

Distanza tra due rette sghembe nello spazio

$$r_1: (2, 1, 0) + t(1, 1, 1)$$

$$A_1 + t v_1$$

$$r_2: (1, 0, 1) + t(2, 2, 3)$$

$$A_2 + t v_2$$

Verificare che sono sghembe

→ v_1 e v_2 sono lin. indip. (sghembe o incidenti)

→ calcolo eventuali intersezioni

$$\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1+t = 2s \\ t = 1+3s \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1+1+3s = 2s \rightarrow s = -2 \\ \searrow t = -5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -3 = -3 \\ \uparrow \end{matrix}$$

In questo caso si incontrano nel punto $(-3, -4, -5)$

Cambiamole leggermente:

$$\hat{r}_1: (2, 1, 0) + t(1, 1, 1)$$

$$\hat{r}_2: (1, 0, 2) + t(2, 2, 3)$$

1° metodo per la distanza

Cerco P sulla prima retta e Q sulla seconda retta t.c.

PQ è perp. a v_1 e v_2

$$P = (2+t, 1+t, t) \quad Q = (1+2s, 2s, 2+3s)$$

$$PQ = (2+t-1-2s, 1+t-2s, t-2-3s)$$

$$\begin{cases} 1+t-2s+1+t-2s+t-2-3s = 0 \\ 2+2t-4s+2+2t-4s+3t-6-9s = 0 \end{cases}$$

$$\langle P-Q, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle P-Q, v_2 \rangle = 0$$

Risolvere $\leadsto$ trovo t ed $s \leadsto$ trovo P e Q e poi faccio la distanza tra i 2.

Perché questo metodo funziona?

Siano P_0 e Q_0 i punti che abbiamo trovato. Posso scrivere le due rette come

$$P_0 + t v_1$$

$$Q_0 + s v_2$$

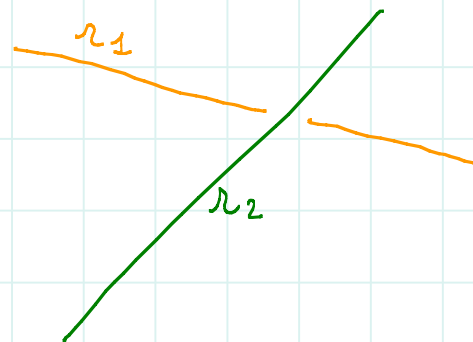
Facciamo la distanza al $\square$ tra il 1° e il 2°

$$\begin{aligned} \|P_0 + t v_1 - Q_0 - s v_2\|^2 &= \|(P_0 - Q_0) + (t v_1 - s v_2)\|^2 \\ &= \underbrace{\|P_0 - Q_0\|^2}_{\text{dist}^2(P_0, Q_0)} + \underbrace{\|t v_1 - s v_2\|^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\langle P_0 - Q_0, t v_1 - s v_2 \rangle}_{\overset{0}{=}} \\ &\geq \|P_0 - Q_0\|^2 \end{aligned}$$

$t \langle P_0 - Q_0, v_1 \rangle +$
 $s \langle P_0 - Q_0, v_2 \rangle$
 $= 0$ perché $P_0 - Q_0$ è
 $\perp$ a v_1 e v_2

2° metodo per la distanza Determino il piano che contiene la 2° retta ed è parallelo alla prima retta (o viceversa)

$$\underbrace{(1, 0, 2) + t(2, 2, 3)}_{\text{seconda retta}} + s \underbrace{(1, 1, 1)}_{\text{dir. 1ª retta}}$$



Facciamo finta che sia il piano del foglio che contiene r_2 . Ora r_1 sarà parallela, sopra o sotto, a distanza costante dal piano

La minima distanza si realizza "all'incrocio" e coincide con la distanza di r_1 da un qualunque p.to del piano

Cartesiana del piano

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\leadsto (-1, 1, 0) \leadsto -x + y = -1 \leadsto \boxed{-x + y + 1 = 0}$$

Ora calcolo $\text{dist}((2,1,0), \text{piano})$
↑
qualsunque p.to
prima retta

$$= \frac{|-2+1+1|}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Direbbe che sono ancora incidenti :)

Vediamo se è vero!

$$P = (2+t, 1+t, t) \quad Q = (1+2s, 2s, 2+3s)$$

$$\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1+t = 2s \\ t = 2+3s \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3+3s = 2s \leadsto s = -3 \\ t = -7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} -5 = -5 \\ -5 = -5 \end{matrix}$$

e infatti sono incidenti nel p.to $(-3, -4, -5) !!!$

[Verifica che anche con il 2° metodo la soluzione del sistema era $t = -7$ e $s = -5$]

