

Data un' espressione, come capisco di cosa si tratta?

$$f(v) = Av + b \quad v \in \mathbb{R}^2$$

• Se $A = \lambda Id$, allora si tratta di una OMOTETIA, rispetto all'unico p.to fisso che trovo risolvendo $f(v) = v$

• Se A è una matrice ORTOGONALE, allora è una isometria.

Quale? Dipende dall'insieme dei p.ti fissi

→ p.ti fissi = tutto $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow f = \text{identità}$

→ p.ti fissi = 1 retta $\rightsquigarrow f = \text{simmetria rispetto alla retta}$

→ p.ti fissi = 1 solo p.to $P \rightsquigarrow f = \text{rotazione risp. a quel p.to } P$

→ p.ti fissi = $\emptyset \rightsquigarrow$ ci sono due casi

* traslazione di un certo vettore b ($f(v) = v + b$ con $b \neq 0$)

* simmetria rispetto ad una retta seguita da una traslazione di un vettore b parallelo alla direzione retta.

↑ La matrice A ha $\det = -1$ perché è una matrice di simm.

— 0 — 0 —

$$(2x + 5, 2y - 7),$$

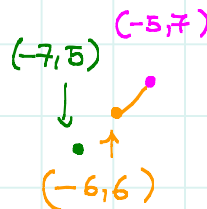
①

$$(-2x + 5, -2y - 7),$$

②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
omotetia di fattore 2



$$\begin{cases} 2x + 5 = x & x = -5 \\ 2y - 7 = y & y = 7 \end{cases}$$

$$(-6, 6) \rightarrow (-7, 5)$$

$$(2x+5, 2y-7),$$

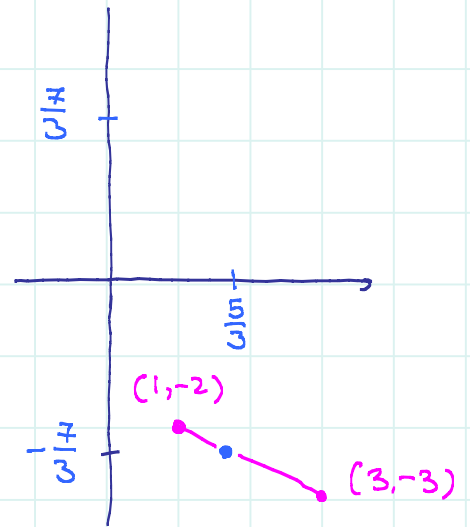
$$(-2x+5, -2y-7),$$

②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
moltiplica di
fattore -2

P.to fisso: $\begin{cases} -2x+5 = x \\ -2y-7 = y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{matrix}$



$$(1, -2) \rightarrow (3, -3)$$

②

$$(7+x, 3+y),$$

↑

$$(x, y) + (7, 3)$$

Traslazione

$$(7+x, 3-y),$$

↑

P.ti fissi

$$7+x = x$$

$$3-y = y$$

NO SOLUZIONI

↓

simmetria seguita
da traslazione

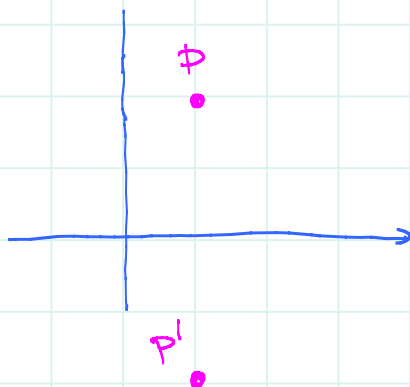
$$(7-x, 3+y),$$

↑

stessa cosa, solo
ad assi
invertiti

② $\begin{matrix} P \\ (x, y) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{matrix} P' \\ \uparrow \\ \text{simmetria} \\ \text{rispetto} \\ \text{asse } x \end{matrix}} \begin{matrix} P' \\ (x, -y) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} P(P) \\ (x, -y) + (7, 3) \end{matrix}$

↑
componente non
nulla rispetto
all'asse x



$\leadsto x \text{ finale} \neq x \text{ iniziale}$

$$(7-x, 3-y),$$

$$(7+y, 3+x),$$

$$(7+y, 3-x),$$

①

① Vediamo i p.ti fissi

$$\begin{cases} 7-x = x & x = \frac{7}{2} \\ 3-y = y & y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

P.to fisso unico $\Rightarrow$ rotazione

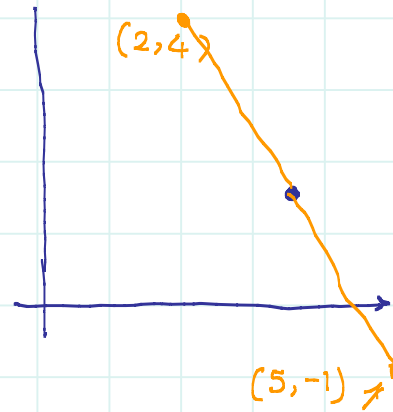
Di che angolo e in che verso?

