsquigarrow m_a(\lambda)$

→ molteplicità GEOMETRICA di λ la dimensione dell'autospazio $\rightsquigarrow m_g(\lambda)$

Fatto generale Per ogni λ autovalore vale

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Teorema Una matrice A è diagonalizzabile SU I REALI se e solo se valgono i seguenti due fatti:

- ① tutti gli autovalori di A sono numeri reali (e non sono obbligati ad esserlo)
- ② per ogni autovalore si ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Corollario Se tutti gli autovalori sono reali e distinti, allora per forza è diagonalizzabile
(in questo caso $m_a(\lambda) = 1$ per ogni autovalore)

Esempio $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$ si dice che

→ $\lambda=2$ è radice di mult 1, quindi $m_a(2) = 1$

→ $\lambda=1$ è radice di mult 2, quindi $m_a(1) = 2$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) \rightsquigarrow \lambda = 0 \quad \lambda = \pm i$$

complessi)
(1 solo autov. reale, 2 autov. complessi)

$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Tr=4 Det=-5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5

Chi è la forma canonica delle altre?

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

↑ prod. radici
↑ somma radici cambiata di segno

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i \quad \leadsto \text{le radici sono numeri complessi, quindi non sono diagonalizzabili sui reali}$$

Le radici sono due numeri complessi distinti, quindi sono diagonalizzabili sui complessi con forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Il procedimento è lo stesso che sui reali

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2+i \quad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A - \lambda Id) = (3-i)(-3-i) + 10 = -9 - 3i + 3i - 1 + 10 = 0$$

$$\text{Chi è } \text{Ker}(A - \lambda Id) = \text{Span}((-5, 3-i)) \leadsto \text{autospazio di } \lambda = 2+i$$

$$\begin{aligned} -5c_1 + (3-i)c_2 &= -5 \begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \end{pmatrix} + (3-i) \begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 10-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = 2 - i \quad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}((A - \lambda Id)) = \text{Span}((-5, 3+i))$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 coniugato di quell'altro

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -3+i & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{10i}$$

$$\det M = -15 - 5i + 15 - 5i \\ = -10i$$

Verifica: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

$\underline{\quad 0 \quad 0 \quad}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Chi sono gli autovalori?

Fatto generale: se A è triangolare superiore/inferiore, gli autovalori sono (con molteplicità) gli elementi della diagonale.

Sia A la terza matrice

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & 0 \\ 5 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Le radici sono $\lambda=1$, $\lambda=-2$ e $\lambda=3$

Nota bene: le prime 3 matrici hanno gli stessi autovalori, tutti reali e tutti semplici ($m_0(\lambda)=1$)

Quindi sono tutte diagonalizzabili

con forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Nel caso della 3^a, come trovo la $\mathcal{M}$ di passaggio?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda=1} \quad A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x-3y \\ 5x+4y+2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 13y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$z = 13t \quad y = -4t \quad x = -2t \quad (x, y, z) = t(-2, -4, 13)$$

↑ verifica ok

$$\ker(A - Id) = \text{Span}((-2, -4, 13))$$

↑ prima colonna di $\mathcal{M}$

$$\boxed{\lambda=-2} \quad A + 2Id = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((0, 5, -4))$$

↑ seconda colonna di $\mathcal{M}$

$$\boxed{\lambda=3} \quad A - 3Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((0, 0, 1))$$

↑ terza colonna di $\mathcal{M}$

Anche risolvendo direttamente,
z risulta parametro libero.

questa è l'unica
diagonalizzabile

$$\begin{matrix} u_g=1 & u_g=1 & u_g=1 & u_g=1 & u_g=2 & u_g=1 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Tr} = 4 & \text{Tr} = 4 & \text{Tr} = 4 & \text{Tr} = 4 & \text{Tr} = 4 & \text{Tr} = 4 \\ \text{Det} = 4 & \text{Det} = 4 & \text{Det} = 4 & \text{Det} = +4 & \text{Det} = 4 & \text{Det} = 4 \end{matrix}$$

Il polinomio caratteristico è sempre $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda - 2)^2 = 0$

Quindi $\lambda=2$ è l'unico autovalore con $u_a(2) = 2$.

Per sapere se sono diagonalizzabili, devo calcolare

$$u_g(z) = \dim \ker(A - 2Id)$$

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 38

Note Title

15/11/2022

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2

Calcolare autovalori e molteplicità

Per le matrici 2, 3, 5 si vede che gli autovalori sono 1, 2, 2
 mult. alg. = 2

Vediamo la prima

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \text{Id}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 6(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda) [+(\lambda-4)(\lambda+1) + 6] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4\lambda - 4 + 6) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) \\ &\leadsto \text{autovalori : } 1, 2, 2. \end{aligned}$$

guai a
moltiplicare! ↗

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \text{Id}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 \\ &\leadsto \text{autovalori : } 1, 2, 2 \end{aligned}$$

Quindi diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_g(2) = 2 \Leftrightarrow \dim(\ker(A - 2I)) = 2$
 $\Leftrightarrow \text{rank}(A - 2I) = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ranko 1 ranko 1 ranko 1 ranko 2 ranko 1

Tutte tranne la 4ª sono diagonalizzabili

Diagonalizziamo la prima

$$\boxed{\lambda=2} \quad \ker(A - 2I) = \text{Span}((\underset{\uparrow v_2}{1}, \underset{\uparrow v_3}{0}, -1), (0, \underset{\uparrow v_3}{1}, 0)) \quad (\text{o viceversa})$$

$$\boxed{\lambda=1} \quad \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{Span}((\underset{\uparrow v_1}{2}, 2, -3))$$

$$C_1 + C_2 = \frac{3}{2} C_3$$

$$2C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0$$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La verifica sarebbe che $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow v_2 \quad \varphi(v_2) = 2v_2$
 $\uparrow \varphi(v_2)$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2, $1 \pm \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

Vediamo la terza

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = -\lambda(2-\lambda)^2 - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)[- \lambda(2-\lambda) - 1]$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 - 1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

$$\downarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$$

Se i calcoli sono giusti, la 3° matrice è diagonalizzabile (ha 3 autovalori reali distinti, e la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Per le altre bisogna fare $\text{mg}(1)$. Quindi

$$\text{diag}(1) \Leftrightarrow \text{mg}(1) = 2 \Leftrightarrow \dim(\ker(A - Id)) = 2 \Leftrightarrow \text{Rango}(A - Id) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓
Dice che $\lambda = 1$
non è
autovalore

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

In tutti i casi gli autovalori sono 3, 3, 3 ($\lambda=3$ è autovalore con $m_a(3)=3$)

Chi sono le molteplicità geometriche?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=2$$

$$m_g(3)=1$$

(perché rango=2)

Nessuna è diagonalizzabile

Nella 4^a matrice l'autospazio è $\text{Span}((1,0,0), (0,1,0))$

Nella 2^a matrice l'autospazio è $\text{Span}((1,0,0))$

" 5^a " " " $\text{Span}((0,0,1))$

Consideriamo l'ultima matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

Dico (e un giorno sarà chiaro) che la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Dato per buono questo, trovare la M di} \\ \text{passaggio. Cosa deve succedere?} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A v_1 & A v_2 & A v_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} A v_1 = 3 v_1 \quad \leadsto v_1 = \text{autovettore di } 3 \\ A v_2 = 3 v_2 + v_1 \\ A v_3 = 3 v_3 + v_2 \end{matrix}$$

Quindi posso prendere $v = (0,0,1)$

$\uparrow$ generatore dell'autospazio

Come trovo $v_2 = (x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad v_2 \qquad 3v_2 \qquad v_3$

$$\begin{aligned} 3x &= 3x \\ -x + 3y &= 3y \rightsquigarrow x = 0 \\ y + 3z &= 3z + 1 \rightsquigarrow y = 1 \end{aligned}$$

Quindi posso prendere $v_2 = (0, 1, 0)$

Infine trovo $v_3 = (x, y, z)$ imponendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 3x \\ -x + 3y &= 3y + 1 \rightsquigarrow x = -1 \\ y + 3z &= 3z \rightsquigarrow y = 0 \end{aligned}$$

Quindi posso prendere $v_3 = (-1, 0, 0)$ da cui

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 39

Note Title

18/11/2022

FORMA DI JORDAN

Blocchi di jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Matrice di jordan : unire sulla diagonale dei blocchi di jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

il resto sono zeri

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

[Il λ sulla diagonale può essere 1 o 0]

Idea: se non riesco a diagonalizzare, magari riesco a jordanizzare.

Fatti fondamentali Prendiamo una matrice A reale $n \times n$.

Allora

① A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se→ tutti gli n autovalori sono reali→ $m_A(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ

(se tutti gli autovalori sono reali e distinti, la seconda richiesta è gratis)

② A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se→ $m_A(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ , anche complesso(la prima richiesta è gratis, cioè gli n autovalori in $\mathbb{C}$ ci sono sempre)

- ③ A è diagonalizzabile **DI LUSSO** (cioè da base in cui si scrive come matrice diagonale si può prendere ortonormale e quindi la matrice M di passaggio è ortogonale, quindi $M^{-1} = M^t$)
se e solo se A è **SIMMETRICA** (**TEOREMA SPETTRALE**)
 (in particolare tutte le matrici simmetriche hanno n autovalori reali, se contati con molteplicità, e $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$).
- ④ A è sempre **JORDANIZZABILE** su $\mathbb{C}$. In tal caso
 → i numeri λ che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori (ogni λ compare $m_a(\lambda)$ volte)
 → il numero dei blocchi con un certo λ è uguale a $m_g(\lambda)$
 → per ogni intero $k \geq 2$, il numero di blocchi di dimensione $\geq k$ è dato da
- $$\dim(\ker(A - \lambda \text{Id})^k) - \dim(\ker(A - \lambda \text{Id})^{k-1})$$
- (da questa formula ricaviamo il numero di blocchi di ogni dimensione)
- ⑤ A è jordanizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se tutti gli n autovalori sono reali (quella ottenuta in ④ è una matrice reale)
- ⑥ A è sempre jordanizzabile su $\mathbb{R}$ se consideriamo le matrici di jordan reali, che ora descriviamo (si ottengono da quelle complesse).

Fatto fondamentale. Se A è una matrice reale, allora gli eventuali autovalori davvero complessi compaiono a coppie, cioè
 → se $\lambda = a + ib$ è autovalore, allora anche $\bar{\lambda} = a - ib$ lo è
 → ad ogni blocco con $a + ib$ corrisponde un blocco con $a - ib$

$$\begin{bmatrix} a+ib & & \\ & a-ib & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

JORDAN su $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b & & \\ -b & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

JORDAN REALE

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a+ib & 1 \\ \hline & a+ib \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline -b & a \\ \hline \end{array}$$

E le matrici M di passaggio? O equivalentemente le basi in cui la matrice assume la forma di JORDAN REALE?

→ Basta prendere parti reali e immaginarie delle corrispondenti basi complesse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ già in forma canonica (volendo $M = Id$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S=0 \quad \text{autovalori: } \pm 1 \quad (\text{reali e distinti})$$

Alternativa brutta: $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \leadsto \lambda = \pm 1$

Quindi forma canonica su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Come trovo la M di passaggio? Risolvo $Au_1 = u_1$
 $Au_2 = -u_2$ } $\leadsto$ brutto

Oppure in alternativa

$\boxed{\lambda=1}$ $A - Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((1, 1))$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad A + Id \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((1, -1))$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = 0 \quad \lambda = \pm i \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

P = 1

↑
autovalori in $\mathbb{C}$
distinti

→ Diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ con forma canonica $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

→ No diagonalizzabile in $\mathbb{R}$

→ In $\mathbb{R}$ c'è la jordan reale che si ricava da quella in $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{a=0 \\ b=1}]{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{La matrice iniziale è la jordan reale di se stessa!})$$

Troviamo M di passaggio nel caso complesso. Trovo gli autovettori complessi [Bovino sarebbe $A v_1 = i v_1, A v_2 = -i v_2$]

$$\boxed{\lambda = i} \quad A - i Id \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((1, i))$$

↑ sono uno il coniugato dell'altro

$$\boxed{\lambda = -i} \quad A + i Id \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((1, -i))$$

$$v_1 = (1, i) \quad v_2 = (1, -i) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \dots$$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Se volessi la base per la jordan reale, scrivo v_1 come parte reale più parte immaginaria

$$v_1 = (1, 0) + i(0, 1)$$

↑ ↑
base per la M di
passaggio alla jordan
reale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 40

Note Title

18/11/2022

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S=0$$

$$P=4$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S=4$$

$$P=0$$

$$\lambda = \begin{matrix} 0 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S=4$$

$$P=4$$

$$\lambda = 2, 2$$

$$m_a = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S=4$$

$$P=3$$

$$\lambda = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

Matrice triang. sup.
autoval = 1 e 3 sulla
diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S=0$$

$$P=0$$

$$\lambda = 0, 0$$

$$m_a = 2 \quad m_g = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Forma canonica
su $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canonica
su $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Facciamo con una la 3ª matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ con $m_a = 2$. Calcolo $m_g(2)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rank} = 1 \rightsquigarrow m_g = \dim(\ker) = 1$$

$\Rightarrow$ NO diag. e JORDAN con un unico blocco

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Come trovo la M di passaggio? Deve succedere

$$Av_1 = 2v_1$$

$$Av_2 = 2v_2 + v_1$$

$$v_1 \in \ker(A - 2Id) = \text{Span}((1, 1))$$

$$v_1 = (1, 1)$$

Per v_2 faccio il bovino

$$v_2 = (x, y)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x+y = 2x+1$$

$$-x+y = 1$$

$$-x+3y = 2y+1$$

$$-x+y = 1$$

Posso prendere $v_2 = (0, 1)$. Quindi $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S=0$$

$$P=-9$$

$$S=0$$

$$P=9$$

$$\lambda = \pm 3i$$

$$\lambda = 3, 3$$

$$u_a = 2$$

$$u_g = 1$$

$$S=6$$

$$P=0$$

$$\lambda = 0, 6$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

va in 6
volte se stesso

va in
0 (volte
se stesso)

— 0 —

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S=-2$$

$$P=-15$$

$$\lambda = 3, -5$$

$$S=-2$$

$$P=17$$

$$\lambda = -1 \pm 4i$$

$$S=0$$

$$P=-3$$

$$\lambda = \pm \sqrt{3}$$

$$S=5$$

$$P=-2$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$S=5$$

$$P=10$$

$$\lambda = \frac{5 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Diagon.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$S=-2 \quad P=17 \quad \lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm \sqrt{-16} = -1 \pm 4i$$

$$S=5 \quad P=-2 \quad \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$S=5 \quad P=10 \quad \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0 \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

Facciamo le M di passaggio nel caso

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{autovalori} \quad \lambda = -1 \pm 4i$$

JORDAN complessa $\begin{pmatrix} -1+4i & 0 \\ 0 & -1-4i \end{pmatrix} = J_C$

$\lambda = -1+4i$ $A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{pmatrix}$ $\ker = \text{Span}((1, -2i))$

$\lambda = -1-4i$ $\dots$ $\ker = \text{Span}((1, 2i))$

M di passaggio complessa: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$ Verifica: $M^{-1}AM = J_C$

JORDAN reale $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = J_R$
 $\uparrow$ [segui conetto dopo video]

Vecchio v_1 complesso = $(1, 0) + i(0, -2)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 nuovi v_1 e v_2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verifica: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ va bene anche questa $\lambda = -1 \pm 4i$ $\because$

$$b=4 \quad b=-4$$

$\uparrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Forma canonica della 1ª} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rango = 1 $\Rightarrow$ Dim(ker) = 2 $\Rightarrow$ $m_0(0) = 2 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore almeno doppio

Tr = 3 $\Rightarrow$ gli autovalori sono 0, 0, 3

$m_0 = 2$
 $m_3 = 1$ $\Rightarrow$ diagonalizzabile

In questo caso, essendo la matrice simmetrica, sappiamo che possiamo anche trovare M ortogonale! Il che equivale a trovare U_1, U_2, U_3 ORTONORMALI t.c. $AU_1 = 3U_1$ $AU_2 = 0$ $AU_3 = 0$.
Come possiamo fare?

Intanto cerchiamo ORTOGONALI

$$U_1 = (1, 1, 1)$$

$$U_2 = (1, -1, 0) \leftarrow \text{sta nel ker ed è } \perp \text{ a } U_1$$

$$U_3 = (1, 1, -2) \leftarrow \text{Formula misteriosa}$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Dividiamo per le norme trovo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\downarrow \downarrow$
Verifica = $M^T A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 44

Note Title

22/11/2022

2. Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$

- (a) è diagonalizzabile sui reali, $\Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$
- (b) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, $\Leftrightarrow$ simmetrica $\Leftrightarrow a=2$
- (c) ha il ker non banale, $\Leftrightarrow \text{rang} \leq 1 \Leftrightarrow \det = 0 \Leftrightarrow 3-2a=0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$
- (d) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,
- (e) ammette l'autovalore $\lambda = 2 + i$,
- (f) ammette $(1, 5)$ come autovettore,
- (g) non è diagonalizzabile sui complessi.

