

Algoritmo JPEG

Immagine è una matrice $m \times n$ (risoluzione schermo)
 anzi sono 3 matrici $m \times n$ (RGB ← blue)
 ↑ red ↑ green

I 3 numeri RGB che descrivono ogni pixel vanno da 0 a 255.

Per codificare una immagine bisogna codificare una matrice.

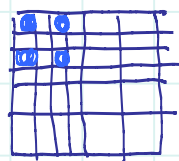
1° passo : scomposizione in blocchi 8×8

Ci siamo ridotti a trasmettere matrici 8×8 di numeri tra 0 e 255, oppure tra -127 e 128.

Sono uno sp. vett. di dim 64 e i numeri nelle caselle sono le componenti risp. alla base canonica

Come si può risparmiare?

1° modo : ne trasmetto solo alcuni, perdendo in risoluzione



2° modo: riduco il campionamento

$0, 1, 2, 3 \rightsquigarrow 0$

$4, 5, 6, 7 \rightsquigarrow 4$

$8, 9, 10, 11 \rightsquigarrow 8$

le possibilità diventano solo 16

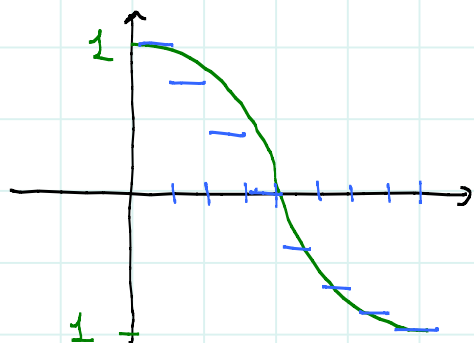
3° modo: cambio base nello spazio di dim 64 delle matrici 8×8 ,
poi decido che alcune componenti sono + importanti
di altre e quindi

→ quelle "importanti" le trasmetto per intero

→ quelle "meno importanti" le trasmetto ridotte come nel 2° modo.

Che tipo di base sceglieremo?

→ Basi ORTONORMALI prodotte dal TEOREMA SPETTRALE come AUTONETTORI di una certa applic. lineare simmetrica.



La componente più importante di tutte è quella rispetto alla matrice

con tutti 1
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Questa componente è la media di tutti i valori

applicazione

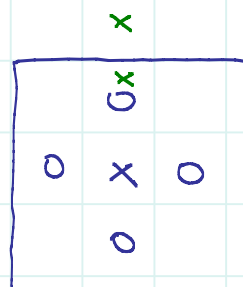
Come è fatto l'operatore lineare $M_{8 \times 8} \rightarrow M_{8 \times 8}$ a cui applichiamo il teorema spettrale per ottenere la base?

In questo caso deve prendere

INPUT: matrice 8×8

OUTPUT: matrice 8×8

È l'applicazione che sostituisce ogni valore con la somma (anzi la media) dei 4 vicini (dopo aver esteso la matrice oltre il bordo per "riflessione")



Si vede che la matrice con tutti 1 è autovettore di questa applic. con autovalore 4.

Si verifica che l'applicazione è simmetrica, quindi diagonalizzabile mediante base ortonormale.

Esercizio ridotto. Fare lo stesso con i vettori di $\mathbb{R}^4$ invece delle matrici 8×8

$$v = (a, b, c, d) \quad f(v) = (a+b, a+c, b+d, c+d)$$
$$a|a \ b \ c \ d|d \quad f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

Esercizio: dimostrare che f è diagonalizzabile e calcolare autovalori e autovettori

(La stessa cosa con vettori di $\mathbb{R}^8$ è alla base degli MP3)

Analisi 1:

$$g(x+h) + g(x-h) \sim g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x) + g(x) - h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x)$$
$$= 2g(x) + h^2 g''(x)$$

Risolvere

$$g(x+h) + g(x-h) = \lambda g(x)$$

cioè fare autovalori / autovettori, è come risolvere

$$2g(x) + h^2 g''(x) = \lambda g(x)$$

cioè

$$g''(x) = \frac{\lambda - 2}{h^2} g(x) \quad \text{cioè trovare autovalori / vettori della derivata seconda!}$$

Queste sono sin / cos se li vogliamo "simmetrici"