

Trasformazioni affini

Una trasformazione affine in $\mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 vettore matrice vettore
 $n \text{ di m}$ $n \times n$ $n \text{ di m}$

In $\mathbb{R}^2$ una trasformazione affine dipende da 6 parametri

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

Esercizio

3. Consideriamo le seguenti condizioni:

$$f(1,1) = (1,2), \quad f(0,-4) = (2,1), \quad f(1,-1) = (2,0).$$

- Dimostrare che esiste un'unica affinità $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni precedenti. Determinare esplicitamente tale affinità.
- Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$.
- Determinare la retta che ha come immagine la retta $y = 2x - 1$.

(a) Versione bonina Uso l'espressione di sopra e cerco di calcolare a, b, c, d, e, f

$$\begin{cases} a+b+e = 1 \\ c+d+f = 2 \\ -4b+e = 2 \\ -4d+f = 1 \\ a-b+e = 2 \\ c-d+f = 0 \end{cases}$$

Nel risolvere cerco di eliminare le e e le f

$$1^a - 3^a = a + 5b = -1 \quad a = \frac{3}{2}$$

$$1^a - 5^a = 2b = -1 \quad \leadsto b = -\frac{1}{2}$$

$$2^a - 4^a = c + 5d = 1 \quad c = -4$$

$$2^a - 6^a = 2d = 2 \quad \leadsto d = 1$$

$$6^a: f = d - c = 5$$

$$5^a: e = 2 + b - a = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Conclusione: l'affinità è

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5\right)$$

Verifica: sostituisco $(1, 1), (0, -4), (1, -1)$

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2)$$

$$(0, -4) \rightarrow (2, 4)$$

$$(1, -1) \rightarrow (2, 0) \quad \text{😊}$$

Osservazione strategica Se siamo in $\mathbb{R}^n$ e diamo $n+1$ condizioni del tipo

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \dots, \quad f(v_{n+1}) = w_{n+1}$$

Allora se i vettori $v_1 - v_{n+1}, v_2 - v_{n+1}, \dots, v_n - v_{n+1}$ sono lin. indip., allora l'affinità con le propr. richieste esiste ed è unica.

Dim. Deve succedere che

$$Av_1 + b = w_1$$

$$Av_2 + b = w_2$$

$$\vdots$$

$$Av_{n+1} + b = w_{n+1}$$

Sottraggo l'ultima alle prime n

$$A(v_1 - v_{n+1}) = w_1 - w_{n+1}$$

$$A(v_2 - v_{n+1}) = w_2 - w_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$A(v_n - v_{n+1}) = w_n - w_{n+1}$$

se ne sono andati tutti i b !!

Per il teorema di struttura A esiste ed è unica.

Trovato A , con una qualunque equazione trovo b .

(a) Versione astuta

$$v_1 = (1, 1)$$

$$v_2 = (0, -4)$$

$$v_3 = (1, -1)$$

$$v_1 - v_3 = (0, 2)$$

$$v_2 - v_3 = (-1, -3)$$

} sono lin. indip.
↓
esiste ed è unica

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$

1° metodo Superbovino. Scelgo due punti P e Q della retta

$$P = (0, -1)$$

$$Q = (1, 1)$$

Calcolo le loro immagini

$$f(P) = \left(\frac{1}{2}, 4 \right)$$

$$f(Q) = (1, 2)$$

La nuova retta è quella che passa per $f(P)$ e $f(Q)$

$$(1, 2) + t \left(-\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$(1, 2) + t (-1, +4) = \underbrace{(1-t)}_x, \underbrace{2+4t}_y$$

$$t = 1-x \quad y = 2 + 4(1-x) = 2 + 4 - 4x = 6 - 4x$$

$$y = 6 - 4x$$

2° modo SLOGAN: le parametriche vanno bene avanti!

Scrivo la retta $y = 2x - 1$ in parametrica

$$(0, -1) + t(1, 2) = (t, -1 + 2t)$$

Sostituisco questa parametrica nella formula per $f(x, y)$

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

$$\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}(-1 + 2t), -4t - 1 + 2t + 5 \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \right)}_x, \underbrace{(-2t + 4)}_y$$

Quella ottenuta è la parametrica della retta immagine. Se voglio, torno in cartesiane

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \rightsquigarrow t = 2x - 1 \rightsquigarrow y = -2t + 4 = -4x + 2 + 4 = 6 - 4x \rightsquigarrow y = 6 - 4x$$

Osservazione Vale per ogni retta in ogni dimensione.

Quindi in $\mathbb{R}^n$ se

$$f(x) = Ax + b$$

e la retta è $v_0 + t v_1$

allora l'immagine è

$$f(v_0 + t v_1) = A(v_0 + t v_1) + b = t A v_1 + \underbrace{(A v_0 + b)}_{\text{nuovo pto base}}$$

↑
nuova direzione

Il p.to base si trasforma usando tutta l'affinità, compreso il b , la direzione solo con la matrice.

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

Determinare la controimmagine della retta $y = 2x - 1$

1° modo Bovino. Prendo i soliti due punti, ad esempio

$$P = (0, -1) \quad Q = (1, 1)$$

e cerco punti P_1 e Q_1 t.c. $f(P_1) = P$ e $f(Q_1) = Q$

A quel punto scrivo la retta $P_1 Q_1$.

Come trovo P_1 ? Lo cerco del tipo $P_1 = (x, y)$ e risolvo

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -4x + y + 5 = -1 \end{cases}$$

Stessa cosa per Q_1 → fare i conti per esercizio

2° modo Le cartesiane vanno bene indietro!

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

Se voglio che l'immagine soddisfi $y = 2x - 1$

sostituisco le due componenti dell'espressione in questa equazione

$$\boxed{-4x+y+5} = 2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \right) - 1$$

2^a componente 1^a componente

$$-4x+y+5 = 3x-y-1$$

$$2y = 7x-6$$

$$\boxed{y = \frac{7}{2}x - 3}$$

Per verifica, proviamo a calcolare l'immagine di questa retta

$$y = \frac{7}{2}x - 3 \rightsquigarrow \text{in parametrica } (0, -3) + t(2, 7) = (2t, -3+7t)$$

Sostituisco nell'espressione dell'affinità

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, -4x + y + 5 \right)$$

$$\text{e trovo } \left(3t + \frac{3}{2} - \frac{7}{2}t, -8t - 3 + 7t + 5 \right) = \left(-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, -t + 2 \right)$$

$$\text{Torno in cartesiana } x = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \rightsquigarrow t = 3 - 2x$$

$$y = -t + 2 = -3 + 2x + 2 = 2x - 1$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

— o — o —