(a) Diag. sui reali $\Leftrightarrow$ 2 autovalori reali con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ a & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2a \\ = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3+2a} = 2 \pm \sqrt{1+2a}$$

- Se $1+2a < 0$, cioè $a < -\frac{1}{2}$, allora autov. no reali $\Rightarrow$ no diag. in $\mathbb{R}$
- Se $1+2a > 0$, cioè $a > -\frac{1}{2}$, allora 2 autov. reali DISTINTI $\Rightarrow$ diag. in $\mathbb{R}$
- Se $1+2a = 0$, cioè $a = -\frac{1}{2}$, allora c'è $\lambda = 2$ come autovalore di $m_a(2) = 2$. Tutto dipende da $m_g(2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\ker) = 1$$

$$\Rightarrow m_g(2) = 1$$

 $\Rightarrow$ no diag in $\mathbb{R}$

In questo caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ ammette l'autovalore $\lambda = 1$

1° modo Sappiamo che $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2a$. $\lambda = 1$ deve essere soluzione. Allora $1 - 4 + 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2° modo Se $\lambda=1$ è autovalore, allora l'altro autovalore è $\lambda=3$
(la somma deve fare la traccia). Ma allora

$$\text{Det} = \text{prod. autov.} = 3 \Leftrightarrow 3 - 2a = 3 \leadsto a = 0$$

3° modo (in realtà 1-bis)

$$\lambda=1 \text{ autovalore} \Leftrightarrow \text{Det}(A - Id) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \\ \Leftrightarrow a = 0$$

(e) Ammette autovalore $\lambda = 2+i$

L'altro è $2-i$, quindi $\text{Det} = (2+i)(2-i) = 4 - i^2 = 5$ e
da qui si risolve

(f) Ammette $(1,5)$ come autovettore. Impongo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 = \lambda \\ a + 15 = 5\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} a + 15 = 5 \\ a = -10 \end{array}$$

$\uparrow$
incognita

(g) La matrice è sempre diag. sui complessi, TRANNE se $a = -\frac{1}{2}$,
nel qual caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

3. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

(a) ammette autovalori immaginari puri,

(b) ammette l'autovalore $\lambda = 3 + 5i$,

simul., quindi $b=1$

(c) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale e rappresenta un'applicazione lineare non surgettiva. $\Leftrightarrow \text{Det} = 0 \quad 2a - 1 = 0 \quad a = \frac{1}{2}$

(d) ammette $\lambda = 7$ come autovalore con autovettore corrispondente $(1,1)$,

(e) ammette $\lambda = -1$ come autovalore ma non è diagonalizzabile sui complessi,

(f) è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(a) \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ b & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = (a-\lambda)(2-\lambda) - b \\ = \lambda^2 - 2\lambda - a\lambda + 2a - b \\ = \lambda^2 - (a+2)\lambda + (2a-b) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(2a-b)}}{2}$$

Immaginari puri $\Leftrightarrow a = -2$ e $\Delta < 0$

$$-4(-4-b) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4+b < 0 \Leftrightarrow b < -4$$

$$\boxed{a = -2} \\ \boxed{b < -4}$$

Verifica in un caso specifico $a = -2$ $b = -5$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S=0 \quad P=1 \quad \leadsto \lambda = \pm i$$

$$(b) \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Ammette autovalore } 3+5i$$

L'altro è $3-5i$

$$\text{Tr} = 6 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Det} = (3+5i)(3-5i) = 9+25 = 34$$

$\leadsto$ trovo b (verifica!)

In alternativa posso usare la formula per $\lambda_{1,2}$ scritta sopra

(d) Ammette $\lambda = 7$ come autovalore con autovettore $(1, 1)$

Bovino

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$a+1 = 7 \quad a = 6$$

$$b+2 = 7 \quad b = 5$$

(e) $\lambda = -1$ autovalore, ma No diag. sui complessi

Per forza l'altro autovalore è -1 (altrimenti due autovalori distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile)

$$\text{Quindi autovalori} = -1, -1 \Rightarrow \text{Tr} = -2 \quad \text{Det} = 1$$

$$a = -4 \quad \text{Det} = -8 - b = 1 \quad b = -9$$

Potrebbe ancora essere diagonalizzabile. Dobbiamo verificare

che $u_A(-1) = 2$

$u_B(-1) = 1$

$$(A + Id) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rank } 1$$

$\rightsquigarrow \dim(\ker) = 1$

$\rightsquigarrow u_B(-1) = 1 \quad \ddot{\smile}$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 2) = 0$$

Autovalori: $\lambda = 0, \lambda = \pm\sqrt{2}$. Forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda=0}$ Autovettore a occhio = $(1, 0, -1)$ ← prima colonna della M di passaggio (che volendo posso anche fare ortogonale)

$\boxed{\lambda=\sqrt{2}}$ $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Con un po' di pazienza si trova un autovettore, ad esempio $(1, \sqrt{2}, 1)$ ← seconda colonna

$\boxed{\lambda=-\sqrt{2}}$ $\rightsquigarrow$ stessa cosa $\rightsquigarrow (1, -\sqrt{2}, 1)$

[Verifica]

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 42

Note Title

22/11/2022

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \text{ simile a } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} s=5 \\ p=-2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \\ \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} \end{array}$$

radici distinte $\Rightarrow$ diag.

Basta che matrice originaria abbia stessa traccia e stesso determinante
 $\leadsto a=3 \quad 6-b=-2 \leadsto b=8$

[Verifica]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 1 \Rightarrow \text{Dim}(\ker) = 2$$

$\uparrow$
autospazio di $\lambda=0$

$$\Rightarrow \lambda=0 \text{ autovettore con } u_3(0)=2$$

$$\text{Ma } \text{Tr} = -6 \Rightarrow \text{autovalori } 0, 0, -6$$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autospazio di } 0 = \ker = \text{Span}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$$

$$\text{Autospazio di } -6 = \ker(A + 6\text{Id})$$

$$A + 6\text{Id} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare un generatore risolvo il sistema

$$3x - y - z = 0$$

$$-2x + 4y - 2z = 0 \quad \leadsto \text{risolve...}$$

$$-x - y + z = 0$$

— 0 — 0 —

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & a \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

Quando è diagonalizzabile?

È triang. superiore, quindi autov. $\lambda = 1, 1, 2$

$$\text{Diagonalizzabile} \Leftrightarrow u_3(1) = 2 = u_2(1)$$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $a = 3$, allora $\text{rank} = 1$
 $\leadsto \dim(\ker) = 2 \leadsto \mu_g(1) = 2$
 $\leadsto$ diagonalizzabile
- Se $a \neq 3$, allora $\text{rank} = 2$
 $\leadsto \dim(\ker) = 1 \leadsto \mu_g(1) = 1$
 $\leadsto$ NO DIAGONALIZZ.

$\leadsto$ Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Quando sono simili?

La seconda è sempre diagonale

La prima ha autovalori 1, 2, a

- Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$, allora la prima è diag., quindi la sua forma canonica è la seconda.
- Se $a = 1$, allora la prima è diag. $\Leftrightarrow \mu_g(1) = 2$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{rank} = 2 \leadsto \mu_g(1) = 1 \leadsto \text{NO DIAG}$$

$\leadsto$ NO simili

- Se $a = 2$, allora la prima è diag. $\Leftrightarrow \mu_g(2) = 2$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{rank} = 2 \leadsto \dots \leadsto \text{NO DIAG.}$$

In questo caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio ulteriore: trovare la M di passaggio.

Consideriamo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y, z) \rightarrow (y, z, z)$

Trovare forma canonica e una corrispondente base

Scrivo la matrice di f tra le basi canoniche

$$f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangolare superiore $\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 0, 0, 1$

Per vedere se è diag. calcolo $\dim(\ker(A)) = 1$

$\Rightarrow$ non è diag. e la forma canonica è $\uparrow$ rango = 2

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come determino una possibile base v_1, v_2, v_3 ?

$$Av_1 = 0 \rightsquigarrow v_1 = (1, 0, 0)$$

$$Av_2 = v_1 \rightsquigarrow \text{risolvo } (y, z, z) = (1, 0, 0) \rightsquigarrow v_2 = (0, 1, 0)$$

$$Av_3 = v_3 \rightsquigarrow \text{risolvo } (y, z, z) = (x, y, z) \rightsquigarrow v_3 = (1, 1, 1)$$

Verifica finale: pongo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e allora

$$M^{-1}AM = J$$

— 0 — 0 —

Sia $f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$p(x) \rightarrow (x+2)p'(x),$$

definita dalla formula a lato.

Domanda: forma canonica + base.

Vediamo come agisce sulla base canonica $1, x, x^2$

$$1 \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow x+2$$

$$x^2 \rightarrow 2x^2 + 4x$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{matrix}$$

Volevo poter calcolare la formula generale

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2 &\rightarrow (x+2)(b+2cx) = bx+2cx^2+2b+4cx \\ &= 2b + (b+4c)x + 2cx^2 \end{aligned}$$

Quindi alla fine è come se fosse $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da
 $f(a, b, c) = (2b, b+4c, 2c)$

La forma canonica è diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per trovare v_1, v_2, v_3 basta trovare autovettori di $\lambda = 0, 1, 2$

$$\boxed{\lambda=0} \quad \ker(A) = \text{Span}((1, 0, 0)) \text{ e quindi } v_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio}}}{1}$$

$$\boxed{\lambda=1} \quad \ker(A - \text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span}((2, 1, 0)) \text{ e quindi } v_2 = 2+x$$

$$\boxed{\lambda=2} \quad \ker(A - 2\text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}((4, 4, 1)) \text{ e quindi}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= 4+4x+x^2 \\ &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

Tocchiamo con mano. Usando la formula

$$p(x) \rightarrow (x+2)p'(x)$$

$$v_2 = 2+x \rightarrow x+2 = v_2 \quad (\text{quindi } v_2 \text{ va in se stesso})$$

$$\begin{aligned} v_3 &= (x+2)^2 \rightarrow (x+2) \cdot 2(x+2) \\ &= 2(x+2)^2 = 2v_3 \quad (\text{quindi } v_3 \text{ va in 2 volte se stesso}). \end{aligned}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 43

Note Title

22/11/2022

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prima matrice: triangolare $\leadsto$ autovalori $1, 1, 2, 3$

$\leadsto$ diag. $\Leftrightarrow m_g(1) = 2$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↑
Det $\neq 0$

$\leadsto$ rango = 3 $\leadsto$ Dim(ker) = 1

$\leadsto m_g(1) = 1 \leadsto$ NO DIAG

$\leadsto$ La forma canonica è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio: trovare M di passaggio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bovino puro

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 1 (1-\lambda) \cdot (-\lambda)$$

↑
Laplace
1ª riga

$$= (-\lambda)(1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1]$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)$$

$$= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Autovalori: $\lambda = 0, 0, 1, 2$

Tutto è deciso da $m_g(0) = \dim(\ker)$

$$= 4 - \text{rango} = 1$$

$\leadsto$ NO DIAG.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$$

→ La forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

Esercizio: trovare base jordanizzante o la M di passaggio
— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 3$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ autovalore con } m_g(0) = 3$$

$$\Rightarrow \text{autovalori sono } 0, 0, 0, 13$$

↑
Traccia

$$\Rightarrow \text{Diagonalizzabile } \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 13 \end{pmatrix}$$

$$M \text{ di passaggio: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑
base di ker

↑
fizio che va in 13
volte se stesso

Fare la verifica che $M^{-1} A M = \text{Diagonale}$
— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Bovino puro

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) + 10]$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 10$$

$$= (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 4\lambda + 13)$$

↑

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

Autovalori: $\lambda = 1, 1, 2+3i, 2-3i$

Calcoliamo $\text{mg}(1)$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leadsto \text{rank} = 3 \\ \leadsto \text{mg}(1) = 1 \\ \leadsto \text{NO diag.} \end{array}$$

$\det = 10$

Forma canonica e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{C}$

Come trovo la base per quella reale?

$Av_1 = v_1 \leadsto$ autovettore di $\lambda = 1$

$Av_2 = v_2 + v_1 \leadsto v_2 = (x, y, z, w) \leadsto$ risolvo il sistema

Per trovare v_3 e v_4 basta risolvere in $\mathbb{C}$

$Av = (2+3i)v$ (autovettore di $\lambda = 2+3i$)

A questo punto v_3 e v_4 sono parte reale e parte immaginaria di v .

[Fare tutte le verifiche per esercizio]

$$A \rightarrow A + 3A^t$$

Vista come funzione $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$

Forma canonica + base in cui assume la forma canonica

Superbovino $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & b+3c \\ c+3b & 4d \end{pmatrix}$

[È come se fosse $(x, y, z, w) \rightarrow (4x, y+3z, 3y+z, 4w)$ in $\mathbb{R}^4$

o come se fosse

$$a+bx+cx^2+dx^3 \rightarrow 4a+(b+3c)x+(c+3b)x^2+4dx^3 \text{ in } \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

Mi scrivo la matrice associata ad f nella base canonica di $M_{\mathbb{R}}^2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

[Da subito si vede che A è
simmetrica, quindi diag. di lusso]

Di questa cerco la forma canonica. Bovino pure

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (4-\lambda)(4-\lambda)[(1-\lambda)^2-9] \\ &= (4-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda+1-9) \\ &= (4-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda-8) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $s=2$
 $p=-8$

$$\begin{aligned} &= (4-\lambda)^2(\lambda-4)(\lambda+2) \\ &= -(4-\lambda)^3(\lambda+2) \end{aligned}$$

Autovalori : $\lambda = -2, 4, 4, 4$

Bisogna calcolare $\text{mg}(4)$

$$A - 4I_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \leadsto \dim(\ker) = 3$

$\leadsto \text{mg}(4) = 3$

$\leadsto$ Diagonalizzabile [e si poteva
già sapere dall'inizio]

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & 0 \\ & 0 & 4 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

Trovare una base diagonalizzante

$$\boxed{\lambda=4} \quad \text{Ker}(A-4\text{Id}) = \text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(1,0,0,0)}, \underset{\vec{v}_2}{(0,0,0,1)}, \underset{\vec{v}_3}{(0,1,1,0)} \right)$$

$$\boxed{\lambda=-2} \quad A+2\text{Id} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ker} = \text{Span} \left(\underset{\vec{v}_4}{(0,1,-1,0)} \right)$$

Quando rinviuto le matrici, ottengo la base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{A_2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{A_3} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{A_4}$$

Verifica mentale: cosa succede quando faccio $A \rightarrow A+3A^t$

$$A_1 \rightarrow 4A_1 \quad A_2 \rightarrow 4A_2 \quad A_3 \rightarrow 4A_3$$

$$A_4 \rightarrow A_4 + 3 \underset{\substack{\uparrow \\ -A_4}}{A_4^t} = A_4 - 3A_4 = -2A_4 \quad \text{c'}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 44

Note Title

25/11/2022

FORME QUADRATICHE

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy \quad (\text{due variabili})$$

SEGNATURA Sono 3 numeretti (n_+, n_-, n_0) tali che

$$n_+ + n_- + n_0 = n$$

↑ dimensione spazio in cui è definita $q(x)$

e definiti in questo modo:

→ n_+ = massima dimensione di un sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c.

" $q(x)$ è definita pos. in V " cioè $q(v) > 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$

→ n_- = massima... $q(v) < 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$

→ n_0 = definito per differenza

Domanda: data una forma, trovare la segnatura.

Matrice associata ad una forma quadratica

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

↑

matrice
simmetrica

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 3xz - 4yz$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Anche in questo caso

$$(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q(x, y, z)$$

— 0 — 0 —

Quattro metodi per calcolare la segnatura

- ① Segno autovalori (m_+ = numero autovalori pos.
 m_- = numero autovalori neg.
 m_0 = " " nulli)

Il problema è che bisogna calcolare gli autovalori

- ② Completamento dei quadrati

- ③ SYLVESTER

- ④ CARTESIO

Oss. $\rightarrow q(x)$ è def. positiva $\Leftrightarrow m_+ = n$ (e quindi $m_- = m_0 = 0$)
 $\rightarrow$ " " negativa $\Leftrightarrow m_- = n$
 $\rightarrow q(x)$ è semidef. pos. $\Leftrightarrow m_- = 0$ (non c'è nulla di < 0)
 $\rightarrow$ " " neg. $\Leftrightarrow m_+ = 0$ " > 0
 $\rightarrow q(x)$ è indefinita $\Leftrightarrow m_+ \geq 1$ e $m_- \geq 1$
 (c'è qualcosa di > 0 e qualcosa di < 0)
 — 0 — 0 —

Completamento dei quadrati

Ogni forma quadratica $q(x)$ di n variabili si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni lin. indep.

