

5. (Omotetie rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$)(a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.

(c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y = 2x, \quad y = 2x + 5, \quad y = -2x + 3, \quad x + y - 1 = 0.$$

(d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.

(e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

$$(a) f(x, y) = (3x, 3y)$$

(b) Punti fissi vuol dire risolvere

$$f(x, y) = (x, y)$$

cioè

$$(3x, 3y) = (x, y) \leadsto x = y = 0$$

 $\leadsto$ solo l'origine resta fissa(c) Immagine della retta $y = 2x + 5$

$$\text{Parametrica} \quad (0, 5) + t(1, 2) = (t, 5 + 2t)$$

$$\begin{aligned} f(t, 5 + 2t) &= (3t, 15 + 6t) = (0, 15) + t(3, 6) \\ &= (0, 15) + t(1, 2) \end{aligned}$$

Immagine è $y = 2x + 15$ (d) Determinare quale retta ha come immagine $x + y - 1 = 0$.Al posto di x e y scrivo l'espressione di $f(x, y)$ cioè $3x$ e $3y$

$$3x + 3y - 1 = 0$$

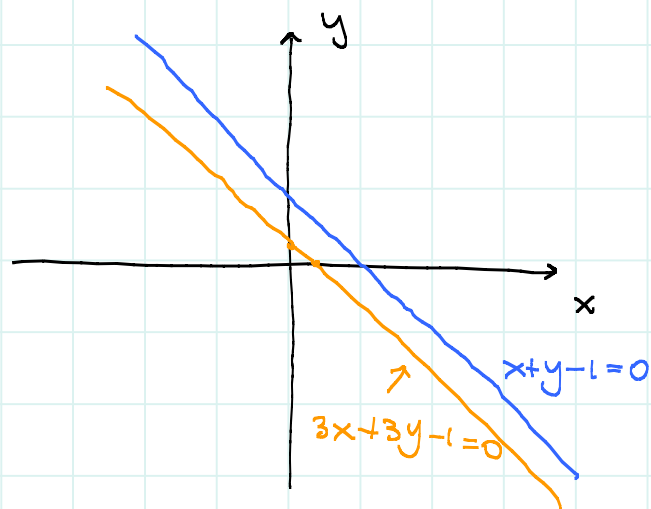
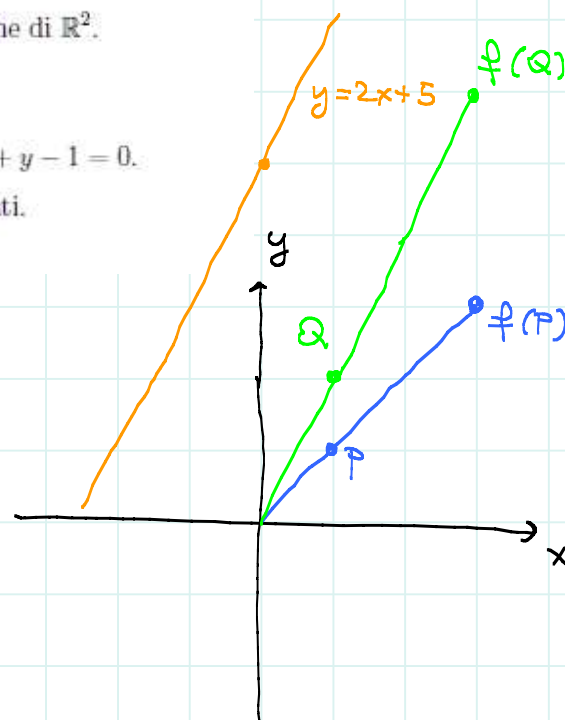
$$y = \frac{1}{3} - x$$

(e) Immagine della circ.

$$x^2 + y^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Centro : $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ raggio : $\frac{3}{2}$ 

La circ. immagine avrà centro in $f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$
e raggio = triplo del raggio, cioè $\frac{9}{2}$

L'equazione è $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{81}{4} \rightsquigarrow \boxed{x^2 - 3x + y^2 = 0}$

6. (Omotetie rispetto ad un punto qualunque di $\mathbb{R}^2$)

(a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto al punto $(2, -1)$ di $\mathbb{R}^2$.

