

- (1) traslazione di vettore $(3, -1)$,
- (2) simmetria rispetto all'asse x ,
- (3) simmetria rispetto all'asse y ,
- (4) rotazione di 90° in senso orario rispetto all'origine,
- (5) simmetria rispetto alla retta $x = -8$,
- (6) simmetria centrale rispetto al punto $(3, 4)$,
- (7) simmetria rispetto alla retta $y = x$,

$$(1) \quad (x, y) \rightarrow (x+3, y-1)$$

$$(2) \quad (x, y) \rightarrow (x, -y)$$

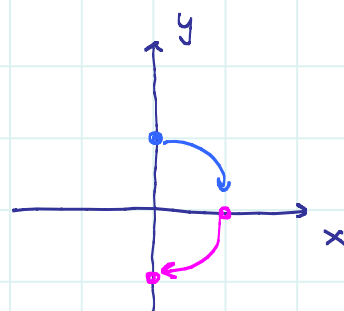
$$(3) \quad (x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$(4) \quad f(1, 0) = (0, -1)$$

$$f(0, 1) = (1, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

↑
rotazione di θ in senso
antiorario

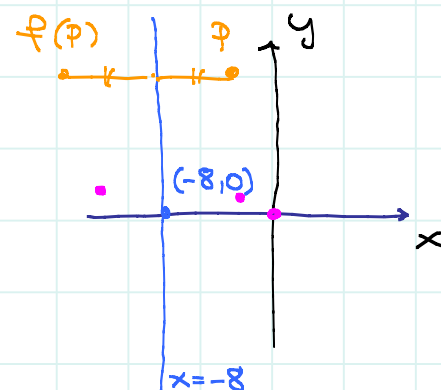


(5) simmetria rispetto retta $x = -8$

$$P_0 = (-8, 0)$$

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow g(P - P_0) + P_0$$

↑
simul.
asse y



$$(x, y) \rightsquigarrow (x+8, y) \rightsquigarrow (-x-8, y) \rightsquigarrow (-x-16, y)$$

Espressione finale $(x, y) \rightarrow (-x-16, y)$

Qualche verifica: $(0, 0) \rightarrow (-16, 0)$

$(-2, 1) \rightarrow (-14, 1)$

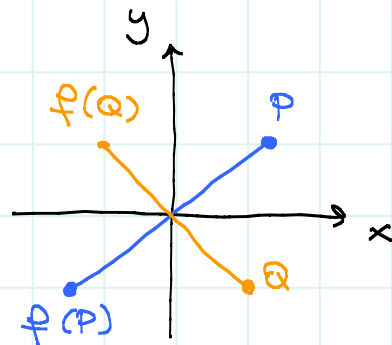
↑ è ragionevole che
l'espressione non tocchi
la y

(6) Simmetria centrale rispetto p.to $(3,4)$

(6-) " " " " $(0,0)$

$$(x,y) \rightarrow (-x,-y)$$

↑ rotazione di 180°
risp. all'origine



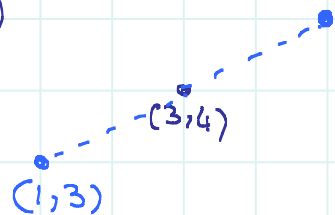
Rispetto a $P_0 = (3,4)$:

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow g(P - P_0) + P_0$$

↑ risp. all'origine

$$(x,y) \rightarrow (x-3, y-4) \rightsquigarrow (3-x, 4-y) \rightsquigarrow (6-x, 8-y)$$