Allora

- $\rightarrow m_+$ = numero di quadrati con il segno +
 $\rightarrow m_-$ = " " " " " "
 $\rightarrow m_0$ = per differenza

Notazione $+++--0$ vuol dire $m_+ = 3$, $m_- = 2$, $m_0 = 1$

Esempi

$x^2 + y^2$

++

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$3x^2 + y^2$

++

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x^2 - y^2$

+-

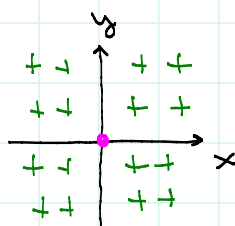
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$2x^2 - 3y^2$

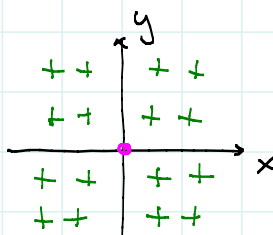
+-

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

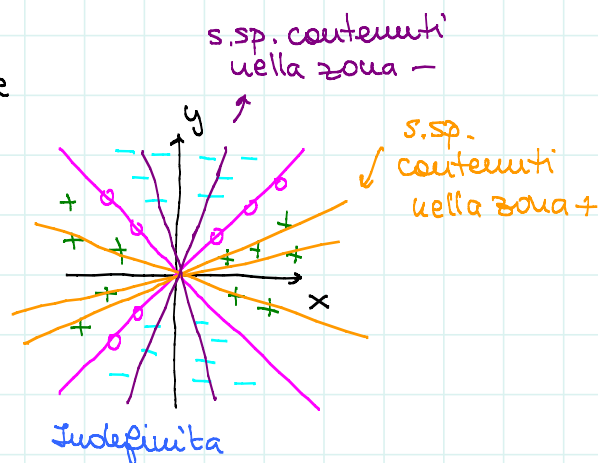
Chiediamoci dove sono +, - e nulle



Defin. pos.



Defin. pos.

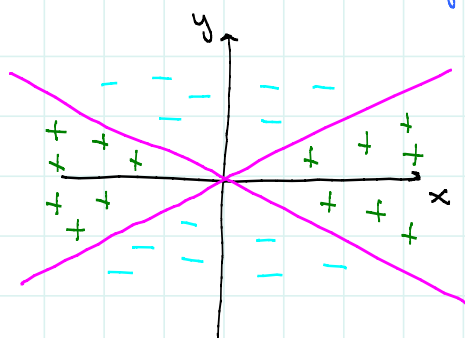


Indefinita

$$2x^2 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^2$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$$



$x^2 + y^2 + xy$

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$S = 2$

$P = \frac{3}{4}$

++

Def. pos.
(semi def. pos.)

$x^2 + y^2 + 2xy$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$

$\lambda = 2$

+ 0

Semi def. pos.
(no def. pos.)

$(x+y)^2$

↑
una sola
espressione
con segno
+

$x^2 + y^2 + 3xy$

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$S = 2$

$P = -\frac{5}{4}$

+-

indefinita

$x^2 + 2y^2 + 3xy$

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$S = 3$

$P = -\frac{1}{4}$

+-

indefinita

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \underbrace{\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4}} + y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \underbrace{\frac{9y^2}{4} - \frac{9y^2}{4}} + y^2$$

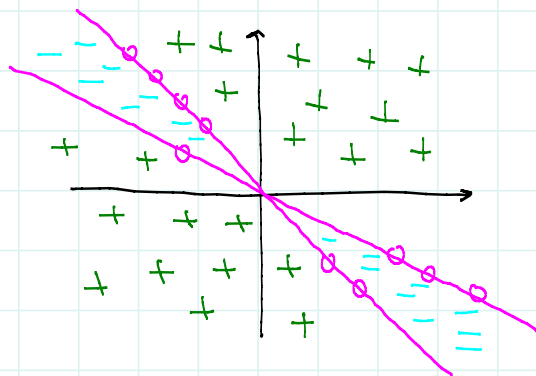
$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Dove si annulla ?

$$\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad \leadsto \quad x + \frac{3}{2}y = \begin{cases} \frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$



ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 45

Note Title

25/11/2022

$$x^2 + y^2 - xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{5}{4}$$

$$S = 2$$

++

Def. pos.

$$x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 2$$

+ 0

Semidef. +

$$x^2 + y^2 - 3xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = -\frac{5}{4}$$

+-

Indef.

$$x^2 + 2y^2 - 3xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = -\frac{1}{4}$$

+-

Indef.

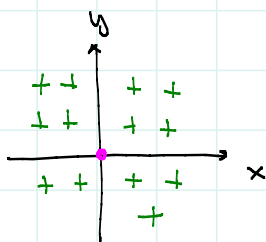
$$x^2 + y^2 - xy = x^2 - xy + y^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

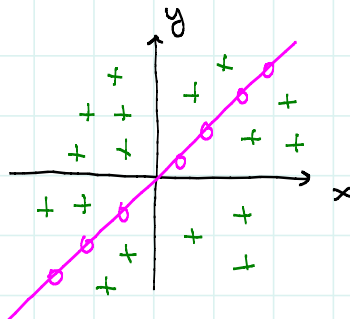
Dove si annulla?

Dove sono entrambi = 0

Ma essendo lin. indep.

questo accade $\Leftrightarrow x=y=0$ 

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$$



$$7xy$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

D = neg.

+-

$$-x^2 - 2y^2 + 10xy$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = -23$$

+-

$$-y^2 - 7xy$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

D = neg

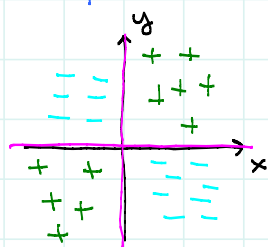
+-

$$3x^2 + 16y^2 - 14xy$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D = 48 - 49$$

+-



$$(x+ay)^2 - (x-ay)^2 \leadsto \text{trovo } a$$

$$7xy = (x + \frac{7}{4}y)^2 - (x - \frac{7}{4}y)^2$$

$$x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{49}{16}y^2 - x^2 + \frac{7}{2}xy - \frac{49}{16}y^2$$

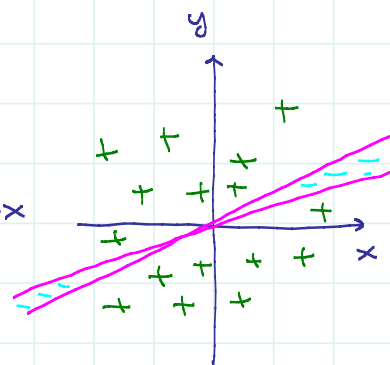
Nel 4° esempio, trovare un vettore x, y t.c. $q(x, y) < 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 16y^2 - 14xy &= 16y^2 - 14xy + 3x^2 \\ &= 16y^2 - 14xy + \frac{49}{16}x^2 - \frac{49}{16}x^2 + 3x^2 \\ &= \left(4y - \frac{7}{4}x\right)^2 - \frac{1}{16}x^2 \end{aligned}$$

Se voglio che venga negativo prendo $x=16$ e $y=7$ in modo che si annulli il 1° termine.

Facciamo il disegno dei segni. Si annulla dove

$$4y - \frac{7}{4}x = \pm \frac{1}{4}x \quad \leadsto \quad \begin{aligned} 4y - 2x &= 0 & y &= \frac{x}{2} \\ 4y - \frac{3}{2}x &= 0 & y &= \frac{3}{8}x \end{aligned}$$



$$\begin{array}{c} -y^2 \\ -0 \end{array}$$

semidef. neg.

$$\begin{array}{c} x^2 + xy \\ + - \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5x^2 + 7y^2 + 12xy \\ + - \end{array}$$

$$-3x^2 - 16y^2 - 14xy$$

↓
praticamente
uguale ad uno
dei precedenti

$$x^2 + xy = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} 5x^2 + 7y^2 + 12xy &= 5x^2 + 12xy + 7y^2 \\ &= 5x^2 + 2\sqrt{5}x \cdot \frac{6}{\sqrt{5}}y + \frac{36}{5}y^2 - \frac{36}{5}y^2 + 7y^2 \\ &= \left(\sqrt{5}x + \frac{6}{\sqrt{5}}y\right)^2 - \frac{1}{5}y^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + yz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} + + - \\ - - - \end{array} \quad \text{Tr} > 0$$

$$x^2 + y^2 - 2yz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1$$

$$\begin{array}{c} + + - \\ - - - \end{array} \quad \text{Tr} > 0$$

$$x^2 + y^2 + 3yz$$

uguale al
precedente

$$x^2 + y^2 + yz = x^2 + y^2 + yz + \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} = \left(x^2 + \left(y + \frac{z}{2} \right)^2 - \frac{z^2}{4} \right)$$

$$x^2 + y^2 - 2yz = x^2 + y^2 - 2yz + z^2 - z^2 = x^2 + (y - z)^2 - z^2$$

Achtung! $q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

$$q(x, y, z) = x^2 + x^2 - (y + z)^2 \quad + + -$$

NO! NO! NO! I primi 2 quadrati NON sono lin. indep!!!

$$q(x, y, z) = 2x^2 - (y + z)^2 = (\sqrt{2}x)^2 - (y + z)^2 \quad + - 0$$

Stesso con la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda) [\lambda^2 + 2\lambda - 1] = \lambda(\lambda+2)(2-\lambda)$$

$$\leadsto \text{autovalori: } \lambda=0, \lambda=2, \lambda=-2$$

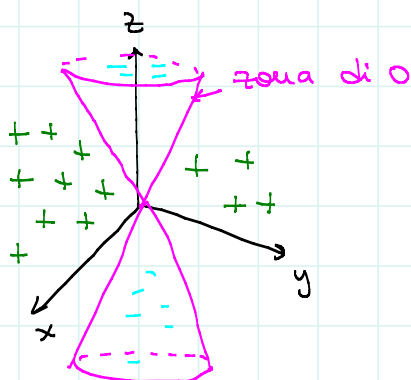
Semplice esempio con disegno

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad ++-$$

Dove si annulla? Dove

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

distanza dall'origine in $\mathbb{R}^2$ 

Segui - : dentro al cono

Segui + : fuori dal cono

Ci sono dei piani (s.sp. di dim. 2) contenuti nella zona +

Ci sono solo rette (s.sp. di dim. 1) contenuti nella zona -.

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz + 6yz$$

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz + 6yz$$

$$\underbrace{x^2 + 4xy + 5xz + 2y^2 + 3z^2 + 6yz}_{\text{quelli con la } x}$$

$$\underbrace{\left(x + 2y + \frac{5}{2}z\right)^2 - 4y^2 - \frac{25}{4}z^2 - 10yz}_{\text{uguale ai termini con la } x \text{ all'inizio}} + 2y^2 + 3z^2 + 6yz$$

quello che resta ha solo y e z $\leadsto$ come fosse in dim 2

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 46

Note Title

29/11/2022

Criterio Sia $p(x)$ il pol. caratteristico di una matrice simmetrica $n \times n$ (quindi per forza ha n radici reali). Allora

- il numero di radici nulle è il più piccolo esponente di x che compare nel polinomio (se c'è il termine noto, conta come x^0)
- il numero di radici positive è il numero di variazioni di segno tra i coeff.
- il numero di radici negative si ottiene per differenza.

Esempio $p(x) = x^8 - 5x^6 + x^3$

- le radici nulle sono 3 ($x=0$ è radice di mult. 3)
(posso raccogliere x^3 al massimo)
- le radici positive sono 2, perché i coeff. sono $+ - +$
- le radici negative sono 3.

Oss. Il metodo funziona se si sa A PRIORI che le radici sono tutte reali (nell'esempio non era garantito).

Oss. Criterio aiuta a trovare la segnatura senza risolvere il pol. caratteristico.

SYLVESTER

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Calcolo i det. a partire da in alto a sx

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = -7$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -3 - 3 - 2 - 1 = -9$$

$+ - -$

$+ + - -$
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & P & P \end{matrix}$

→ scrivo di fila i segni

→ aggiungo un $+$ a sinistra

→ n_+ = numero permanenze, n_- = numero variazioni

Oss. Sylvester richiede che non ci siano $\det = 0$ on the road (in particolare non funziona così come descritto se 0 è autovalore).

Oss. Per ricordare la procedura, basta pensare al caso di una matrice diagonale (aggiungendo un autovalore, se questo è positivo il segno non cambia, se è negativo cambia)

Quello che ho descritto è Sylvester 1-2-3



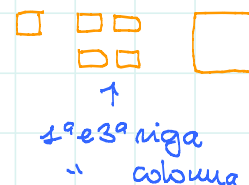
Posso fare Sylvester 3-2-1



Sylvester 2-3-1



Sylvester 1-3-2



Caso 4×4 Sylvester 2-4-1-3

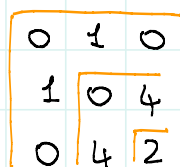


Det 1×1

Det 2×2

Det 2×2

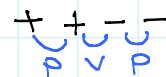
Tutta la matrice



Det $1 \times 1 = 2$

Det $2 \times 2 = -16$

Det $3 \times 3 = -2$



La segnatura è $++--$

La forma quadratica associata sarebbe

$$q(x, y, z) = 2z^2 + 8yz + 2xy$$

Proviamo a completare i quadrati

$$2(z^2 + 4yz + 4y^2 - 4y^2) + 2xy = 2(2y+z)^2 - 8y^2 + 2xy$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2(4y^2 - xy)$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2\left(4y^2 - 2 \cdot 2y \cdot \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2\left(2y - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8}$$

$$= \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + [\sqrt{2}(2y+z)]^2 - [\sqrt{2}\left(2y - \frac{x}{4}\right)]^2$$

Due quadrati con il segno +, uno con il segno -.

Esempi

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz$$

$$-y^2 + z^2 + xy - yz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = \cancel{1} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} - \cancel{1} \\ = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\begin{matrix} + & + & + \\ \cup & \cup & \cup \\ p & p & p \end{matrix}$$

Segnatura : + + -

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{matrix} + & + & - \\ \cup & \cup & \cup \\ p & p & p \end{matrix}$$

Segnatura : + + -

Per esercizio facciamo il 2° completando i quadrati

$$\begin{aligned}
 -y^2 + z^2 + xy - yz &= z^2 - yz - y^2 + xy \\
 &= z^2 - yz + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} - y^2 + xy \\
 &= \left(z - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2 + xy \\
 &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y^2 - \frac{4}{5}xy\right) \\
 &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{25}x^2\right) \\
 &\quad \quad \quad 2y \cdot \frac{2}{5}x \\
 &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y - \frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{1}{5}x^2
 \end{aligned}$$

Come previsto, due segni + e un segno -.

Trovare un s.sp. di dim. max su cui q è def. neg.

La max dim. è 1 e basta annullare i termini positivi, quindi

$$\begin{cases} z - \frac{1}{2}y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Span}((0, 2, 1))$$

— 0 —

$$xy - 2yz + 3xz \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Non c'è una partenza per Sylvester.

$$\text{Det} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Autovalori} = \begin{cases} --- & \rightsquigarrow \text{Tr sarebbe } < 0 \\ \boxed{++-} & \leftarrow \text{segnetura} \end{cases}$$

Come completare i quadrati?

$$xy - 2yz + 3xz$$

Al primo passaggio eliminiamo tutte le x e tutte le y

$$(x + \underset{\uparrow}{ay} + bz)^2 - (x - \underset{\uparrow\uparrow}{ay} + cz)^2 =$$

$$= \cancel{x^2} + a^2 y^2 + b^2 z^2 + 2a xy + 2b xz + 2ab yz$$

$$- \cancel{x^2} - a^2 y^2 - c^2 z^2 + 2a xy - 2c xz + 2ac yz$$

$$= (b^2 - c^2) z^2 + 4a xy + 2(b - c)xz + 2a(b + c)yz$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 2(b - c) = 3 \end{cases}$$

$$b - c = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} 2a(b + c) = -2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(b + c) = -2$$

$$\begin{cases} b - c = \frac{3}{2} \\ b + c = -4 \end{cases}$$

$$2b = -\frac{5}{2} \quad b = -\frac{5}{4}$$

$$c = -4 - b =$$

$$= -4 + \frac{5}{4} = -\frac{11}{4}$$

Conclusione

$$xy - 2yz + 3xz = \left(x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4} - \frac{11}{4}z\right)^2 + \frac{121-25}{16} z^2$$

[fare verifica!]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 47

Note Title

29/11/2022

$$y^2 + 7xz$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sylvester non funziona

Devo partire con 2 e poi non so come proseguire

$$\text{Det } 3 \times 3 = -\frac{49}{4} < 0$$

Autovalori: $---$ NO perché $\text{Tr} = 1$
 $++-$

Completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} y^2 + 7xz &= y^2 + (x+az)^2 - (x-az)^2 \\ &= y^2 + 4axz \quad \leadsto a = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$y^2 + \left(x + \frac{7}{4}z\right)^2 - \left(x - \frac{7}{4}z\right)^2$$

$$-y^2 - w^2 - 3xz$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sylvester $4-2-1-3$

$$\text{Det } 1 \times 1 = -1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 1$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 0 \quad \leadsto$$

$$\text{Det } 4 \times 4 = -1 \cdot \left(+\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} < 0$$

↑
Laplace
4ª riga

Autovalori: $+++-$
 $+- - -$

autovalori compatibili con la traccia

$$\begin{aligned} \text{Completiamo i quadrati: } & -y^2 - w^2 + (x+az)^2 - (x-az)^2 \\ & -y^2 - w^2 + 4axz \quad \leadsto a = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Determinare la segnatura al variare del parametro

$$q(x,y) = x^2 + 2y^2 + axy \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 2 - \frac{a^2}{4} = \frac{8 - a^2}{4}$$

