

ISOMETRIE DELLO SPAZIO

$$f(x) = Ax + b$$

vettori di $\mathbb{R}^3$

↑
matrice ortogonale
3x3

- Domande: ① Data una descrizione geom., trovare l'espressione
 ② Data un'espr., capire se è isometria e come è fatta

Classificazione sulla base dei p.ti fissi

① Fissi = tutto $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow f(x) = x$

② Fissi = un piano $\rightsquigarrow f(x) = \text{simmetria rispetto al piano}$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

③ Fissi = una retta $\rightsquigarrow f(x) = \text{rotazione di un angolo } \theta \text{ rispetto alla retta}$

Forma canonica

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

④ Fissi = singolo p.to $\rightsquigarrow f(x) = \text{rotazione risp. ad una retta seguita da simmetria rispetto piano } \perp \text{ alla retta}$

Forma canonica

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

(Il p.to fisso è l'intersezione tra retta e piano)

5) Fissi = insieme vuoto. Allora si aprono 3 scenari

5.1 $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$ (traslazione)

($A =$ matrice identica)

5.2 $f(x) =$ simmetria risp. ad un piano seguita da traslazione
con componente non nulla $\parallel$ al piano

($A =$ matrice di simm., quindi autovalori $+1, +1, -1$)

5.3 $f(x) =$ rotazione risp. ad una retta seguita da traslazione
con componente non nulla $\parallel$ alla retta

($A =$ matrice di rotazione, quindi autovalori $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$)

— 0 — 0 —

(1) traslazione di vettore $(3, -1, 5)$,

(2) simmetria rispetto al piano xy , piano che contiene asse x e asse y , cioè
piano $z = 0$

(3) simmetria rispetto al piano yz ,

(4) simmetria rispetto al piano $z = 3$,

(5) simmetria rispetto al piano $x = -5$,

(1) $(x, y, z) \rightarrow (x+3, y-1, z+5)$

(2) $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

(3) $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

(4) $P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetria $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

Prendo $P_0 = (0, 0, 3)$ (p.to del piano)

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x, y, z-3) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria risp.} \\ \text{piano } z=0}}{\rightsquigarrow} (x, y, 3-z) \rightsquigarrow (x, y, 6-z)$$

[Verifica: chi sono i p.ti fissi? $6-z = z \rightsquigarrow 2z = 6 \rightsquigarrow z = 3$:)]

Osservazione Potero usare un qualunque altro P_0 e piano, ad es.

$P_0 = (2, -1, 3)$

$$(x, y, z) \overset{\substack{\uparrow \\ P-P_0}}{\rightsquigarrow} (x-2, y+1, z-3) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria risp. } z=0}}{\rightsquigarrow} (x-2, y+1, 3-z) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo } P_0}}{\rightsquigarrow} (x, y, 6-z)$$

$$(5) P_0 = (-5, 0, 0)$$

$$(x, y, z) \xrightarrow{P} (x+5, y, z) \xrightarrow{P-P_0} (-x-5, y, z) \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ \text{Simul. risp.} \\ \text{piano } x=0}} (-x-10, y, z) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo } P_0}} (-x-10, y, z)$$

(6) simmetria rispetto al piano $y = 3$ seguita da simmetria rispetto al piano $z = -2$,

(7) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$,

(6) Simmetria piano $y = 3$:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, z) \quad (\text{come prima})$$

Simmetria piano $z = -2$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z)$$

Se faccio la prima e poi la seconda ottengo

$$(x, y, z) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ 1^a}} (x, 6-y, z) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ 2^a}} (x, 6-y, -4-z)$$

(7) Se le compongo in ordine inverso

$$(x, y, z) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ 2^a}} (x, y, -4-z) \rightarrow (x, 6-y, -4-z)$$

(È venuto come il (6), ma non succede sempre)

Domanda: come è fatta l'isometria $(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, -4-z)$?

Cerco i pti fissi risolverlo

$$\begin{cases} x = x \\ 6-y = y \\ -4-z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{le soluzioni sono } (t, 3, -2) = \\ &= (0, 3, -2) + t(1, 0, 0) \\ &= \text{retta // all'asse } x \end{aligned}$$

La trasformazione è una rotazione intorno alla retta trovata.

Di che angolo? Guardiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \leftarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \cos\theta = -1, \text{ quindi } \theta = 180^\circ$$

- (8) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$, seguita a sua volta da simmetria rispetto al piano $x = 1$,
 (9) simmetria centrale rispetto al punto $(-1, 3, 4)$,

Simmetr. $z = -2$: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z)$

Simmetr. $y = 3$: $(x, y, z) \rightarrow (x, 6-y, z)$

Simmetr. $x = 1$: $(x, y, z) \rightarrow (2-x, y, z)$

Componendo:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -4-z) \rightarrow (x, 6-y, -4-z) \rightarrow (2-x, 6-y, -4-z)$$

Di cosa si tratta?

Se calcolo i p.ti fissi ottengo $(x, y, z) = (1, 3, -2)$ quindi unico p.to fisso.

Si tratta di una simmetria centrale risp. al p.to $(1, 3, -2)$.

(è un caso molto particolare di rotazione intorno ad un asse, seguita da simmetr. risp. piano perpendicolare.

Matrice $A = -Id$)

(9) $P_0 = (-1, 3, 4)$

$$\begin{array}{ccccc} (x, y, z) & \rightarrow & (x+1, y-3, z-4) & \rightarrow & (-x-1, 3-y, 4-z) \\ P & & P-P_0 & \uparrow & \text{simmetr. centrale} \\ & & & & \text{risp. all'origine} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow (-2-x, 6-y, 8-z) \\ \uparrow \\ \text{aggiungo } P_0 \end{array}$$

— o — o —