$$f(1,3) = (5,5)$$



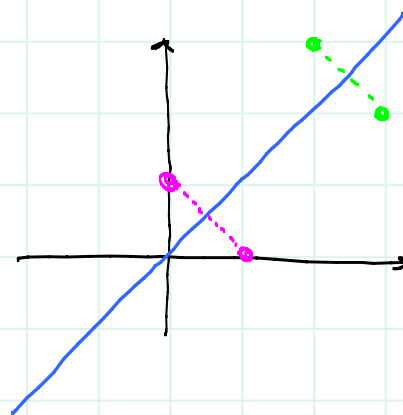
(7) Simmetria rispetto retta $y=x$

$$f(1,0) = (0,1)$$

$$f(0,1) = (1,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y,x)$$



Simmetria rispetto alla retta

$$\boxed{ax+by=0}$$

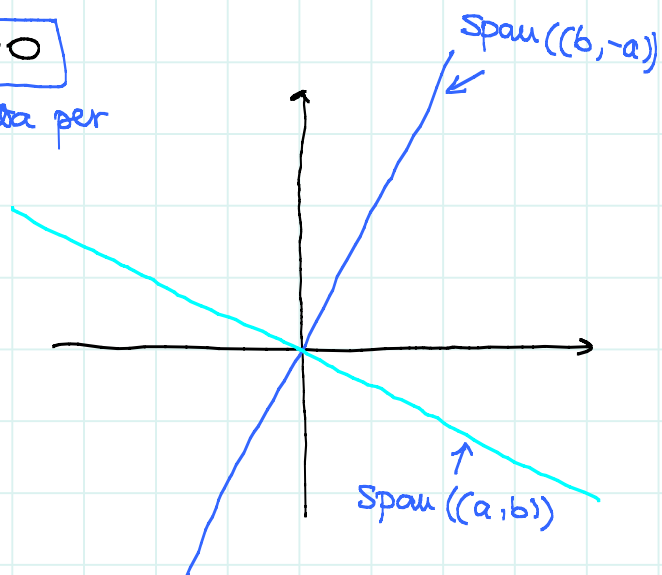
generica retta per
l'origine

Dove succedere che

$$f(a,b) = (-a,-b)$$

$$f(b,-a) = (b,-a)$$

↑ la retta deve
stare fissa



Si può dire che $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (b, -a)$ (sono una base di $\mathbb{R}^2$)

$$f(v_1) = -v_1$$

$$f(v_2) = +v_2$$

Quindi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice della simmetria dalla $\{v_1, v_2\}$ alla $\{v_1, v_2\}$

$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cambia base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

Quindi

$$M \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

è la simmetria richiesta!

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}}$$

simmetria rispetto alla
retta $ax+by=0$

↑
è del tipo $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(8) caso speciale $y = 2x$ ($2x - y = 0$)

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right)$$

Verifica: cerchiamo i pti fissi di f

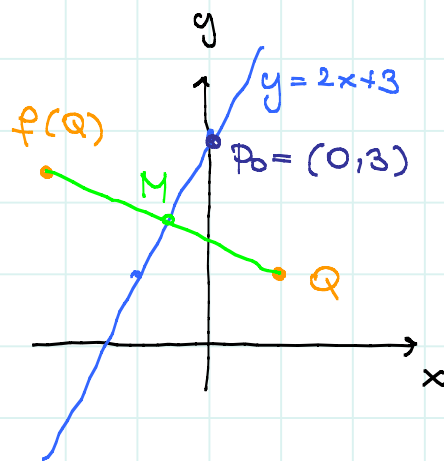
$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \therefore$$

Oss. Per calcolare la matrice c'era anche il metodo bonino ☺

Simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 3$

Prendo un pto comodo sulla retta, ad es.

$$P_0 = (0, 3)$$



$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow g(P - P_0) \rightsquigarrow P_0 + g(P - P_0)$$

↑ simmetria
risp. a $y = 2x$

$$(x, y) \rightarrow (x, y - 3) \rightarrow \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{9}{5}\right)$$

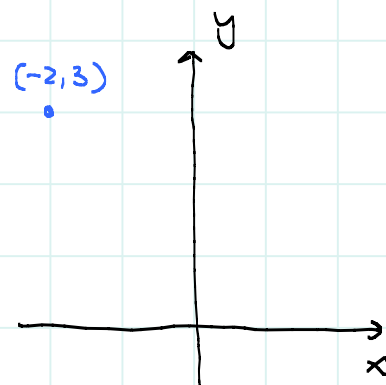
$$\rightarrow \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}\right)$$

Esperimento: $Q = (1, 1) \rightsquigarrow f(Q) = \left(-\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$

Il pto medio del segmento tra Q e $f(Q)$ è $\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right) = M$
Stara' sulla retta?

$$y = 2x + 3 \quad \frac{9}{5} = -\frac{6}{5} + 3 \quad \therefore$$

(11) rotazione di 30° in senso antiorario rispetto al punto $(-2, 3)$,



Rotazione di 30° antiorario risp. origine

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Solita storia

$$(x, y) \rightarrow (x+2, y-3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

aggiungo $\nearrow$

$$(-2, 3) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Verifica che, per esempio, $(-2, 3)$ sia l'unico p.to fisso.

— 0 — 0 —