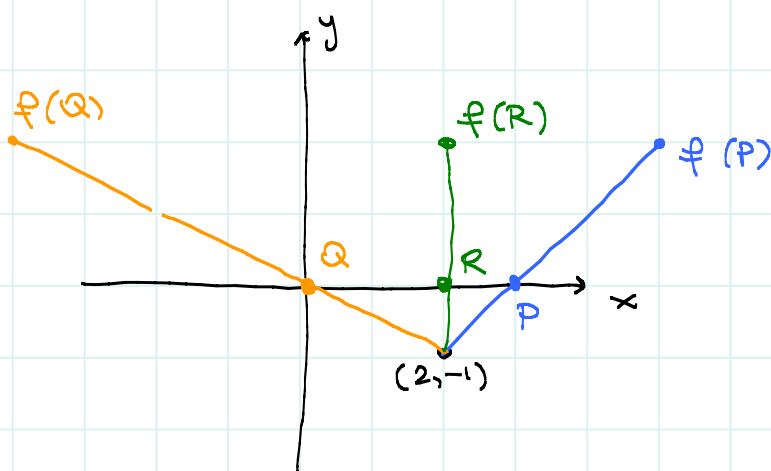
(b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.

(c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y = 2x, \quad y = 2x + 5, \quad y = -2x + 3, \quad x + y - 1 = 0.$$

(d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.

(e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.



Strategia generale: Sia P_0 il centro dell'omotetia, e sia P generico

$$P \rightsquigarrow \underbrace{P - P_0}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{applicato in } P_0 \\ \text{con la freccia} \\ \text{in } P \\ \text{(è come mettere} \\ \text{l'origine in } P_0)}} \rightsquigarrow \underbrace{3(P - P_0)}_{\substack{\text{triplo del} \\ \text{precedente}}} \rightsquigarrow 3(P - P_0) + P_0 \quad \uparrow \quad \text{è come rimettere} \\ \text{l'origine a posto}$$

Nell'esempio specifico $P_0 = (2, -1)$ $P = (x, y)$

$$\begin{matrix} (x, y) & \rightarrow & (x-2, y+1) & \rightarrow & (3x-6, 3y+3) & \rightarrow & (3x-4, 3y+2) \\ P & & P-P_0 & & 3(P-P_0) & & \end{matrix}$$

L'espressione finale è $\boxed{f(x, y) = (3x-4, 3y+2)}$

$$P = (3, 0) \rightsquigarrow f(P) = (5, 2)$$

$$Q = (0, 0) \rightsquigarrow f(Q) = (-4, 2)$$

Cerco la controimmagine di $y = -2x + 3$

Le cartesiane vanno indietro!

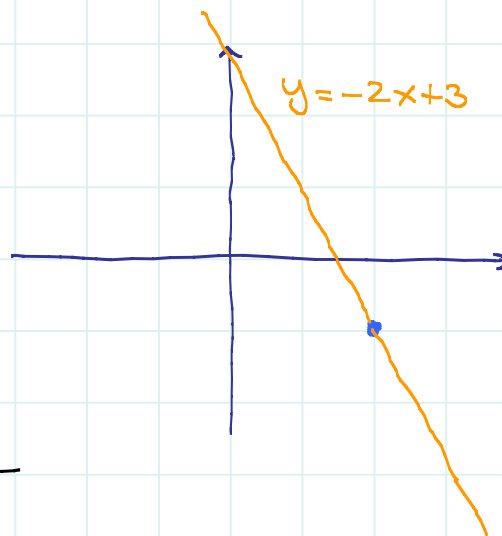
$$3y + 2 = -2(3x - 4) + 3$$

$$3y + 2 = -6x + 11$$

$$y = -2x + 3$$

È ragionevole che sia venuta la stessa?