— o — o —

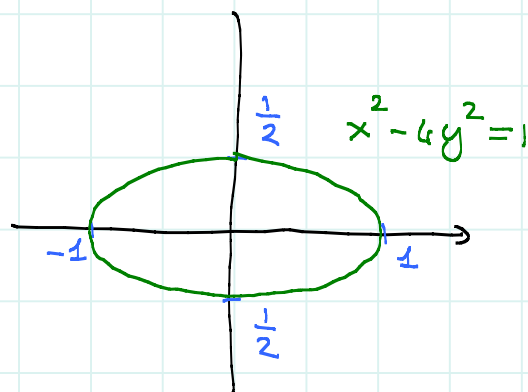
Esercizio

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Nel piano rappresenta ellisse

Domanda: cosa rappresenta

$$x^2 + 4y^2 + 2xy = 1$$



Questo è una forma quadratica
con matrice definita positiva

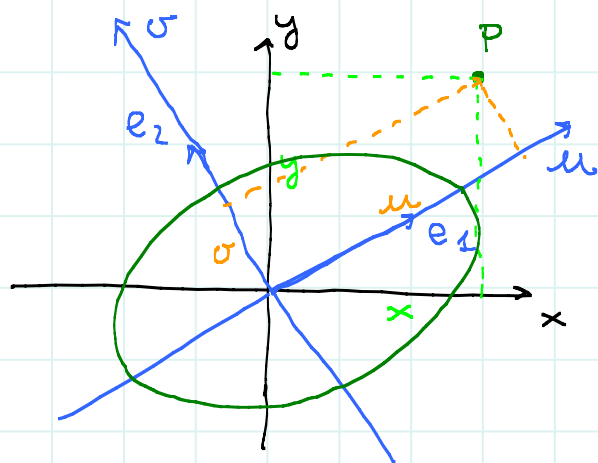
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dal teorema spettrale sappiamo che in una opportuna base ORTONORMALE la matrice diventa DIAGONALE con gli autovalori λ_1 e λ_2 positivi sulla diagonale.

Chiamiamo e_1, e_2 questa nuova base,
e chiamiamo u e v le comp.
di un vettore rispetto a
questa nuova base.

In questa nuova base l'eq. diventa

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$$



Quindi nella nuova base l'insieme è un'ellisse "fatta bene"
I semiasse della nuova ellisse sono

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$$

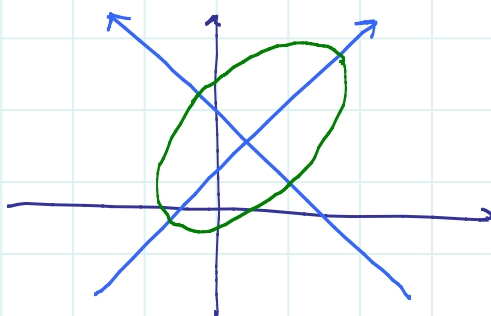
Quindi autovalori / autovettori hanno un forte significato
geometrico.

Variaute $x^2 + 4y^2 + 2xy + 2x - 6y = 1$

Idea: con una traslazione, cioè spostando l'origine, posso
cancellare i termini di 1° grado.

$$\begin{aligned} x &= u + a \\ y &= v + b \end{aligned} \quad \leadsto \quad \begin{aligned} &u^2 + \underline{2au} + a^2 + 4v^2 + \underline{8bv} + 4b^2 + 2uv + \underline{2bu} \\ &+ \underline{2av} + 2ab + \underline{2u} + 2a - \underline{6v} - 6b = 1 \end{aligned}$$

Basta imporre $2a + 2b + 2 = 0$ $\leadsto$ risolvo, trovo a e b
 $8b + 2a - 6 = 0$ e ho finito



ellisse risp. ad
assi $\perp$ con
origine diversa
da $(0,0)$

"Esercizio" Sia A matrice quadrata. Sappiamo calcolare A^k per ogni k intero positivo.

Voglio calcolare $\sin(A)$, $\cos(A)$, $e^A \dots$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

} TAYLOR

e questo fa venir voglia di definire

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

= spero che converga in qualche senso.

Questo è facile se A è una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \dots \quad e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$$

Quindi "funzione strana di matrice diagonale =
matrice diagonale in cui ho fatto la funzione strana
ai tizi sulla diagonale"

E se non è diagonale? ... magari si diagonalizza ... quindi
faccio le operazioni sulla forma diagonale e
poi torno indietro con cambio di base

$$A = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonale}}}{D} M$$

allora

$$e^A = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la so fare}}}{e^D} M$$

— o — o —