- $\text{Det} > 0 \Leftrightarrow 8 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

In questo caso $++$ (perché $\text{Det} > 0$ e $\text{Tr} > 0$)

- $\text{Det} < 0 \Leftrightarrow a < -2\sqrt{2}$ oppure $a > 2\sqrt{2}$

In questo caso $+ -$ ($\text{Det} < 0$)

- $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

In questo caso $+ 0$ (gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$)

$$q(x,y) = x^2 + ay^2 + 5xy \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} = a + 1 \quad \text{Det} = a - \frac{25}{4}$$



- Se $a > \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} > 0$ e $\text{Tr} > 0 \leadsto ++$

- Se $a = \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} = 0$ e $\text{Tr} > 0 \leadsto + 0$

- Se $a < \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} < 0 \leadsto + -$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $x^2 + ay^2 + 5xy$ è nulla sul s.sp. di eq. $x+3y=0$

Il s.sp. è $\text{Span}((-3,1))$ quindi deve essere $q(-3,1) = 0$

$$q(-3,1) = 9 + a - 15 = 0 \quad \leadsto \quad a = 6$$

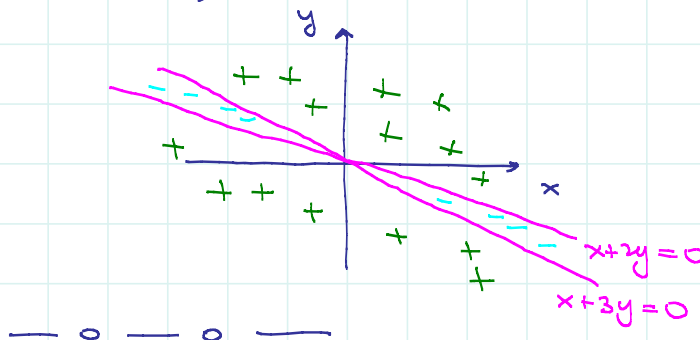
Vediamo cosa succede in questo caso:

$$\begin{aligned} x^2 + 6y^2 + 5xy &= x^2 + 5xy + \frac{25}{4}y^2 - \frac{25}{4}y^2 + 6y^2 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

Vediamo dove si annulla:

$$x + \frac{5}{2}y = \pm \frac{1}{2}y$$

$$x + 2y = 0 \quad x + 3y = 0$$



2. Consideriamo le seguenti forme quadratiche $q(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + axz, \quad x^2 + ay^2 + 3z^2 + 6xy - yz, \quad y^2 + axz - 4ayz.$$

Determinare, per ciascuna di esse, per quali valori del parametro reale a risulta

- (a) definita positiva, $\rightarrow$ segnatura $+++$
- (b) indefinita, $\rightarrow$ almeno un $+$ e almeno un $-$
- (c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2, $\rightarrow$ segnatura $+- -$
- (d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2, $\rightarrow$ più delicato (o due zeri oppure $+ - 0$)

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + axz$$

Studio della segnatura al variare del parametro a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline \frac{a}{2} & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Sylvester 1-2-3

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 2$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 6 - \frac{a^2}{2} = \frac{12 - a^2}{2}$$

$$\bullet \text{ Det } 3 \times 3 > 0 \Leftrightarrow 12 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 12 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

In questo caso $\underbrace{+}_{P} \underbrace{+}_{P} \underbrace{+}_{P}$, quindi segnatura $+++$

$$\bullet \text{ Det } 3 \times 3 < 0 \Leftrightarrow a < -2\sqrt{3} \text{ oppure } a > 2\sqrt{3}$$

I segni in Sylvester sono $\underbrace{+}_{P} \underbrace{+}_{P} \underbrace{-}_{V}$, quindi segnatura $++-$

- $\text{Det } 3 \times 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$. In questo caso ovviamente c'è l'autovettore nullo. C'è anche un autovettore positivo almeno perché $\text{Tr} = 6 > 0$. Il segno dell'altro in questo momento non è prevedibile.

Ci sono due modi per determinarlo

→ calcolare esplicitamente gli autovettori (una radice è $\lambda=0$, quindi resta eq. di 2° grado)

→ osservare che q è def. positiva in

$$\text{Span}((1,0,0), (0,1,0))$$

oppure in

$$\text{Span}((0,1,0), (0,0,1))$$

quindi almeno 2 segni $+$ ci sono, quindi la segnatura è $++0$.

$$\underline{-} \underline{0} \underline{-} \underline{0} \underline{-}$$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 48

Note Title

29/11/2022

$$x^2 + ay^2 + 3z^2 + 6xy - yz,$$

- (e) nulla sul sottospazio generato da $(1, 2, 3)$,
- (f) definita positiva su almeno un sottospazio di dimensione 2,
- (g) definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 1,
- (h) definita positiva sul sottospazio generato da $(1, 1, 3)$ e $(0, 2, 1)$.

(e) Basta sostituire $(1, 2, 3)$ e imporre che venga 0

$$q(1, 2, 3) = 1 + 4a + 27 + 12 - 6 = 0 \leadsto \text{trovo } a$$

(f) Almeno due segni + nella segnatura $(+++ , ++- , ++0)$

(g) Almeno un segno -

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & a & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-3-2 in modo da avere il parametro solo alla fine

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1 \quad \text{Det } 2 \times 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Det } 3 \times 3 &= 3a - 27 - \frac{1}{4} = 3a - \frac{108 + 1}{4} \\ &= 3a - \frac{109}{4} \end{aligned}$$

• Se $3a - \frac{109}{4} > 0$, cioè $a > \frac{109}{12}$, allora i segni sono $\underbrace{+++}_{PPP}$ quindi segnatura $+++$

• Se $a < \frac{109}{12}$, allora $\underbrace{++-}_{PPV}$, quindi segnatura $++-$

• Se $a = \frac{109}{12}$, allora la segnatura è $++0$, perché possiamo fare almeno 3 cose

→ trovare gli autovalori

→ completare i quadrati

→ osservare che $q(x, y, z)$ è definita positiva in

$$\text{Span} \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

che ha dimensione = 2.

(e) Sottospazio generato da $(1,1,3)$ e $(0,2,1)$, cioè
 $\text{Span}((1,1,3), (0,2,1))$

Scrivo l'equazione cartesiana del s.sp.

$\begin{matrix} + & * & * \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$

$\leadsto (-5, -1, 2)$ [Verifico che è ortogonale :)]

$$\leadsto 5x + y - 2z = 0, \text{ cioè } y = 2z - 5x$$

Sostituisco y nella formula di q :

$$\begin{aligned} q(x, 2z - 5x, z) &= x^2 + a(2z - 5x)^2 + 3z^2 + 6x(2z - 5x) - (2z - 5x)z \\ &= \text{svolgendo i conti viene una forma} \\ &\text{nelle variabili } x \text{ e } z, \text{ e questa deve} \\ &\text{essere definita positiva.} \end{aligned}$$

2° modo Tutti gli elementi del s.sp. sono del tipo
 $t(1,1,3) + s(0,2,1) = (t, t+2s, 3t+s)$

Quindi deve succedere che

$$q(t, t+2s, 3t+s)$$

deve essere def. pos. come forma in (t, s)

[Verificare che venga uguale nei due modi !]

$$x^2 - y^2 + az^2 - w^2$$

$$x^2 + ay^2 - w^2$$

$$\rightarrow a > 0 : ++--$$

$$\rightarrow a < 0 : +---$$

$$\rightarrow a = 0 : +--0$$

$$\rightarrow a > 0 : ++-0$$

$$\rightarrow a < 0 : +--0$$

$$\rightarrow a = 0 : +-00$$

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - w^2 - 2xz + ayw$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{a}{2} \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-2-3-4

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -2 + 1 = -1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -1$$

$$\text{Det } 4 \times 4 = -1(-1) + \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot 1$$

Laplace

4^a riga

$$= 1 - \frac{a^2}{4} = \frac{4-a^2}{4}$$

- Se $-2 < a < 2$, allora $\text{Det } 4 \times 4 > 0$, quindi Sylvester dice

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - \\ \cup & \cup & \cup & \cup \\ P & V & P & V \end{array}, \text{ quindi segnatura } ++--$$

- Se $a < -2$ oppure $a > 2$, allora $\text{Det } 4 \times 4 < 0$, quindi

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - \\ \cup & \cup & \cup & \cup \\ P & V & P & P \end{array}, \text{ quindi segnatura } +++-$$

- Se $a = \pm 2$, allora dico che la segnatura è $++-0$.

Perché? Di sicuro c'è uno 0, perché $\text{Det} = 0$.

Considero la forma ristretta alle prime 3 variabili, cioè a

$$\text{Span}((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)).$$

Resta la forma (quando uetto $w=0$) data dalla matrice

3×3 in alto a sx. Quella non ha il parametro e ha

segnatura $++-$ per Sylvester fatto fino al 3×3 .

Quindi già sappiamo che, guardando solo le prime 3

variabili, c'è un s.sp. di dim 2 su cui è def. pos. e

" " " " 1 " " " neg.

$$- \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$$

$$ax^2 + w^2 + 2ayz + 2xz$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Non c'è un modo facile di fare Sylvester.

Facciamo il Det della matrice

$$\text{Det} = 1(-a^3) = -a^3$$

Caso $a=0$

Resta $w^2 + 2xz = w^2 + (x + \frac{1}{2}z)^2 - (x - \frac{1}{2}z)^2$
 $\leadsto$ segnatura $++-0$

Caso $a < 0$

Det > 0 , quindi le possibilità sono

~~++++~~

++--

~~----~~

Osserviamo che $q(0,0,0,1) = 1$

$q(1,0,0,0) = a < 0$

Caso $a > 0$

Det < 0 , quindi le possibilità sono

+++-

+---

Osserviamo che, ristretta a $\text{Span}((1,0,0,0), (0,0,0,1))$

diventa $ax^2 + w^2$, che essendo $a > 0$ è def. positiva.

Quindi è def. pos. almeno su un s.sp. di dim. 2, quindi

la segnatura è $+++ -$

Alternativa per il caso $a=0$

$$w^2 + 2xz = w^2 + x^2 + z^2 + 2xz - x^2 - z^2$$

$$= w^2 + (x+z)^2 - x^2 - z^2 \leadsto ++--$$

NON SONO LIN. INDIP.!!

↑ NO!!!

— 0 — 0 —

Domanda: data una matrice B simmetrica, quanto può diventare bella $\hat{B}$ scegliendo bene M ?

Risposta: può diventare diagonale, con sulla diagonale solo $0, 1, -1$
(SYLVESTERIZZAZIONE)

$\nearrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 m_0 m_+ m_-

— 0 — 0 —

Esempi

- determinare se è definito positivo oppure no,
- determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1, 2)$ e $(3, -1)$,
- determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{(-1, 2), (3, -2)\}$ (si consiglia per le prime volte di svolgere questo punto sia direttamente con la definizione, sia con il cambio di base),
- determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1)$,
- determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $x + 2y = 0$,
- determinare una base "Sylvesterizzante".

Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (a) $\text{Det} = 10 - 9 = 1$ $++$ $--$
 $\text{Tr} = 7 \leadsto \boxed{++}$ Def. pos.

(b) $y^t B x = (1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11$
 $(8, 13) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 - 13 = 11 \quad \cup$

(c) **BOVINO** $u_1 = (-1, 2)$ $u_2 = (3, -2)$

$\langle u_1, u_1 \rangle$

$\langle u_2, u_2 \rangle$ $\langle u_1, u_1 \rangle = (-1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1, 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 10$

$\langle u_1, u_2 \rangle$

$\langle u_2, u_2 \rangle = (3, -2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (0, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (3, -2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$

$\hat{B} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{matrix}$

(c) **CON CAMBIO BASE** $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ Dalla $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ alla canonica

$$\hat{B} = M^t B M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

(d) Vettori ortogonali a $(-1, 1)$

$$\underbrace{(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\langle (x,y), (-1,1) \rangle} = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{x+2y=0}$$

(e) Determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $2x-5y=0$ (variante rispetto al testo)

Chi spanna il sottospazio? $(5, 2)$

Cerco qualcuno ortogonale a $(5, 2)$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix} = 16x + 25y = 0$$

potrei scambiare!

Ad esempio $(25, -16)$

[Verifica: calcolare $\langle (25, -16), (5, 2) \rangle = 0$]

(f) Determinare base Sylvesterizzata.

Devo arrivare ad avere

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \quad n_+ = 2, \quad n_- = n_0 = 0$$

Se usassi $v_1 = (25, -16)$ $v_2 = (5, 2)$ sicuramente avrei gli 0 fuori dalla diagonale

Calcolo

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= (25, -16) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \end{pmatrix} \\ &= (25, -16) \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 50 + 80 = 130\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_2, v_2 \rangle &= (5, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (5, 2) \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix} = 130\end{aligned}$$

Base ortonormalizzata è

$$\begin{aligned}v_1 &= \left(\frac{25}{\sqrt{130}}, \frac{-16}{\sqrt{130}} \right) \\ v_2 &= \left(\frac{5}{\sqrt{130}}, \frac{2}{\sqrt{130}} \right)\end{aligned}$$

Verifica brutta: $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ Verifica un poco più raffinata: $M = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}$, allora

$$M^t \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativa per punto (f). Parto da una base qualunque

$$\boxed{(1, 0)}$$

$$(0, 1)$$

Mi tengo il primo e modifico il secondo in modo che sia ortogonale al primo

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2x + 3y = 0$$

Quindi posso prendere $\boxed{(-3, 2)}$. A questo punto basta dividere entrambi per il numero giusto.

In ulteriore alternativa, posso usare la versione di GS con il nuovo prodotto scalare, cioè

$$\text{nuovo } v_2 = (0,1) - \frac{\langle (0,1), (1,0) \rangle}{\langle (1,0), (1,0) \rangle} (1,0) = (0,1) - \frac{3}{2} (1,0)$$

$$v_2 = \frac{\langle v_2, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \boxed{\left(-\frac{3}{2}, 1\right)} \text{ multiplo di prima}$$

$$\langle (0,1), (1,0) \rangle = (0,1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\langle (1,0), (1,0) \rangle = 2$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

—

LEZIONE 50

Note Title

02/12/2022

- (a) verificare che è definito positivo,
 (b) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base
 $\{(-1, 2, 0), (3, 0, -2), (1, 1, 1)\}$,
 (c) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1, 3)$,
 (d) determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio di equazione cartesiana $x = 3y - z$,
 (e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1, 0, 0)$ e a $(0, 1, 1)$,
 (f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio generato da $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$,
 (g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,
 (h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Sylvester 1-2-3

$$\text{Det } 1 \times 1 = 3$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 8$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 27 - 3 - 3 = 21$$

$$\begin{array}{c} + + + + \\ \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \\ p \quad p \quad p \\ + + + \end{array}$$

(b) Per esercizio fare bivio. In alternativa $M^t B M$ con

$$M = \text{matrice cambio base} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Ortogonale di Span $((-1, 1, 3))$

$$(-1, 1, 3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(-2, 5, 10) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$-2x + 5y + 10z = 0$$

s.sp. di dim. 2

(d) $x = 3y - z$

$$\text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(3, 1, 0)}, \underset{\vec{v}_2}{(1, 0, -1)} \right)$$

Prendo

$$\hat{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1$$

$$\hat{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \hat{\vec{v}}_2, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \hat{\vec{v}}_1, \hat{\vec{v}}_1 \rangle} \hat{\vec{v}}_1 = \text{continuo}$$

si calcolano usando la matrice B

Alternativa bovina: Prendo $\hat{U}_1 = U_1$ e cerco $\hat{U}_2 = (x, y, z)$ imponendo due cose

$$\begin{cases} x = 3y - z & (\hat{U}_2 \in \text{piano}) \\ \langle U_1, \hat{U}_2 \rangle = 0 & \leadsto \text{nuova equazione in } x, y, z \\ \leadsto \text{risolvo il sistema} \end{cases}$$

[Fate nei due modi e vedere che viene o lo stesso, o un multiplo]

(e) Det. vettore a coord. intere ortogonale a $\underset{\hat{U}_1}{(1, 0, 0)}$ e $\underset{\hat{U}_2}{(0, 1, 1)}$

1° modo Pongo $U = (x, y, z)$ e impongo le due equazioni

$$\begin{cases} \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ risolvo il sistema

2° modo Aggiungo un vettore in modo da avere una base, ad esempio $U_3 = (0, 0, 1)$

e poi applico GS ottenendo

$\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3$
 $\underbrace{\hat{U}_1, \hat{U}_2}_{\text{generano il piano}}, \hat{U}_3 \uparrow \text{ortogonale ai precedenti}$

(f) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0)$ su $\text{Span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$

Determino una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, che chiamiamo U_1, U_2, U_3 tale che $\text{Span}(U_1, U_2) = \text{Span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$

(basta fare GS a partire da $(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)$)

A quel punto scrivo

$$(1, 0, 0) = \boxed{a U_1 + b U_2} + c U_3$$

proiezione che
cerco

(g) Praticamente risolto
facendo (f).