Certo, perché la retta passa per il centro dell'omotetia!



— o — o —

ISOMETRIE: affinità con matrice A ortogonale

Teorema Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ conserva le distanze, cioè

$$\text{dist}(f(v), f(w)) = \text{dist}(v, w)$$

per ogni v e w , allora f è un'affinità con matrice A ortogonale.

Isometrie del piano Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali?

La prima colonna deve essere un vettore di lunghezza 1, cioè deve stare sulla circ.

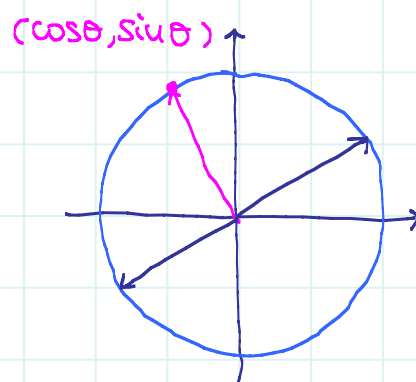
trigonometrica, quindi è del tipo

$$(\cos \theta, \sin \theta) \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & * \\ \sin \theta & * \end{pmatrix}$$

La seconda colonna deve avere sempre
lunghezza = 1 ed essere ortogonale
alla prima.

Ci sono quindi solo due possibilità



$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\det = 1$ $\det = -1$

Al variare di θ sono tutte le possibili matrici 2×2 ortogonali

Chi sono gli autovalori di queste matrici?

Seconda $\det = -1$ $\text{Tr} = 0$ Autovalori $\lambda = \pm 1$

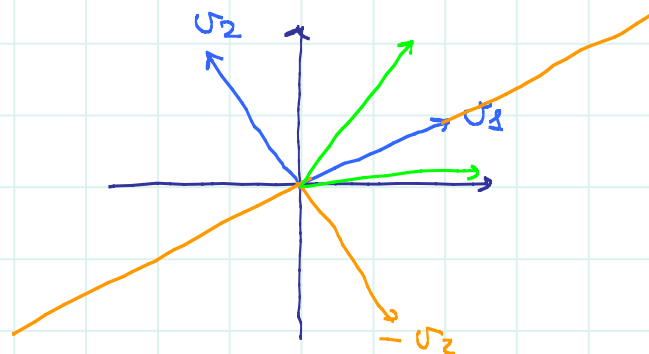
Matrice simmetrica $\leadsto$ autovettori ortogonali

$$Av_1 = v_1$$

$$Av_2 = -v_2$$

$\leadsto$ Simmetria rispetto alla retta

$\text{Span}(v_1)$



Prima $\det = 1$ $\text{Tr} = 2 \cos \theta$

Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$$

numero negativo

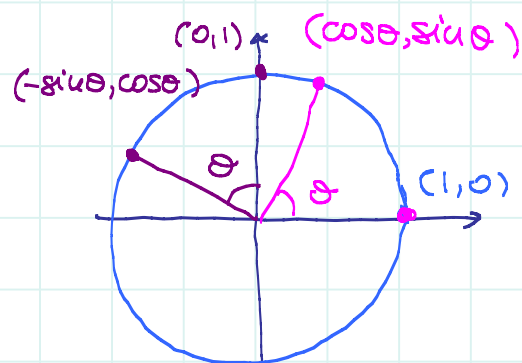
$= \cos \theta \pm i \sin \theta =$ autovalori complessi coniugati

$\leadsto$ è la Jordan reale di se stessa!

Come agisce?

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Le prime matrici sono matrici di rotazione

Le seconde matrici sono matrici di simmetria

Cosa succede quando compongo due affinità

$$f_1(x) = A_1x + b_1$$

$$f_2(x) = A_2x + b_2$$

$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &= A_2 f_1(x) + b_2 \\ &= A_2 (A_1x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2 A_1} x + A_2 b_1 + b_2 \end{aligned}$$

Morale: sto componendo le due matrici

— 0 — 0 —