

(10) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 0$, ← passa per l'origine

(11) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 5$,

(10) Idea: il piano va in se stesso

l'ortogonale al piano va in - se stesso

$$\text{Piano} = \text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(-2, 1, 0)}, \underset{\vec{v}_2}{(3, 0, 1)} \right)$$

Scego v_3 ortogonale a v_1 e v_2

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (1, 2, -3) \quad [\text{Verifica a occhio}]$$

Stiamo cercando una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(v_1) = v_1$$

$$f(v_2) = v_2$$

$$f(v_3) = -v_3$$

La sua matrice dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla stessa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se voglio la matrice dalla canonica alla canonica considero

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

← compreso il -1
cambio base dalla
canonica alla
 $\{v_1, v_2, v_3\}$

Se all'inizio partissi con una base ortonormale, il calcolo dell'inversa sarebbe più semplice.

Come posso ottenere una base ortonormale a partire da $\{v_1, v_2, v_3\}$?

(Sewe sempre che piano = $\text{Span}(v_1, v_2)$)

1° modo: GS

2° modo: Ricalcolo v_2 usando la formula misteriosa su v_1 e v_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \hat{v}_2 = (-3, -6, -5) \quad [\text{Verifica a occhio}]$$

Questa nuova la posso ortonormalizzare

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0) \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} (3, 6, 5) \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, -3)$$

Posso usare come matrice di cambio base $(\hat{v}_1 | \hat{v}_2 | \hat{v}_3)$
e in questo modo $M^{-1} = M^t$

[Controllare che nei 2 modi venga uguale].

(11) Simm. risp. piano $x + 2y - 3z = 5$

Scelgo un p.to P_0 del piano, ad esempio $P_0 = (1, 2, 0)$
e faccio il solito proc.

$$(x, y, z) \rightarrow (x-1, y-2, z) \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{simm. del} \\ \text{pto precedente}}]{A} A(x-1, y-2, z) \rightarrow A(\dots) + (1, 2, 0)$$

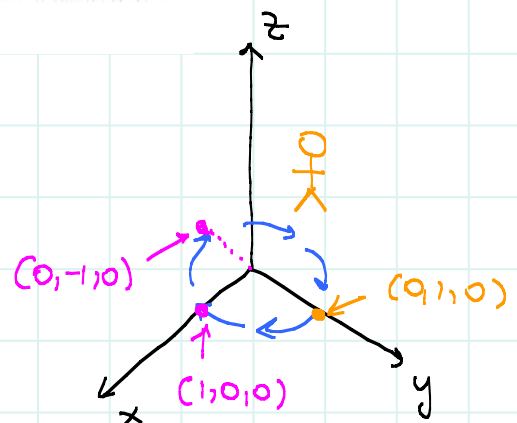
(12) rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z ,

La rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di un angolo θ
ANTIORARIO per
l'omino in figura

intorno all'asse z



Visto che a noi serviva in senso orario, bisogna usare $\theta = -90^\circ$ quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (y, -x, z)$$

[Verifica: $f(1,0,0) = (0,-1,0)$
 $f(0,1,0) = (1,0,0)$
 $f(0,0,1) = (0,0,1) \quad \ddot{\smile}]$

Calcolare l'immagine del piano $x - 2y + 4z = 7$

Passo il piano in parametrica

$$(7, 0, 0) + t(2, 1, 0) + s(4, 0, -1) = \underline{(7+2t+4s, t, -s)}$$

Verifica!

$$(7+2t+4s, t, -s) \rightarrow (t, -7-2t-4s, -s)$$

$$= (0, -7, 0) + t(1, -2, 0) + s(0, 4, 1)$$

si può fare $\ddot{\smile}$

Volendo posso tornare in cartesiana

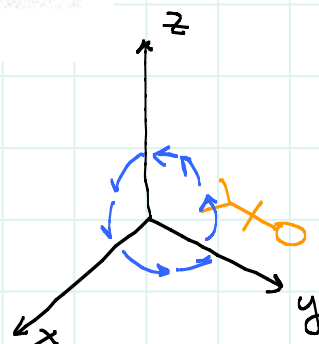
$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (-2, -1, 4) \rightsquigarrow \boxed{2x + y - 4z = -7}$$

— 0 — 0 —

(13) rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y ,

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (0,0,-1) \\ f(0,1,0) &= (0,1,0) \\ f(0,0,1) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Domanda

Come scrivo in generale la rotazione di θ in senso antiorario rispetto ad una retta

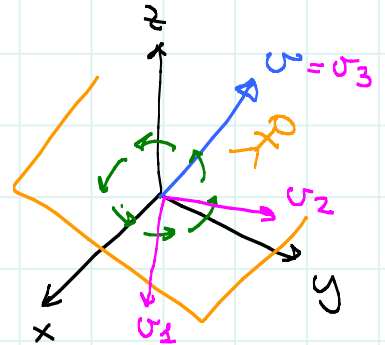
$\text{Span}(v)$

(antiorario rispetto ad un osservatore che sta in piedi lungo v)

Sappiamo la soluzione nel caso modello in cui $v = (0, 0, 1)$.

La soluzione è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Ora mi serve una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in cui

→ v_3 = vettore v dato

→ $\{v_1, v_2, v_3\}$ deve essere orientata come la base canonica cioè in maniera tale che v_1 diventa v_2 quando ruoto di 90° in verso antiorario.

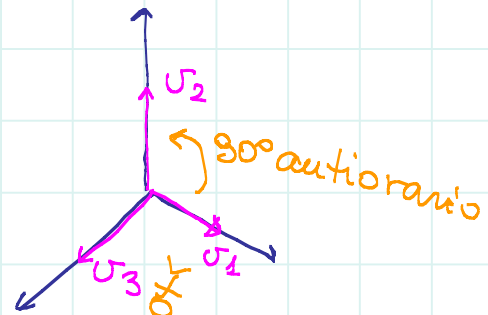
Per capire se la base è fatta bene, basta fare il Det

- Det = +1 $\rightsquigarrow$ fatta bene
- Det = -1 $\rightsquigarrow$ fatta male

Esempio $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det = 1 $\rightsquigarrow$ fatta bene



Esercizio Trovare base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta bene con
 $v_3 = (1, 2, 3)$

Prendo $v_1 = (2, -1, 0)$

Costruisco v_2 con la misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3, 6, -5) = v_2$$

Controllo il Det

$$(v_1 | v_2 | v_3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \det = 36 + 5 + 9 + 20 > 0$$

Quando divido per le norme ho base voluta.
— 0 — 0 —