Esercizio

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1,$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1 + 5z_1z_2,$$

$$x_1y_1,$$

NO

$$x_1x_2,$$

SI

$$x_1y_2,$$

NO

$$x_1y_2 + x_2y_1,$$

SI

$$x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2,$$

FOLLA

Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ con vettori $v = (x_1, y_1, z_1)$

$$w = (x_2, y_2, z_2)$$

Domanda: quali espressioni definiscono un prodotto scalare

[Ad esempio quello canonico sarebbe $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$]

$\langle v, w \rangle = x_1y_1$ è una stupidaggine galattica!!

NON è simmetrico (che succede se scambio v e w ?)

NON è lineare $\langle 5v, w \rangle = 25 \langle v, w \rangle$

NON dipende nemmeno da w

$\langle v, w \rangle = x_1x_2$ è un prodotto scalare (simmetrico e lineare)

La sua matrice nella base canonica è

$$(x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2$$

$\langle v, w \rangle = x_1y_2$ NON è simmetrico $\Rightarrow$ NO prod. scalare

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1$$

$$\langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle = 0$$

?

$\langle v, w \rangle = x_1y_2 + x_2y_1$ è un prodotto scalare con matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha segnatura $+ - 0$

La forma quadratica associata è

$$q(x, y, z) = 2xy = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2}_{\text{--- o --- o ---}}$$

$p(x)q(x)$,
FOLIA
TOTALE

$p(0)q(0)$,
OK

$p(1)q(0)$,
NO SIMM

$p(0)q(1) + p(1)q(0)$,

$p'(0)q'(0)$,
moltiplicare le
secondo componenti

Quali sono prodotti scalari tra $p(x)$ e $q(x)$ in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) = a_1 a_2$$

$a_1 a_2$

↑

$$p(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$$

(a_1, b_1, c_1)

$$q(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$$

(a_2, b_2, c_2)

Equivale a moltiplicare le prime due componenti

La sua matrice nella base $\{1, x, x^2\}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$$

$1 \quad x \quad x^2$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(1) + q(0)p(1)$$

$$\begin{aligned} \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle &= a_1(a_2 + b_2 + c_2) + a_2(a_1 + b_1 + c_1) \\ &= 2a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 c_2 + a_2 c_1 \end{aligned}$$

Matrice associata

$$(a_1, b_1, c_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \text{espressione data}$$

Segnatura: 0 + -

← [Cometti dopo video]

Esercizio: scrivere $q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2xz$ come differenza di due quadrati.

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 51

Note Title

06/12/2022

$$\int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx + p(3)q(3),$$

Consideriamo $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ = polinomi di grado ≤ 2

Definiamo $\langle p(x), q(x) \rangle$ come sopra.

① Verificare che è un prod. scalare

→ è simmetrico

→ $\langle ap(x), q(x) \rangle = a \langle p(x), q(x) \rangle$

→ $\langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle$

② Scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$

$$\langle 1, 1 \rangle = 1$$

$$\langle 1, x \rangle = 3$$

$$\langle 1, x^2 \rangle = 9$$

$$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 1 dx + 9 = 11$$

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 2x dx + 27 = 27$$

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 4x^2 dx + 81 = \frac{4}{3} [x^3]_{-1}^1 + 81 = \frac{8}{3} + 81$$

$$\int_{-1}^1 p' \cdot q' dx + p(3)q(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 11 & 27 \\ 9 & 27 & \frac{251}{3} \end{pmatrix} = B$$

Nota bene: se devo fare $\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \rangle$, basta calcolare

$$(a_1, b_1, c_1) B \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

③ Determinare una base Sylvestrizzante

Intanto occorre calcolare la segnatura, ad esempio con Sylvester 1-2-3

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 2$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = \text{supponiamo venga } > 0$$

$$\underbrace{++}_{PP} + = +++$$

↑
controllare con un programma

A quel punto basta ortonormalizzare la base canonica con GS.

— 0 — 0 —

$$\boxed{AB},$$

$$\boxed{AB + BA},$$

$$\text{Tr}(AB),$$

$$\text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B),$$

$$\text{Tr}(A^t B),$$

$$\text{Tr}(AB^t),$$

NON HANNO SENSO

Quali di queste espressioni definiscono un prod. scalare nello spazio delle matrici 2×2 .

$$\text{Esaminiamo } \langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$$

Non è per niente ovvio che sia simmetrica.

Conto bonino

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & * \\ * & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(AB) = a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_4 \quad \text{e questa è simmetrica, oltre che ovviamente lineare.}$$

Oss. È la stessa di dire che $a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_4$ definisce un prod. scalare in $\mathbb{R}^4$ fra i vettori

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

Qual è la matrice associata al prod. scalare?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow v_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la segnatura.

1° modo Sylvester 1-4- e poi va male per forza :)

Vediamo se lo salviamo...

$\text{Det } 4 \times 4 = 1 \cdot (-1) = -1$. Le possibilità sono

+++ -

+ - - -

Il Sylvester 1-4 ci dice che la forma ristretta a

$\text{Span}(v_1, v_4)$

è definita positiva, quindi esiste un s.sp. di dim. 2 in

cui è def. positiva, quindi ci sono almeno due +, quindi

+++ -

2° modo Pensiamo alla forma quadratica e completiamo i □

$$q(x, y, z, w) = x^2 + w^2 + 2yz$$

$$= x^2 + w^2 + \left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$$

da cui la segnatura +++ -.

Trovare una base Sylvestrizzante.

Cerco v t.c. $q(v) < 0$, ad esempio $(x, y, z, w) = (0, -1, 2, 0)$
Questo corrisponde alla matrice

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo l'ortogonale di w_1 . Basicamente risolvo

$$(x, y, z, w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x, y, z, w) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2y - z = 0$$

L'ortogonale di w_1 è

$$\text{Span}((0, 1, 2, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$$

$\underbrace{\quad}_{w_2} \quad \underbrace{\quad}_{w_3} \quad \underbrace{\quad}_{w_4}$

Non mi resta che ortogonalizzare w_2, w_3, w_4 , ad esempio con GS. In questo caso fortunato può essere che siano già ortogonali. Se lo sono, abbiamo una base ortogonale

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando questa base la matrice associata diventa

$$\begin{pmatrix} \text{neg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{pos} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{pos} \end{pmatrix}$$

— 0 —

Dividendo per numeri opportuni possiamo avere
neg = -1
pos = 1

$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$ è un prod. scalare

SI $\rightarrow$ simmetrico

$\rightarrow$ Lineare nelle due variabili

Espressione

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = (a_1 + a_4)(b_1 + b_4) = a_1 b_1 + a_4 b_4 + a_1 b_4 + a_4 b_1$$

Matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguente

Gli autovalori sono 0, 0, 0, 2

(ranko = 1 $\rightarrow$ Dim(ker) = 3 $\rightarrow$ $\lambda = 0$ è autovalore con
mg(0) = 3 e poi Tr = 2)

Potremmo anche "completare i quadrati"

$$q(x, y, z, w) = x^2 + w^2 + 2xw = (x+w)^2$$

Base Simmetrizzante

In questo caso possiamo anche usare gli autovettori

$$(0, 1, 0, 0) \quad (0, 0, 1, 0) \quad (1, 0, 0, -1) \quad (1, 0, 0, 1)$$

A questo punto basta riscriverli come matrici.

$$\begin{pmatrix} - & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 52

Note Title

06/12/2022

Trasformazioni affini

Una trasformazione affine in $\mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 vettore matrice vettore
 n dim $n \times n$ n dim

In $\mathbb{R}^2$ una trasformazione affine dipende da 6 parametri

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

Esercizio

3. Consideriamo le seguenti condizioni:

$$f(1,1) = (1,2), \quad f(0,-4) = (2,1), \quad f(1,-1) = (2,0).$$

- Dimostrare che esiste un'unica affinità $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni precedenti. Determinare esplicitamente tale affinità.
- Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$.
- Determinare la retta che ha come immagine la retta $y = 2x - 1$.

(a) Versione bionia Uso l'espressione di sopra e cerco di calcolare a, b, c, d, e, f

$$\begin{cases} a+b+e = 1 \\ c+d+f = 2 \\ -4b+e = 2 \\ -4d+f = 1 \\ a-b+e = 2 \\ c-d+f = 0 \end{cases}$$

Nel risolvere cerco di eliminare le e e le f

$$1^a - 3^a = a + 5b = -1 \quad a = \frac{3}{2}$$

$$1^a - 5^a = 2b = -1 \quad \leadsto b = -\frac{1}{2}$$

$$2^a - 4^a = c + 5d = 1 \quad c = -4$$

$$2^a - 6^a = 2d = 2 \quad \leadsto d = 1$$

$$6^a : f = d - c = 5$$

$$5^a : e = 2 + b - a = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Conclusione: l'affinità è

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5\right)$$

Verifica: sostituisco $(1, 1), (0, -4), (1, -1)$

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2)$$

$$(0, -4) \rightarrow (2, 1)$$

$$(1, -1) \rightarrow (2, 0) \quad \text{😊}$$

Osservazione strategica Se siamo in $\mathbb{R}^m$ e diamo $m+1$ condizioni del tipo

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \dots, \quad f(v_{m+1}) = w_{m+1}$$

Allora se i vettori $v_1 - v_{m+1}, v_2 - v_{m+1}, \dots, v_m - v_{m+1}$ sono lin. indip., allora l'affinità con le propr. richieste esiste ed è unica.

Dim Deve succedere che $Av_1 + b = w_1$

$$Av_2 + b = w_2$$

$$\vdots$$

$$Av_{m+1} + b = w_{m+1}$$

Sottraggo l'ultima alle prime n

$$A(v_1 - v_{m+1}) = w_1 - w_{m+1}$$

$$A(v_2 - v_{m+1}) = w_2 - w_{m+1}$$

$$\vdots$$

$$A(v_m - v_{m+1}) = w_m - w_{m+1}$$

se ne sono
andati tutti i b !!

Per il teorema di struttura A esiste ed è unica.

Trovato A , con una qualunque equazione trovo b .

(a) Versione astuta

$$v_1 = (1, 1)$$

$$v_2 = (0, -4)$$

$$v_3 = (1, -1)$$

$$v_1 - v_3 = (0, 2)$$

$$v_2 - v_3 = (-1, -3)$$

sono lin.
indip.
↓
esiste ed è
unica

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$

1° metodo Superbriviso. Scelgo due punti P e Q della retta

$$P = (0, -1) \quad Q = (1, 1)$$

Calcolo le loro immagini

$$f(P) = \left(\frac{1}{2}, 4 \right) \quad f(Q) = (1, 2)$$

La nuova retta è quella che passa per $f(P)$ e $f(Q)$

$$(1, 2) + t \left(-\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$(1, 2) + t (-1, +4) = \underbrace{(1-t)}_x, \underbrace{2+4t}_y$$

$$t = 1-x \quad y = 2+4(1-x) = 2+4-4x = 6-4x$$

$$y = 6-4x$$

2° modo SLOGAN: le parametriche vanno bene avanti!

Scrivo la retta $y = 2x - 1$ in parametrica

$$(0, -1) + t(1, 2) = (t, -1+2t)$$

Sostituisco questa parametrica nella formula per $f(x, y)$

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

$$\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}(-1+2t), -4t -1+2t+5 \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \right)}_x, \underbrace{-2t+4}_y$$

Quella ottenuta è la parametrica della retta immagine. Se voglio, torno in canonica

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \rightsquigarrow t = 2x-1 \rightsquigarrow y = -2t+4 = -4x+2+4 = 6-4x \rightsquigarrow y = 6-4x$$

Osservazione Vale per ogni retta in ogni dimensione.

Quindi in $\mathbb{R}^n$ se

$$f(x) = Ax + b$$

e la retta è $v_0 + t v_1$

allora l'immagine è

$$f(v_0 + t v_1) = A(v_0 + t v_1) + b = t A v_1 + \underbrace{(A v_0 + b)}_{\text{nuovo pto base}}$$

↑
nuova direzione

Il pto base si trasforma usando tutta l'affinità, compreso il b, la direzione solo con la matrice.

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5\right)$$

Determinare la controimmagine della retta $y = 2x - 1$

1° modo Bovino. Prendo i soliti due punti, ad esempio

$$P = (0, -1) \quad Q = (1, 1)$$

e cerco punti P_1 e Q_1 t.c. $f(P_1) = P$ e $f(Q_1) = Q$

A quel punto scrivo la retta $P_1 Q_1$,

Come trovo P_1 ? Lo cerco del tipo $P_1 = (x, y)$ e risolvo

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -4x + y + 5 = -1 \end{cases}$$

Stessa cosa per $Q_1 \rightarrow$ fine i conti per esercizio

2° modo Le cartesiane vanno bene indietro!

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5\right)$$

Se voglio che l'immagine soddisfi $y = 2x - 1$

sostituisco le due componenti dell'espressione in questa equazione

$$\boxed{-4x+y+5} = 2 \boxed{\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right)} - 1$$

2^a componente 1^a componente

$$-4x+y+5 = 3x-y-1$$

$$2y = 7x-6$$

$$\boxed{y = \frac{7}{2}x - 3}$$

Per verifica, proviamo a calcolare l'immagine di questa retta

$$y = \frac{7}{2}x - 3 \rightsquigarrow \text{in parametrica } (0, -3) + t(2, 7) = (2t, -3+7t)$$

Sostituisco nell'espressione dell'affinità

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5\right)$$

$$\text{e trovo } \left(3t + \frac{3}{2} - \frac{7}{2}t, -8t - 3 + 7t + 5\right) = \left(-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, -t + 2\right)$$

$$\text{Torno in cartesiana } x = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \rightsquigarrow t = 3 - 2x$$

$$y = -t + 2 = -3 + 2x + 2 = 2x - 1$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 53

Note Title

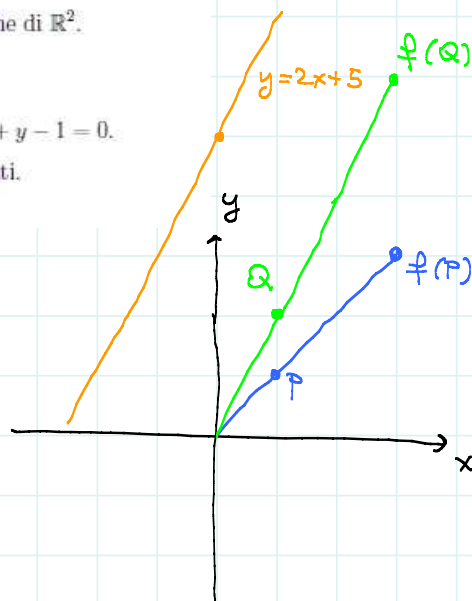
06/12/2022

5. (Omotetie rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$)

- (a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$.
 (b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.
 (c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y = 2x, \quad y = 2x + 5, \quad y = -2x + 3, \quad x + y - 1 = 0.$$

- (d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.
 (e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.



(a) $f(x, y) = (3x, 3y)$

(b) Punti fissi vuol dire risolvere

$$f(x, y) = (x, y)$$

cioè

$$(3x, 3y) = (x, y) \leadsto x = y = 0$$

$\leadsto$ solo l'origine resta fissa

(c) Immagine della retta $y = 2x + 5$

Parametrica $(0, 5) + t(1, 2) = (t, 5 + 2t)$

$$f(t, 5 + 2t) = (3t, 15 + 6t) = (0, 15) + t(3, 6) \\ = (0, 15) + t(1, 2)$$

Immagine è $y = 2x + 15$

(d) Determinare quale retta ha come immagine $x + y - 1 = 0$.

Al posto di x e y scrivo l'espressione di $f(x, y)$ cioè $3x$ e $3y$

$$3x + 3y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{3} - x$$

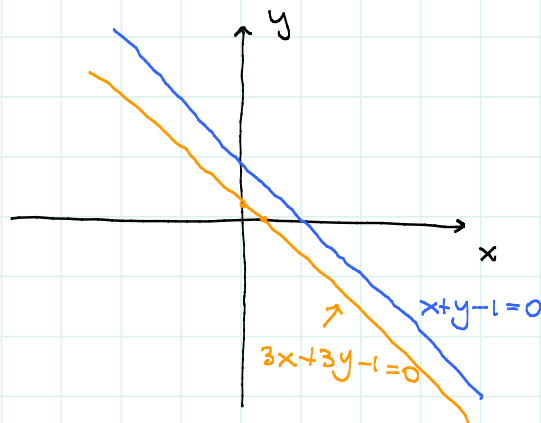
(e) Immagine della circ.

$$x^2 + y^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Centro: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ raggio: $\frac{3}{2}$



La circ. immagine avrà centro in $\varphi\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{9}{2}, 0\right)$
e raggio = triplo del raggio, cioè $\frac{9}{2}$

L'equazione è $(x - \frac{9}{2})^2 + y^2 = \frac{81}{4} \rightsquigarrow \boxed{x^2 - 9x + y^2 = 0}$

6. (Omotetie rispetto ad un punto qualunque di $\mathbb{R}^2$)

(a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto al punto $(2, -1)$ di $\mathbb{R}^2$.