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \theta = 180^\circ$$

Quindi in realtà è la simmetria centrale rispetto a $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

$$(2, 4) \rightarrow (5, -1)$$



② $(7+y, 3+x)$

P.ti fissi

$$\begin{cases} 7+y = x \\ 3+x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 7 \\ x-y = -3 \end{cases}$$

Nessun p.to fisso e non è una traslazione,

quindi è una simmetria rispetto ad una retta seguita da una traslazione che distrugge i p.ti fissi

La simmetria che ci sta sotto è $(x, y) \rightarrow (y, x)$, cioè rispetto alla retta $y=x$.

$$\textcircled{3} \quad (7+y, 3-x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

P.ti fissi

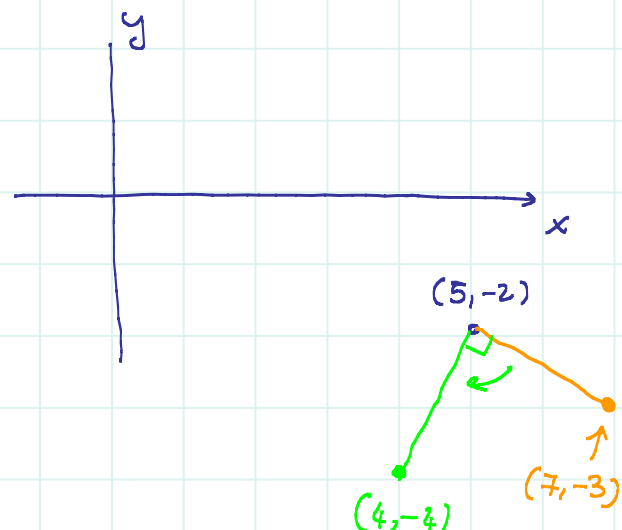
$$\begin{cases} 7+y = x \\ 3-x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 7 \\ x+y = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=5 \\ y=-2 \end{matrix} \rightarrow \text{rotazione intorno a } (5, -2)$$

Di quale angolo?

$$\text{Matrice} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = -90^\circ \text{ antiorario} \\ = 90^\circ \text{ orario}$$

$$(7, -3) \rightarrow (4, -4)$$



$$\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

↑ ↑

Non è una matrice ortogonale, perché le colonne non sono ortogonali
 $\Rightarrow$ NON è una isometria!

$$\left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vdots + \vdots$$

↑ ↑
No matrice ortogonale

$$\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5} \right),$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La matrice è ortogonale, quindi è una isometria!

↑
e avendo $\det = -1$, per forza
è una matrice di simmetria

Cerco i p.ti fissi

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Non ci sono soluzioni.

- (a) prima la traslazione di vettore (x_0, y_0) e poi la traslazione di vettore (x_1, y_1) ,
- (b) prima la simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) e poi la simmetria centrale rispetto al punto (x_1, y_1) ,
- (c) prima la simmetria rispetto ad una retta e poi nuovamente la simmetria rispetto alla stessa retta,

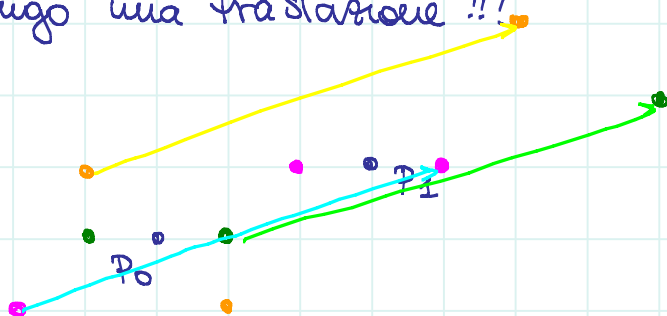
(a) $f(v) = v + b_0$

$g(v) = v + b_1$

$g(f(v)) = f(v) + b_1 = v + \underline{b_0 + b_1}$

traslazione della somma

(b) Ottengo una traslazione !!!



$f(v) = -v + b_0$

$g(v) = -v + b_1$

$g(f(v)) = -f(v) + b_1$

$= v - b_0 + b_1$

$= v + (b_1 - b_0)$

Se voglio sapere di cosa traslo, basta vedere che succede a P_0

→ al primo passo sta fermo

→ al secondo passo gli viene aggiunto $2(P_1 - P_0)$