

Cosa succede in $\mathbb{R}^3$ se compongo due rotazioni?

Le matrici delle due trasformazioni si compongono (moltiplicano)

$$f_1(x) = A_1 x + b_1$$

$$f_2(x) = A_2 x + b_2$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2 (A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_1 A_2}_\substack{\uparrow \\ \text{nuova} \\ \text{matrice}} x + \underbrace{(A_2 b_1 + b_2)}_{\text{nuovo } b}$$

Ora A_1 e A_2 hanno $\text{Det} +1$, quindi anche $A_1 A_2$ ha $\text{Det} +1$.

Quindi la composizione può essere

→ o Identità / traslazione

→ o rotazione, eventualmente seguita da traslazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad \textcircled{3}$$

Di che cosa si tratta?

(1) Identità ☺

(2) $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$. Questa è *quicane*, cioè $f(x) = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice ortogonale}$$

$\text{Det} = 1 \rightsquigarrow$ identità (dici di no) oppure rotazione

Cerchiamo i p.ti fissi (cioè le soluzioni di $Ax = x$, cioè l'autospazio dell'autovalore $+1$)

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \\ x = z \end{cases} \quad \text{Span}((1, 1, 1))$$

Si tratta di una rotazione intorno alla retta (t, t, t) .

Di quale angolo? Bisogna vedere gli autovalori, che saranno

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta \rightsquigarrow \theta \text{ è l'angolo}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow \theta = 120^\circ$$

$\uparrow$ $\cos \theta$ $\uparrow$ $\sin \theta$

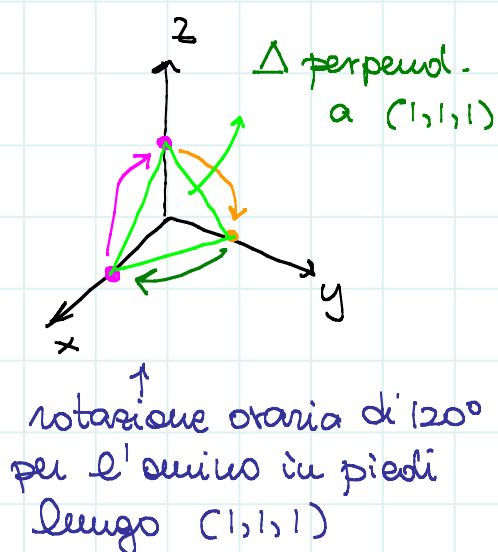
Vediamolo geometricamente

$$(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$$

$$f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$



③ $(x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$

P.ti fissi

$$\begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad x - y = 0$$

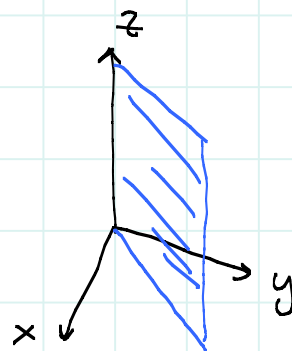
$$z = t, \quad y = s, \quad x = s$$

$$(x, y, z) = (s, s, t) = s(1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$$

Quindi c'è un piano di p.ti fissi

$\rightsquigarrow$ simmetria rispetto al piano

$$\boxed{x - y = 0}$$



Vediamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{Det} = -1$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2-1)(1-\lambda) \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1)(1-\lambda) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ con $m_A(1) = 2$

Autospazio di $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Span}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$

Autospazio di $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\text{Span}((1, -1, 0))$
 $\uparrow$
 perpendicolare agli altri 2

$(3 - x, 5 - z, 7 + y)$

Intanto è una isometria $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ ortogonale
 $f(x) = Ax + b$ $\uparrow (3, 5, 7)$ $\text{Det} = -1$

P.ti fissi

$$\begin{cases} 3 - x = x \\ 5 - z = y \\ 7 + y = z \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 3 \\ y + z = 5 \\ y - z = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{unico p.to fisso}$$

$\leadsto f(x) =$ rotazione $\uparrow$ di che angolo? rispetto ad una retta $\uparrow$ quale? seguita da simmetria rispetto piano $\perp$ alla retta

Facciamo autovalori / autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Autovalori: $\lambda = -1$ $\lambda = \pm i = \cos \theta \pm i \sin \theta$ con $\theta = 90^\circ$

Autovettore di $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((1, 0, 0))$$

Quindi stiamo ruotando di 90° rispetto alla retta

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}, -1, 6\right)}_{\text{p.to fisso}} + t(1, 0, 0)$$

Piccola verifica: prendiamo un p.to generico della retta
 $\left(\frac{3}{2} + t, -1, 6\right)$

Dove ci aspettiamo vada a finire?

$$(3-x, 5-z, 7+y)$$

$$\left(3 - \frac{3}{2} - t, 5 - 6, 7 + (-1)\right) = \left(\frac{3}{2} - t, -1, 6\right) \quad \checkmark$$

$$f\left(\frac{3}{2}, 1, 2\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, 8\right)$$