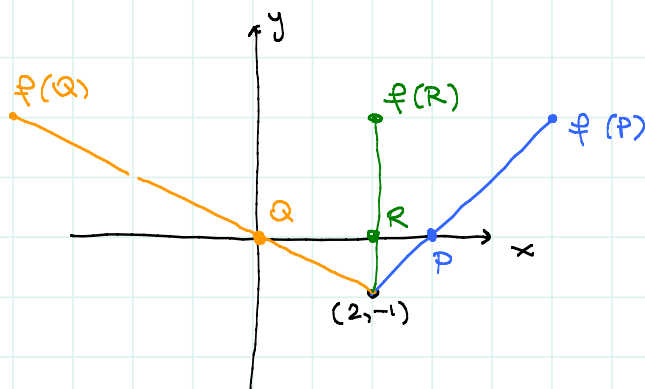
(b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.

(c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y = 2x, \quad y = 2x + 5, \quad y = -2x + 3, \quad x + y - 1 = 0.$$

(d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.

(e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.



Strategia generale: Sia P_0 il centro dell'omotetia, e sia P generico

$$P \rightsquigarrow \underbrace{P - P_0}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{applicato in } P_0 \\ \text{con la freccia} \\ \text{in } P \\ \text{(è come mettere} \\ \text{l'origine in } P_0)}} \rightsquigarrow \underbrace{3(P - P_0)}_{\substack{\text{triplo del} \\ \text{precedente}}} \rightsquigarrow 3(P - P_0) + \underbrace{P_0}_{\substack{\text{è come rimettere} \\ \text{l'origine a posto}}}$$

Nell'esempio specifico $P_0 = (2, -1) \quad P = (x, y)$

$$\begin{array}{ccccccc} (x, y) & \rightarrow & (x-2, y+1) & \rightarrow & (3x-6, 3y+3) & \rightarrow & (3x-4, 3y+2) \\ P & & P-P_0 & & 3(P-P_0) & & \end{array}$$

L'espressione finale è $\boxed{\varphi(x, y) = (3x-4, 3y+2)}$

$$P = (3, 0) \rightsquigarrow f(P) = (5, 2)$$

$$Q = (0, 0) \rightsquigarrow f(Q) = (-4, 2)$$

Cerco la controimmagine di $y = -2x + 3$

le cartesiane vanno indietro!

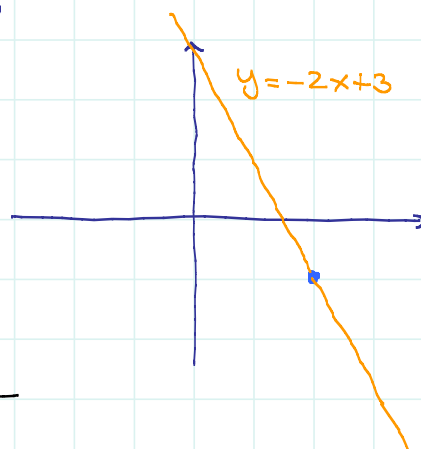
$$3y + 2 = -2(3x - 4) + 3$$

$$3y + 2 = -6x + 11$$

$$y = -2x + 3$$

È ragionevole che sia venuta la stessa?

Certo, perché la retta passa per il centro dell'omotetia!



— o — o —

ISOMETRIE: affinità con matrice A ortogonale

Teorema Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ conserva le distanze, cioè

$$\text{dist}(f(v), f(w)) = \text{dist}(v, w)$$

per ogni v e w , allora f è un'affinità con matrice A ortogonale.

Isometrie del piano Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali?

La prima colonna deve essere un vettore di lunghezza 1, cioè deve stare sulla circ.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & * \\ \sin \theta & * \end{pmatrix}$$

trigonometrica, quindi è del tipo

$$(\cos \theta, \sin \theta) \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

La seconda colonna deve avere sempre
lunghezza = 1 ed essere ortogonale
alla prima.

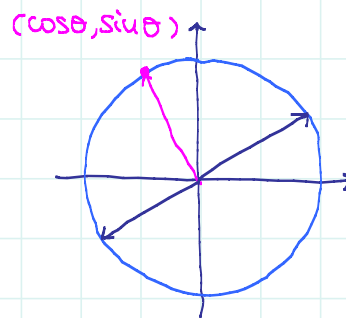
Ci sono quindi solo due possibilità

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\det = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\det = -1$



Al variare di θ sono tutte le possibili matrici 2×2 ortogonali

Chi sono gli autovalori di queste matrici?

Seconda $\det = -1$ $\text{Tr} = 0$ Autovalori $\lambda = \pm 1$

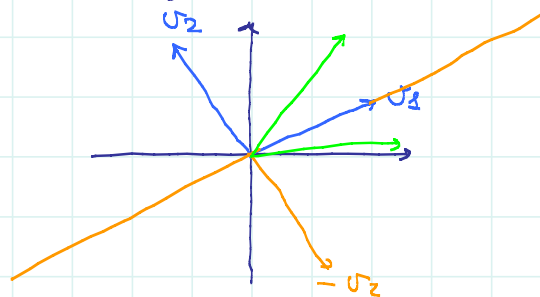
Matrice simmetrica $\leadsto$ autovettori ortogonali

$$Av_1 = v_1$$

$$Av_2 = -v_2$$

$\leadsto$ Simmetria rispetto alla retta

$\text{Span}(v_1)$



Prima $\det = 1$ $\text{Tr} = 2\cos \theta$

Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\cos \theta \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$$

numero negativo

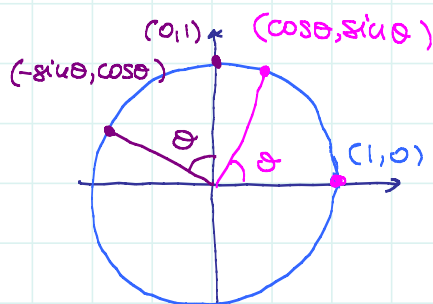
$= \cos \theta \pm i \sin \theta = \text{autovalori complessi coniugati}$

$\leadsto$ è la Jordan reale di se stessa!

Come agisce?

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Le prime matrici sono matrici di rotazione

Le seconde matrici sono matrici di simmetria

Cosa succede quando compongo due affinità

$$f_1(x) = A_1x + b_1$$

$$f_2(x) = A_2x + b_2$$

$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &= A_2 f_1(x) + b_2 \\ &= A_2 (A_1x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2 A_1} x + A_2 b_1 + b_2 \end{aligned}$$

Morale: sto componendo le due matrici

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

—

LEZIONE 54

Note Title

09/12/2022

- (1) traslazione di vettore $(3, -1)$,
- (2) simmetria rispetto all'asse x ,
- (3) simmetria rispetto all'asse y ,
- (4) rotazione di 90° in senso orario rispetto all'origine,
- (5) simmetria rispetto alla retta $x = -8$,
- (6) simmetria centrale rispetto al punto $(3, 4)$,
- (7) simmetria rispetto alla retta $y = x$,

$$(1) \quad (x, y) \rightarrow (x+3, y-1)$$

$$(2) \quad (x, y) \rightarrow (x, -y)$$

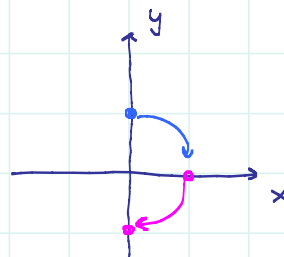
$$(3) \quad (x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$(4) \quad f(1, 0) = (0, -1)$$

$$f(0, 1) = (1, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

↑
rotazione di θ in senso
antiorario

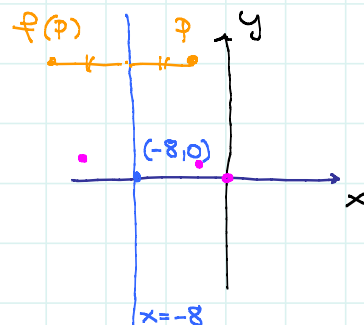


(5) simmetria rispetto retta $x = -8$

$$P_0 = (-8, 0)$$

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow g(P - P_0) + P_0$$

↑
simul.
asse y



$$(x, y) \rightsquigarrow (x+8, y) \rightsquigarrow (-x-8, y) \rightsquigarrow (-x-16, y)$$

Espressione finale $(x, y) \rightarrow (-x-16, y)$

Qualche verifica: $(0, 0) \rightarrow (-16, 0)$

$(-2, 1) \rightarrow (-14, 1)$

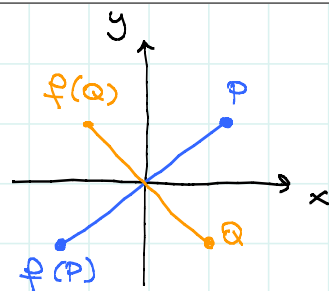
↑ è ragionevole che
l'espressione non tocchi
la y

(6) Simmetria centrale rispetto p to $(3,4)$

(6-) " " " " $(0,0)$

$$(x,y) \rightarrow (-x,-y)$$

↑ rotazione di 180°
risp. all'origine



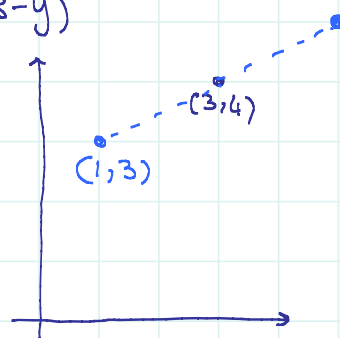
Rispetto a $P_0 = (3,4)$:

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow g(P - P_0) + P_0$$

↑ risp. all'origine

$$(x,y) \rightarrow (x-3, y-4) \rightsquigarrow (3-x, 4-y) \rightsquigarrow (6-x, 8-y)$$

$$f(1,3) = (5,5)$$



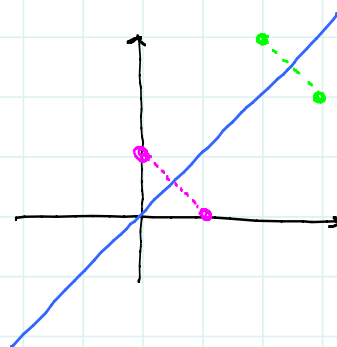
(7) Simmetria rispetto retta $y=x$

$$f(1,0) = (0,1)$$

$$f(0,1) = (1,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y,x)$$



Simmetria rispetto alla retta $ax+by=0$

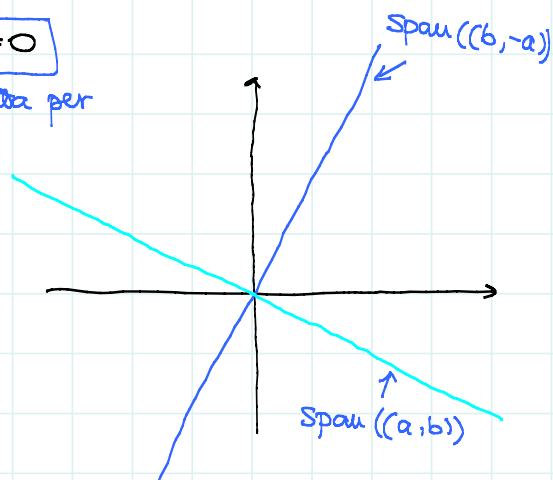
generica retta per
l'origine

Dove succedere che

$$f(a,b) = (-a,-b)$$

$$f(b,-a) = (b,-a)$$

↑ la retta deve
stare fissa



Si può dire che $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (b, -a)$ (sono una base di $\mathbb{R}^2$)

$$f(v_1) = -v_1$$

$$f(v_2) = +v_2$$

Quindi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice della simmetria dalla $\{v_1, v_2\}$ alla $\{v_1, v_2\}$

$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cambia base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

Quindi

$$M \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

è la simmetria richiesta!

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}}$$

simmetria rispetto alla
retta $ax + by = 0$

↑
è del tipo $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

(8) Caso speciale $y = 2x$ ($2x - y = 0$)

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right)$$

Verifica: cerchiamo i pti fissi di f

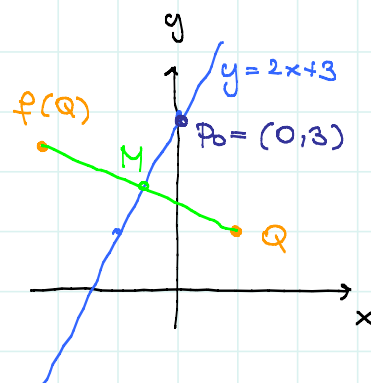
$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{☺}$$

Oss. Per calcolare la matrice c'era anche il metodo bonvino ☺

Simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 3$

Prendo un pto comodo sulla retta, ad es.

$$P_0 = (0, 3)$$



$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow P_0 + g(P - P_0)$$

↑ simmetria
risp. a $y = 2x$

$$(x, y) \rightarrow (x, y - 3) \rightarrow \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{9}{5}\right)$$

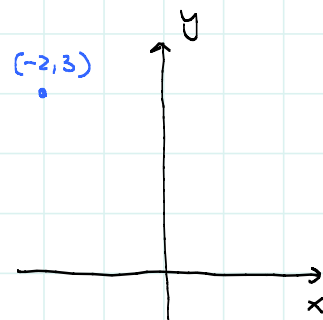
$$\rightarrow \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}\right)$$

Esperimento: $Q = (1, 1) \rightsquigarrow f(Q) = \left(-\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$

Il pto medio del segmento tra Q e $f(Q)$ è $\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right) = M$
Stara' sulla retta?

$$y = 2x + 3 \quad \frac{9}{5} = -\frac{6}{5} + 3 \quad \text{☺}$$

(11) rotazione di 30° in senso antiorario rispetto al punto $(-2, 3)$,



Rotazione di 30° antiorario risp. origine

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Solita storia

$$(x, y) \rightarrow (x+2, y-3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

aggiungo $\nearrow$

$$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$(-2, 3)$

Verifica che, per esempio, $(-2, 3)$ sia l'unico p.to fisso.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 55

Note Title

09/12/2022

Data un'espressione, come capisco di cosa si tratta?

$$f(v) = Av + b \quad v \in \mathbb{R}^2$$

- Se $A = \lambda Id$, allora si tratta di una OMOTETIA, rispetto all'unico p.to fisso che trovo risolvendo $f(v) = v$

- Se A è una matrice ORTOGONALE, allora è una isometria.

Quale? Dipende dall'insieme dei p.ti fissi

→ p.ti fissi = tutto $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow f = \text{identità}$

→ p.ti fissi = 1 retta $\rightsquigarrow f = \text{simmetria rispetto alla retta}$

→ p.ti fissi = 1 solo p.to $P \rightsquigarrow f = \text{rotazione risp. a quel p.to } P$

→ p.ti fissi = $\emptyset \rightsquigarrow$ ci sono due casi

* traslazione di un certo vettore b ($f(v) = v + b$ con $b \neq 0$)

* simmetria rispetto ad una retta seguita da una traslazione di un vettore b parallelo alla direzione retta.

↑ La matrice A ha $\det = -1$ perché è una matrice di simm.

— 0 — 0 —

$$(2x + 5, 2y - 7),$$

①

$$(-2x + 5, -2y - 7),$$

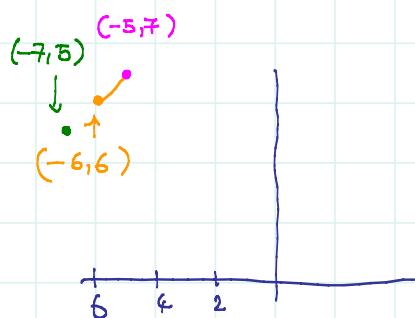
②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
omotetia di fattore 2

$$\begin{cases} 2x + 5 = x & x = -5 \\ 2y - 7 = y & y = 7 \end{cases}$$

$$(-6, 6) \rightarrow (-7, 5)$$



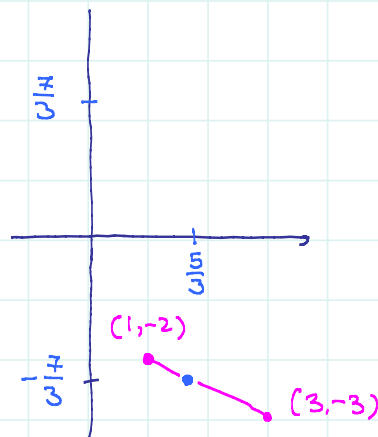
$$(2x+5, 2y-7), \quad (-2x+5, -2y-7),$$

②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
simmetria di
fattore -2

P.to fisso: $\begin{cases} -2x+5 = x \\ -2y-7 = y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{matrix}$



$$(1, -2) \rightarrow (3, -3)$$

②

$$(7+x, 3+y),$$

$$\uparrow$$

$$(x, y) + (7, 3)$$

Traslazione

$$(7+x, 3-y),$$

$$\uparrow$$

P.ti fissi

$$7+x = x$$

$$3-y = y$$

NO SOLUZIONI

↓
simmetria seguita
da traslazione

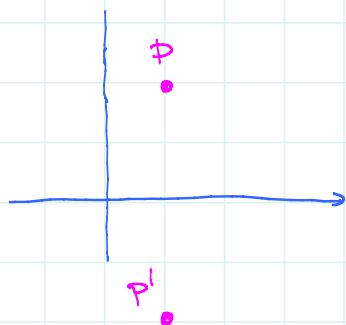
$$(7-x, 3+y),$$

↑
stessa cosa, solo
ad assi
invertiti

$$\textcircled{2} \quad \overset{P}{(x, y)} \xrightarrow{\quad} \overset{P'}{(x, -y)} \rightarrow \overset{f(P)}{(x, -y) + (7, 3)}$$

↑
simmetria
rispetto
asse x

↑
componente non
nulla rispetto
all'asse x



~ x finale $\neq$ x iniziale

$$(7-x, 3-y),$$

①

$$(7+y, 3+x),$$

$$(7+y, 3-x),$$

① Vediamo i p.ti fissi

$$\begin{cases} 7-x = x \\ 3-y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

P.to fisso unico $\Rightarrow$ rotazione

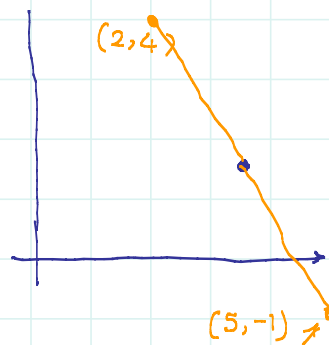
Di che angolo e in che verso?

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \sim \theta = 180^\circ$$

Quindi in realtà è la simmetria centrale rispetto a $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

$$(2, 4) \rightarrow (5, -1)$$

② $(7+y, 3+x)$

P.ti fissi

$$\begin{cases} 7+y = x \\ 3+x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 7 \\ x-y = -3 \end{cases}$$

Nessun p.to fisso e non è una traslazione,
quindi è una simmetria rispetto ad una retta seguita
da una traslazione che distrugge i p.ti fissi

La simmetria che ci sta sotto è $(x, y) \rightarrow (y, x)$, cioè
rispetto alla retta $y=x$.

$$\textcircled{3} \quad (7+y, 3-x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

P.ti fissi

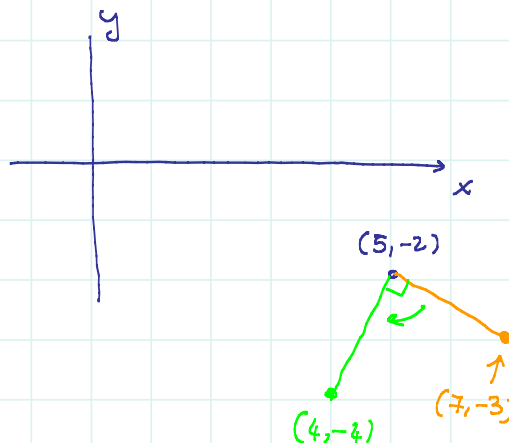
$$\begin{cases} 7+y = x \\ 3-x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 7 \\ x+y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow \text{rotazione intorno a } (5, -2)$$

Di quale angolo?

$$\text{Matrice} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = -90^\circ \text{ antiorario} \\ = 90^\circ \text{ orario}$$

$$(7, -3) \rightarrow (4, -4)$$



$$\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

↑ ↑

Non è una matrice ortogonale, perché le colonne non sono ortogonali
 $\Rightarrow$ NON è una isometria!

$$\left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vdots + \vdots$$

↑ ↑
 No matrice ortogonale

$$\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La matrice è ortogonale, quindi è una isometria!

↑

e avendo $\det = -1$, per forza
 è una matrice di simmetria

Cerco i p.ti fissi

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Non ci sono soluzioni.

- (a) prima la traslazione di vettore (x_0, y_0) e poi la traslazione di vettore (x_1, y_1) ,
- (b) prima la simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) e poi la simmetria centrale rispetto al punto (x_1, y_1) ,
- (c) prima la simmetria rispetto ad una retta e poi nuovamente la simmetria rispetto alla stessa retta,

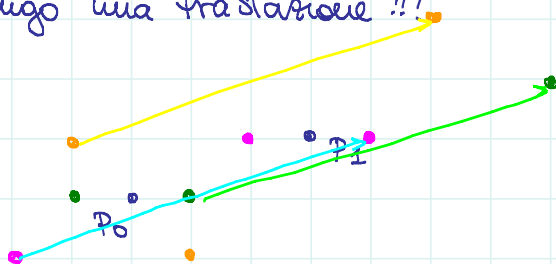
(a) $f(v) = v + b_0$

$g(v) = v + b_1$

$g(f(v)) = f(v) + b_1 = v + \underline{b_0 + b_1}$

traslazione della
somma

(b) Otengo una traslazione !!!



$f(v) = -v + b_0$

$g(v) = -v + b_1$

$g(f(v)) = -f(v) + b_1$

$= v - b_0 + b_1$

$= v + (b_1 - b_0)$

Se voglio sapere di cosa traslo, basta vedere che succede a P_0

→ al primo passo sta fermo

→ al secondo passo gli viene aggiunto $2(P_1 - P_0)$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 56

Note Title

13/12/2022

ISOMETRIE DELLO SPAZIO

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$ matrice ortogonale 3×3
 $\uparrow$ vettori di $\mathbb{R}^3$

- Domande:
- ① Data una descrizione geom., trovare l'espressione
 - ② Data un'espr., capire se è isometria e come è fatta

Classificazione sulla base dei p.ti fissi

① Fissi = tutto $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow f(x) = x$

② Fissi = un piano $\rightsquigarrow f(x) = \text{simmetria rispetto al piano}$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

③ Fissi = una retta $\rightsquigarrow f(x) = \text{rotazione di un angolo } \theta \text{ rispetto alla retta}$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ Fissi = singolo p.to $\rightsquigarrow f(x) = \text{rotazione risp. ad una retta seguita da simmetria rispetto piano } \perp \text{ alla retta}$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Il p.to fisso è l'intersezione tra retta e piano)

[5] Fissi = insieme vuoto. Allora si aprono 3 scenari

[5.1] $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$ (traslazione)

($A =$ matrice identica)

[5.2] $f(x) =$ simmetria risp. ad un piano seguita da traslazione
con componente non nulla $\parallel$ al piano

($A =$ matrice di simm., quindi autovalori $+1, +1, -1$)

[5.3] $f(x) =$ rotazione risp. ad una retta seguita da traslazione
con componente non nulla $\parallel$ alla retta

($A =$ matrice di rotazione, quindi autovalori $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$)

— 0 — 0 —

(1) traslazione di vettore $(3, -1, 5)$,

(2) simmetria rispetto al piano xy , piano che contiene asse x e asse y , cioè
piano $z = 0$

(3) simmetria rispetto al piano yz ,

(4) simmetria rispetto al piano $z = 3$,

(5) simmetria rispetto al piano $x = -5$,

$$(1) (x, y, z) \rightarrow (x+3, y-1, z+5)$$

$$(2) (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$$

$$(3) (x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$$

$$(4) P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow \text{simmetria} \rightsquigarrow \text{aggiungo } P_0$$

$$\text{Prendo } P_0 = (0, 0, 3) \text{ (p.to del piano)}$$

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x, y, z-3) \rightsquigarrow (x, y, 3-z) \rightsquigarrow (x, y, 6-z)$$

$\uparrow$
simmetria risp.
piano $z=0$

[Verifica: chi sono i p.ti fissi? $6-z = z \rightsquigarrow 2z = 6 \rightsquigarrow z = 3 \checkmark$]

Osservazione Potrei usare un qualunque altro P_0 e piano, ad es.

$$P_0 = (2, -1, 3)$$

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x-2, y+1, z-3) \rightsquigarrow (x-2, y+1, 3-z) \rightsquigarrow (x, y, 6-z)$$

$\uparrow$
 $P-P_0$

$\uparrow$
simm. risp. $z=0$

$\uparrow$
aggiungo P_0

$$(5) \quad P_0 = (-5, 0, 0)$$

$$(x, y, z) \xrightarrow{P} (x+5, y, z) \xrightarrow{P-P_0} (-x-5, y, z) \xrightarrow{\text{Simul. risp. piano } x=0} (-x-10, y, z) \xrightarrow{\text{aggiungo } P_0}$$

(6) simmetria rispetto al piano $y = 3$ seguita da simmetria rispetto al piano $z = -2$,

(7) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$,

(6) Simmetria piano $y = 3$:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, z) \quad (\text{come prima})$$

Simmetria piano $z = -2$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z)$$

Se faccio la prima e poi la seconda ottengo

$$(x, y, z) \xrightarrow{\uparrow 1^a} (x, 6-y, z) \xrightarrow{\uparrow 2^a} (x, 6-y, -4-z)$$

(7) Se le compongo in ordine inverso

$$(x, y, z) \xrightarrow{\uparrow 2^a} (x, y, -4-z) \xrightarrow{\uparrow 1^a} (x, 6-y, -4-z)$$

(È venuto come il (6), ma non succede sempre)

Domanda: come è fatta l'isometria $(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, -4-z)$?

Cerco i pti fissi risolvendo

$$\begin{cases} x = x \\ 6-y = y \\ -4-z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{le soluzioni sono } (t, 3, -2) = \\ &= (0, 3, -2) + t(1, 0, 0) \\ &= \text{retta // all'asse } x \end{aligned}$$

La trasformazione è una rotazione intorno alla retta trovata.

Di che angolo? Guardiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \leftarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \cos\theta = -1, \text{ quindi } \theta = 180^\circ$$

- (8) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$, seguita a sua volta da simmetria rispetto al piano $x = 1$,
 (9) simmetria centrale rispetto al punto $(-1, 3, 4)$,

Simm. $z = -2$: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z)$

Simm. $y = 3$: $(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, z)$

Simm. $x = 1$: $(x, y, z) \rightarrow (2-x, y, z)$

Componendo:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z) \rightarrow (x, 6-y, -4-z) \rightarrow (2-x, 6-y, -4-z)$$

Di cosa si tratta?

Se calcolo i p.ti fissi ottengo $(x, y, z) = (1, 3, -2)$ quindi unico p.to fisso.

Si tratta di una simmetria centrale risp. al p.to $(1, 3, -2)$.

(è un caso molto particolare di rotazione intorno ad un asse, seguita da simm. risp. piano perpendicolare.

Matrice $A = -Id$)

(9) $P_0 = (-1, 3, 4)$

$$(x, y, z) \xrightarrow{P} (x+1, y-3, z-4) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{simm. centrale} \\ \text{risp. all'origine}}} (-x-1, 3-y, 4-z)$$

$$\xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo} \\ P_0}} (-2-x, 6-y, 8-z)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 57

Note Title

13/12/2022

(10) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 0$, ← passa per l'origine(11) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 5$,

(10) Idea: il piano va in se stesso

l'ortogonale al piano va in -se stesso

$$\text{Piano} = \text{Span}(\underbrace{(-2, 1, 0)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(3, 0, 1)}_{\vec{v}_2})$$

Scego v_3 ortogonale a v_1 e v_2

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (1, 2, -3) \quad [\text{Verifica a occhio}]$$

Stiamo cercando una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ b.c.

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = v_2 \quad f(v_3) = -v_3$$

La sua matrice dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla stessa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se voglio la matrice dalla canonica alla canonica considero

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

← compreso il -1
cambio base dalla
canonica alla
 $\{v_1, v_2, v_3\}$

Se all'inizio partissi con una base ortonormale, il calcolo dell'inversa sarebbe più semplice.

Come posso ottenere una base ortogonale a partire da $\{v_1, v_2, v_3\}$?
(Sarebbe sempre che piano = $\text{Span}(v_1, v_2)$)

1° modo: GS

2° modo: Ricalcolo v_2 usando la formula misteriosa su v_1 e v_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \hat{v}_2 = (-3, -6, -5) \quad [\text{Verifica a occhio}]$$

Questa nuova la posso ortonormalizzare

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0) \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} (3, 6, 5) \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, -3)$$

Posso usare come matrice di cambio base $(\hat{v}_1 | \hat{v}_2 | \hat{v}_3)$
e in questo modo $M^{-1} = M^t$

[Controllare che nei 2 modi venga uguale].

(11) Simm. risp. piano $x + 2y - 3z = 5$

Scelgo un p.to P_0 del piano, ad esempio $P_0 = (1, 2, 0)$
e faccio il solito proc.

$$(x, y, z) \rightarrow (x-1, y-2, z) \rightarrow A(x-1, y-2, z) \rightarrow A(\dots) + (1, 2, 0)$$

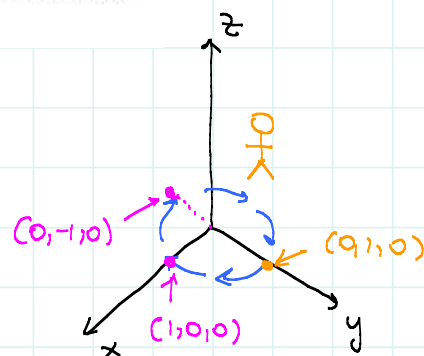
$\uparrow$
 simm. del
 p.to precedente

(12) rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z ,

La rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di un angolo θ
 ANTICLOCKWISE per
 l'omino in figura
 intorno all'asse z



Visto che a noi serviva in senso orario, bisogna usare $\theta = -90^\circ$ quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (y, -x, z)$$

[Verifica: $f(1,0,0) = (0,-1,0)$
 $f(0,1,0) = (1,0,0)$
 $f(0,0,1) = (0,0,1) \quad \ddot{\smile} \quad]$

Calcolare l'immagine del piano $x - 2y + 4z = 7$

Passo il piano in parametrica

$$(7, 0, 0) + t(2, 1, 0) + s(4, 0, -1) = \underline{(7+2t+4s, t, -s)}$$

Verifica!

$$(7+2t+4s, t, -s) \rightarrow (t, -7-2t-4s, -s)$$

$$= (0, -7, 0) + t(1, -2, 0) + s(0, 4, 1)$$

si può fare $\ddot{\smile}$

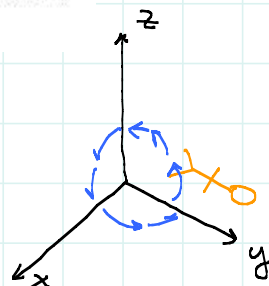
Volevo posso tornare in cartesiana

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (-2, -1, 4) \rightsquigarrow \boxed{2x + y - 4z = -7}$$

— 0 — 0 —

(13) rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y ,

$$\begin{array}{l} f(1,0,0) = (0,0,-1) \\ f(0,1,0) = (0,1,0) \\ f(0,0,1) = (1,0,0) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Domanda

Come scrivo in generale la rotazione di θ in senso antiorario rispetto ad una retta

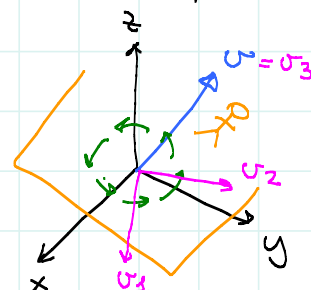
$\text{Span}(v)$

(antiorario rispetto ad un omino che sta in piedi lungo v)

Sappiamo la soluzione nel caso modello in cui $v = (0, 0, 1)$.

La soluzione è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Ora mi serve una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in cui

→ v_3 = vettore v dato

→ $\{v_1, v_2, v_3\}$ deve essere orientata come la base canonica cioè in maniera tale che v_2 diventa v_3 quando ruoto di 90° in verso antiorario.

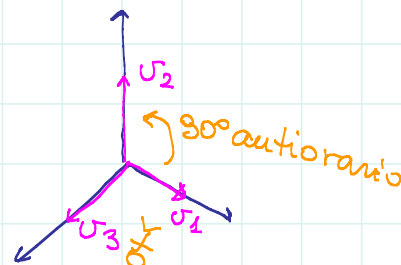
Per capire se la base è fatta bene, basta fare il Det

- Det = +1 $\leadsto$ fatta bene
- Det = -1 $\leadsto$ fatta male

Esempio $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det = 1 $\leadsto$ fatta bene



Esercizio Trovare base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta bene con
 $u_3 = (1, 2, 3)$

Prendo $u_1 = (2, -1, 0)$

Costruisco u_2 con la misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3, 6, -5) = u_2$$

Controllo il Det

$$(u_1 | u_2 | u_3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \det = 36 + 5 + 9 + 20 > 0$$

Quando divido per le norme ho base voluta.
 — 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 58

Note Title

13/12/2022

Cosa succede in $\mathbb{R}^3$ se compongo due rotazioni?

Le matrici delle due trasformazioni si compongono (moltiplicano)

$$f_1(x) = A_1 x + b_1$$

$$f_2(x) = A_2 x + b_2$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_1 A_2}_\substack{\uparrow \\ \text{nuova} \\ \text{matrice}} x + \underbrace{(A_2 b_1 + b_2)}_{\text{nuovo } b}$$

Ora A_1 e A_2 hanno $\det +1$, quindi anche $A_1 A_2$ ha $\det +1$.

Quindi la composizione può essere

→ o identità/traslazione

→ o rotazione, eventualmente seguita da traslazione

(x, y, z)
①

(y, z, x)
②

(y, x, z)
③

Di che cosa si tratta?

(1) Identità ☺

(2) $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$. Questa è lineare, cioè $f(x) = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice ortogonale}$$

$\det = 1 \leadsto$ identità (dici di no) oppure rotazione

Cerchiamo i p.ti fissi (cioè le soluzioni di $Ax = x$, cioè
l'autospazio dell'autovalore $+1$)

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \\ x = z \end{cases} \quad \text{Span}((1, 1, 1))$$

Si tratta di una rotazione intorno alla retta (t, t, t) .

Di quale angolo? Bisogna vedere gli autovalori, che saranno

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta \rightsquigarrow \theta \text{ è l'angolo}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow \theta = 120^\circ$$

$\uparrow$ $\cos \theta$ $\uparrow$ $\sin \theta$

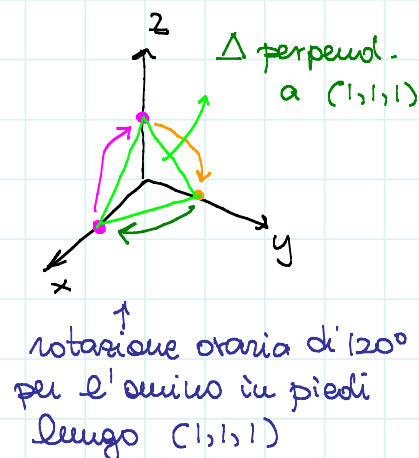
Vediamolo geometricamente

$$(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$$

$$P(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

$$P(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$P(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$



③ $(x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$

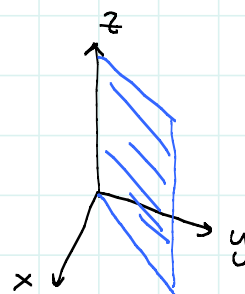
P.ti fissi

$$\begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad x - y = 0$$

$$z = t, \quad y = s, \quad x = s \quad (x, y, z) = (s, s, t) = s(1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$$

Quindi c'è un piano di p.ti fissi

$\rightsquigarrow$ simmetria rispetto al piano $x - y = 0$



Vediamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2-1)(1-\lambda) \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1)(1-\lambda) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = -1 \text{ con } m_A(1) = 2$$

Autospazio di $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Autospazio di $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}((1, -1, 0))$$

↑
perpendicolare
agli altri 2

$$-0-0-$$

$$(3-x, 5-z, 7+y)$$

Intanto è una isometria

$$f(x) = Ax + b$$

$$\uparrow (3, 5, 7)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ortogonale}$$

$$\text{Det} = -1$$

P.ti fissi

$$\begin{cases} 3-x = x \\ 5-z = y \\ 7+y = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 3 \\ y+z = 5 \\ y-z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases}$$

unico p.to fisso

~ $f(x) =$ rotazione ^{di che angolo?} rispetto ad una retta ^{quale?} seguita da
simmetria rispetto piano $\perp$ alla retta

Facciamo autovalori / autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Autovalori : $\lambda = -1$ $\lambda = \pm i = \cos \theta \pm i \sin \theta$ con $\theta = 90^\circ$

Autovettore di $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((1, 0, 0))$$

Quindi stiamo ruotando di 90° rispetto alla retta

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}, -1, 6\right)}_{\text{p.to fisso}} + t(1, 0, 0)$$

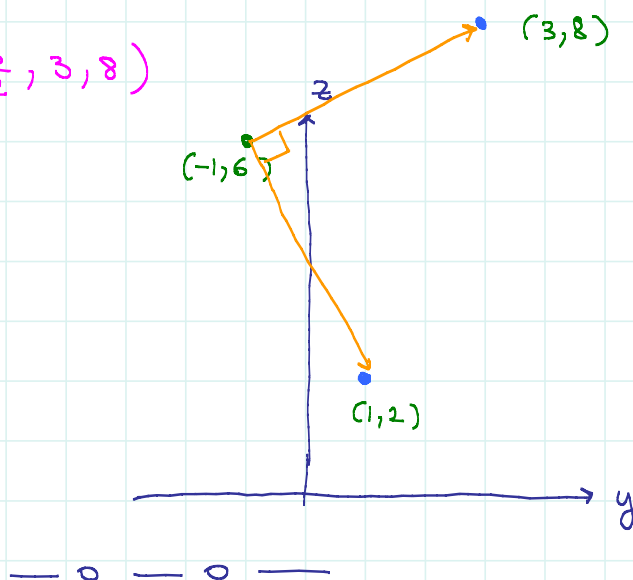
Piccola verifica: prendiamo un p.to generico della retta
 $\left(\frac{3}{2} + t, -1, 6\right)$

Dove ci aspettiamo vada a finire?

$$(3-x, 5-z, 7+y)$$

$$\left(3 - \frac{3}{2} - t, 5 - 6, 7 + (-1)\right) = \left(\frac{3}{2} - t, -1, 6\right) \quad \ddot{\smile}$$

$$f\left(\frac{3}{2}, 1, 2\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, 8\right)$$



ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 59

Note Title

16/12/2022

Distanza tra due rette sghembe nello spazio

$$r_1: (2, 1, 0) + t(1, 1, 1)$$

$$A_1 + t v_1$$

$$r_2: (1, 0, 1) + t(2, 2, 3)$$

$$A_2 + t v_2$$

Verificare che sono sghembe

→ v_1 e v_2 sono lin. indep. (sghembe o incidenti)

→ calcolo eventuali intersezioni

$$\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1+t = 2s \\ t = 1+3s \end{cases} \quad \begin{matrix} 1+1+3s = 2s \rightarrow s = -2 \\ \hookrightarrow t = -5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -3 = -3 \\ \uparrow \end{matrix}$$

In questo caso si incontrano nel punto $(-3, -4, -5)$

Cambiamole leggermente:

$$\hat{r}_1: (2, 1, 0) + t(1, 1, 1)$$

$$\hat{r}_2: (1, 0, 2) + t(2, 2, 3)$$

1° metodo per la distanza

Cerco P sulla prima retta e Q sulla seconda retta t.c.

PQ è perp. a v_1 e v_2

$$P = (2+t, 1+t, t) \quad Q = (1+2s, 2s, 2+3s)$$

$$PQ = (2+t-1-2s, 1+t-2s, t-2-3s)$$

$$\begin{cases} 1+t-2s+1+t-2s+t-2-3s = 0 \\ 2+2t-4s+2+2t-4s+3t-6-3s = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \langle P-Q, v_1 \rangle = 0 \\ \langle P-Q, v_2 \rangle = 0 \end{matrix}$$

Risolvo ~ trovo t ed s ~ trovo P e Q e poi faccio la distanza tra i 2.

Perché questo metodo funziona?

Siano P_0 e Q_0 i punti che abbiamo trovato. Posso scrivere le due rette come

$$P_0 + t v_1$$

$$Q_0 + s v_2$$

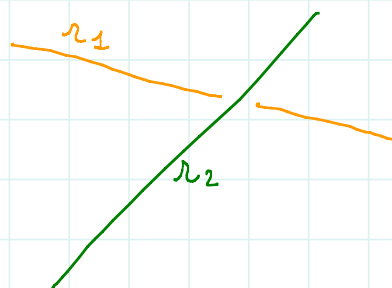
Facciamo la distanza al $\square$ tra il 1° e il 2°

$$\begin{aligned} \|P_0 + t v_1 - Q_0 - s v_2\|^2 &= \|(P_0 - Q_0) + (t v_1 - s v_2)\|^2 \\ &= \underbrace{\|P_0 - Q_0\|^2}_{\text{dist}^2(P_0, Q_0)} + \underbrace{\|t v_1 - s v_2\|^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\langle P_0 - Q_0, t v_1 - s v_2 \rangle}_{0} \\ &\geq \|P_0 - Q_0\|^2 \end{aligned}$$

$t \langle P_0 - Q_0, v_1 \rangle +$
 $s \langle P_0 - Q_0, v_2 \rangle$
 $= 0$ perché $P_0 - Q_0$ è
 $\perp$ a v_1 e v_2

2° metodo per la distanza Determino il piano che contiene la 2° retta ed è parallelo alla prima retta (o viceversa)

$$\underbrace{(1, 0, 2) + t(2, 2, 3)}_{\text{seconda retta}} + s \underbrace{(1, 1, 1)}_{\text{dir. 1ª retta}}$$



Facciamo finta che sia il piano del foglio che contiene r_2 . Ora r_1 sarà parallela, sopra o sotto, a distanza costante dal piano

La minima distanza si realizza "all'incrocio" e coincide con la distanza di r_1 da un qualunque p.to del piano

Cartesiana del piano

$$\begin{array}{ccc} * & * & = \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\leadsto (-1, 1, 0) \leadsto -x + y = -1 \leadsto \boxed{-x + y + 1 = 0}$$

Ora calcolo $\text{dist}((2,1,0), \text{piano})$

↑
qualunque p.to
prima retta

$$= \frac{|-2+1+1|}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Direbbe che sono ancora incidenti ☺
Vediamo se è vero!

$$P = (2+t, 1+t, t) \quad Q = (1+2s, 2s, 2+3s)$$

$$\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1+t = 2s \\ t = 2+3s \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3+3s = 2s \leadsto s = -3 \\ t = -7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} -5 = -5 \end{matrix}$$

e infatti sono incidenti nel p.to $(-3, -4, -5) !!!$

[Verifica che anche con il 1° metodo la soluzione del sistema era $t = -7$ e $s = -5$]

— o — o —

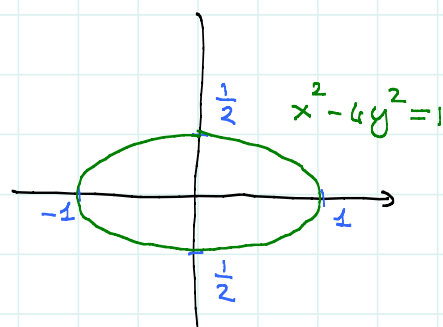
Esercizio

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Nel piano rappresenta ellisse

Domanda: cosa rappresenta

$$x^2 + 4y^2 + 2xy = 1$$



Questo è una forma quadratica
con matrice definita positiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

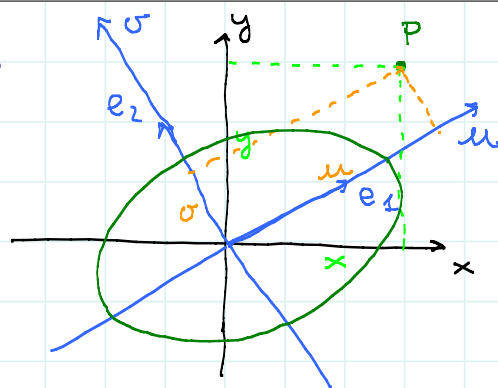
Dal teorema spettrale sappiamo che in una opportuna base ORTONORMALE la matrice diventa DIAGONALE con gli autovalori λ_1 e λ_2 positivi sulla diagonale.

Chiamiamo e_1, e_2 questa nuova base,
e chiamiamo u e v le comp.

di un vettore rispetto a
questa nuova base.

In questa nuova base l'eq. diventa

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$$



Quindi nella nuova base l'insieme è un'ellisse "fatta bene"

I semiasse della nuova ellisse sono

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$$

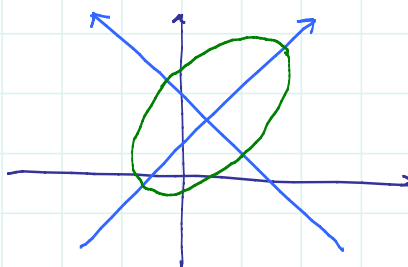
Quindi autovalori / autovettori hanno un forte significato geometrico.

Variaute $x^2 + 4y^2 + 2xy + 2x - 6y = 1$

Idea: con una traslazione, cioè spostando l'origine, posso cancellare i termini di 1° grado.

$$\begin{aligned} x &= u + a \\ y &= v + b \end{aligned} \quad \leadsto \quad \begin{aligned} &u^2 + 2au + a^2 + 4v^2 + 8bv + 4b^2 + 2uv + 2bu \\ &+ 2av + 2ab + 2u + 2a - 6v - 6b = 1 \end{aligned}$$

Basta imporre $2a + 2b + 2 = 0$ $\leadsto$ risolvo, trovo a e b
 $8b + 2a - 6 = 0$ e ho finito



ellisse risp. ad
assi $\perp$ con
origine diversa
da $(0,0)$

"Esercizio" Sia A matrice quadrata. Sappiamo calcolare A^k per ogni k intero positivo.

Voglio calcolare $\sin(A)$, $\cos(A)$, e^A ...

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

} TAYLOR

e questo fa venir voglia di definire

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

= spero che converga in qualche senso.

Questo è facile se A è una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \dots \quad e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$$

Quindi "funzione strana di matrice diagonale =
matrice diagonale in cui ho fatto la funzione strana
ai tizi sulla diagonale"

E se non è diagonale? ... magari si diagonalizza ... quindi
faccio le operazioni sulla forma diagonale e
poi torno indietro con cambio di base

$$A = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonale}}}{D} M$$

allora $e^A = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la so fare}}}{e^D} M$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 60

Note Title

16/12/2022

Algoritmo JPEG

Immagine è una matrice $m \times n$ (risoluzione schermo)

anzi sono 3 matrici $m \times n$ (RGB)
 ↑ ↑ ↑
 red green blue

↓ 3 numeri RGB che descrivono ogni pixel vanno da 0 a 255.

Per codificare una immagine bisogna codificare una matrice.

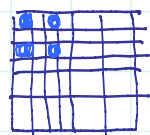
1° passo: scomposizione in blocchi 8×8

Ci siamo ridotti a trasmettere matrici 8×8 di numeri tra 0 e 255, oppure tra -127 e 128.

Sono uno sp. vet. di dim 64 e i numeri nelle caselle sono le componenti risp. alla base canonica

Come si può risparmiare?

1° modo: ne trasmetto solo alcuni, perdendo in risoluzione



2° modo: riduco il campionamento

0, 1, 2, 3 $\rightsquigarrow$ 0

4, 5, 6, 7 $\rightsquigarrow$ 4

8, 9, 10, 11 $\rightsquigarrow$ 8

↗ ↘ le possibilità diventano solo 16

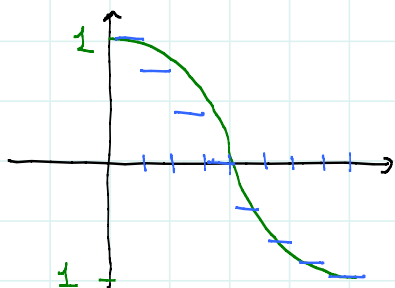
3° modo: cambio base nello spazio di dim 64 delle matrici 8×8 , poi decido che alcune componenti sono + importanti di altre e quindi

→ quelle "importanti" le trasmetto per intero

→ quelle "meno importanti" le trasmetto ridotte come nel 2° modo.

Che tipo di base sceglieremo?

→ Basi ORTONORMALI prodotte dal TEOREMA SPETTRALE come AUTONETTORI di una certa applic. lineare simmetrica.



La componente più importante di tutte è quella rispetto alla matrice

con tutti 1 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Questa componente è la media di tutti i valori

applicazione

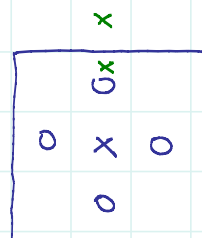
Come è fatto l'operatore lineare $M_{8 \times 8} \rightarrow M_{8 \times 8}$ a cui applichiamo il teorema spettrale per ottenere la base?

In questo caso deve prendere

INPUT: matrice 8×8

OUTPUT: matrice 8×8

È l'applicazione che sostituisce ogni valore con la somma (anzi la media) dei 4 vicini (dopo aver esteso la matrice oltre il bordo per "riflessione")



Si vede che la matrice con tutti 1 è autovettore di questa applic. con autovalore 4.

Si verifica che l'applicazione è simmetrica, quindi diagonalizzabile mediante base ortonormale.

Esercizio ridotto. Fare lo stesso con i vettori di $\mathbb{R}^4$ invece delle matrici 8×8

$$v = (a, b, c, d) \quad f(v) = (a+b, a+c, b+d, c+d)$$

$$a|a \ b \ c \ d|d \quad f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

Esercizio: dimostrare che f è diagonalizzabile e calcolare autovalori e autovettori

(La stessa cosa con vettori di $\mathbb{R}^8$ è alla base degli MP3)

$$\begin{aligned} \text{Analisi 1: } g(x+h) + g(x-h) &\sim g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x) \\ &\quad + g(x) - h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x) \\ &= 2g(x) + h^2 g''(x) \end{aligned}$$

Risolvere

$$g(x+h) + g(x-h) = \lambda g(x)$$

cioè fare autovalori / autovettori, e' come risolvere

$$2g(x) + h^2 g''(x) = \lambda g(x)$$

cioè

$$g''(x) = \frac{\lambda - 2}{h^2} g(x) \quad \text{cioè trovare autovalori / vettori della derivata seconda!}$$

Queste sono sin / cos se li vogliamo "simmetrici"

— o — o —